Matematika na PC - polynomy

Příklad 1. Je dán polynom $P(x) = x^5 - 5x^4 - 5x^3 + 25x^2 + 4x - 20$. Určete $P(2,2)$, $P'(2,2)$ a nakreslete grafy P a P' na intervalu $[-2,5]$.

Řešení: Polynom je reprezentován vektorem jeho koeficientů. Zadáme proto:

≫ P=[1 -5 -5 25 4 -20]

Pomocí příkazu

≫ polyval(P,2.2)

určíme hodnotu polynomu P v bodě 2,2. Určíme derivaci polynomu P:

≫ derP=polyder(P)

Hodnotu polynomu derP v bodě 2,2 určíme pomocí

≫ polyval(derP,2.2)

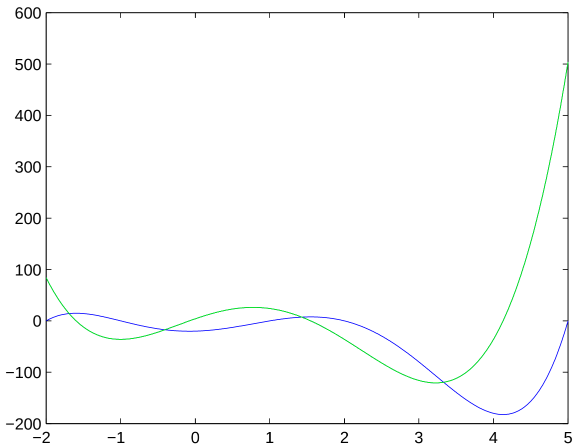
Nyní definujme

≫ x=-2:0.01:5;
≫ y=polyval(P,x);
≫ y2=polyval(derP,x);

Graf vykreslíme pomocí příkazů

≫ plot(x,y)
≫ hold on
≫ plot(x,y2,'g')

Výsledky: $P(2,2) = -3,0317$, $P'(2,2) = -54,4320$. Grafy jsou znázorněny na obrázku 1.



Obrázek 1. Graf polynomu a jeho derivace.

Příklad 2. Určete všechna řešení rovnice

$$\left(x^3 - 4x^2 + x + 6\right)(x - 1) = x^2 - 1.$$

Řešení: Definujme polynomy na levé straně rovnice

≫ P=[1 -4 1 6]
≫ Q=[1 -1]

Určíme polynom S, který je součinem polynomů P a Q:

≫ S=conv(P,Q)

Definujme polynom na levé straně:

≫ R=[0 0 1 0 -1]

Abychom mohli vypočítat rozdíl vektorů S a R, musejí mít tyto vektory stejnou délku. Proto jsme na začátek vektoru R přidali dvě nuly. Nyní převedeme polynom S na levou stranu, tj. určíme rozdíl:

≫ S=S-R

Určíme kořeny polynomu S:

≫ roots(S)

Tyto kořeny jsou řešením dané rovnice.

Výsledek: Daná rovnice má čtyři řešení $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1,3820$ a $3,6180$.

Příklad 3. Vypočtěte podíl polynomů

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 4}{x^2 + 2}.$$

Řešení: Definujme polynomy v čitateli a ve jmenovateli:

≫ P=[1 3 0 4]
≫ Q=[1 0 2]

Jejich podíl určíme pomocí příkazu:

≫ [R,S]=deconv(P,Q)

Potom platí

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}$$

Výsledek: $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 4}{x^2 + 2} = x + 3 - \dfrac{2x + 2}{x^2 + 2}.$

Příklad 4. Rozložte na parciální zlomky

$$\frac{x^4 + x^3 + 7x^2 + 2x + 4}{x^3 - x^2 + 4x - 4}.$$

Řešení: Nejprve nadefinujeme polynomy v čitateli a ve jmenovateli:

$\gg$ P=[1 1 7 2 4]

$\gg$ Q=[1 -1 4 -4]

Rozklad na parciální zlomky určíme pomocí příkazu:

$\gg$ [R,S,M]=residue(P,Q)

Pokud bychom měli dán rozklad a chtěli bychom ho převést na zlomek, použili bychom příkaz:

$\gg$ [P,Q]=residue(R,S,M)

Potom platí

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{R(1)}{x - S(1)} + \ldots + \frac{R(n)}{x - S(n)}$$

Výsledek: Uvedeným postupem dostaneme

$$\frac{x^4 + x^3 + 7x^2 + 2x + 4}{x^3 - x^2 + 4x - 4} = x + 2 + \frac{1}{x - 2i} + \frac{1}{x + 2i} + \frac{3}{x - 1}.$$

Výsledek můžeme zapsat také v reálném tvaru

$$\frac{x^4 + x^3 + 7x^2 + 2x + 4}{x^3 - x^2 + 4x - 4} = x + 2 + \frac{2x}{x^2 + 2} + \frac{3}{x - 1}.$$

Příklad 5. Byly naměřeny hodnoty uvedené v tabulce.

t	0	1	2	3	4	5	6	7
y	2	6	11	20	31	41	55	71

Aproximujte naměřené hodnoty kvadratickou funkcí metodou nejmenších čtverců.

Řešení: Definujme vektory hodnot z tabulky:

$\gg$ t=0:7

$\gg$ y=[2 6 11 20 31 41 55 71]

Kvadratická funkce je polynom druhého řádu. Polynom P druhého řádu aproximující zadaná data určíme pomocí:

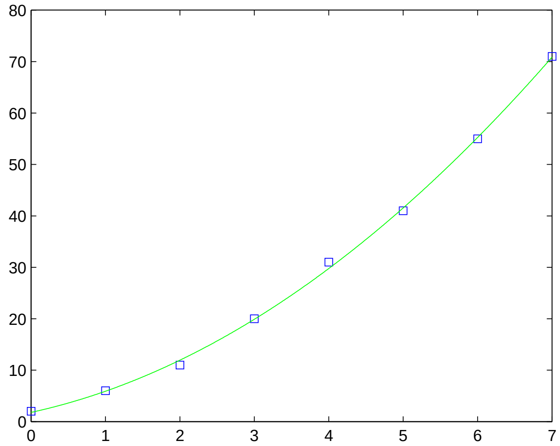
$\gg$ P=polyfit(t,y,2)

Číslo 2 označuje řád polynomu.

Vytvoříme graf:

```
>> plot(t,y,'s')
>> hold on
>> x=0:0.01:7
>> plot(x,polyval(P,x),'g')
```

Výsledek: Kvadratická funkce aproximující zadaná data metodou nejmenších čtverců má předpis $P(x) = 0,9583x^2 + 3,1607x + 1,7917$.



Obrázek 1. Graf zadaných hodnot a kvadratické funkce aproximující tyto hodnoty.