

# NUMERICKÉ METODY

Dana Černá

<http://www.fp.tul.cz/kmd/>

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Technická univerzita v Liberci

# NUMERICKÁ INTEGRACE

Úloha: Vypočtěte

$$\int_a^b f(x) dx,$$

kde  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Metody výpočtu:

- Výpočet pomocí primitivní funkce k funkci  $f$  (symbolický výpočet)
- Výpočet pomocí Taylorovy řady funkce  $f$
- Numerická integrace

Numerická integrace funkce jedné proměnné se také nazývá **kvadratura**. Numerická integrace funkce více proměnných se také nazývá **kubatura**.

## NUMERICKÁ INTEGRACE

Daný integrál budeme počítat přibližně pomocí součtu:

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n w_i f(x_i),$$

kde  $x_i \in [a, b]$  se nazývají **uzly**,  $w_i \in \mathbb{R}$  se nazývají **váhy**.

Výraz na pravé straně se nazývá **kvadrurní vzorec**, označíme  $Q(f) = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$ .

Chybu budeme definovat předpisem  $E_n(f) = I(f) - Q(f)$ .

Řekneme, že kvadrurní vzorec  $Q(f)$  je **řádu  $k$** , jestliže platí

$$E_n(P(x)) = 0,$$

pro všechny polynomy  $P$  stupně nejvýše  $k$ .

## (JEDNODUCHÉ) NEWTON-COTESOVY VZORCE

Definujme **krok metody**  $h = (b - a) / n$ . Budeme uvažovat **ekvidistantní uzly**  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, \dots, n$ , nebo  $x_i = a + (i - \frac{1}{2}) h$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Potom

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_n(x) dx,$$

kde  $P_n$  je Lagrangeův interpolační polynom stupně  $n$  pro funkci  $f$  a dané uzly.

Tento polynom lze vyjádřit v tzv. **Lagrangeově tvaru**

$$P(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i),$$

kde

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)}.$$

Platí

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b P_n(x) dx \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i) dx \\ &= \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx.\end{aligned}$$

Newtonovy-Cotesovy vzorce mají tvar

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n w_i f(x_i), \quad \text{kde } w_i = \int_a^b l_i(x) dx.$$

Newton-Cotesovy vzorce mají pro danou volbu ekvidistantních uzlů maximální řád.

Při interpolaci polynomy vyšších stupňů může dojít k velkým chybám na okrajích intervalu, proto se Newton-Cotesovy vzorců vyšších řádů příliš nepoužívají.

Pro konkrétní volbu stupně Lagrangeova interpolačního polynomu a volbu uzlů dostaneme konkrétní metodu:

- $n = 0$  Obdélníkové pravidlo
- $n = 1$  Lichoběžníkové pravidlo
- $n = 2$  Simpsonovo pravidlo (Simpsonovo 1/3 pravidlo)
- $n = 3$  Simpsonovo 3/8 pravidlo

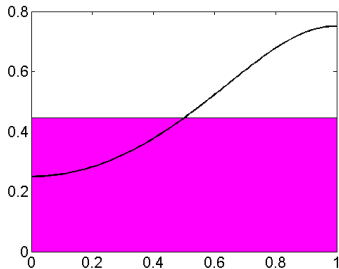
# 1. OBDÉLNÍKOVÉ PRAVIDLO

Pro  $n = 0$  a  $x_0 = \frac{a+b}{2}$  má Lagrangeův interpolační polynom tvar

$$P_0(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

z toho odvodíme kvadrurní vzorec

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_n(x) dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$





Je-li  $f \in C^2([a, b])$ , potom existuje  $\xi \in [a, b]$  takové, že pro chybu platí

$$E_0(f) = \int_a^b f(x) - P_0(x) dx = \frac{f^{(2)}(\xi)}{24} (b - a)^3.$$

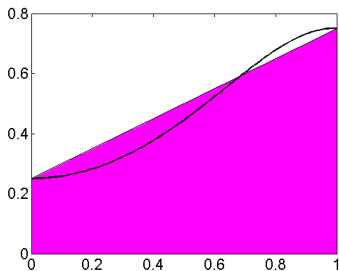
## 2. LICHOBĚŽNÍKOVÉ PRAVIDLO

Pro  $n = 1$ ,  $x_0 = a$ ,  $x_1 = b$ , má Lagrangeův interpolační polynom tvar

$$P_1(x) = f(a) \frac{(x-b)}{(a-b)} + f(b) \frac{(x-a)}{(b-a)},$$

z toho odvodíme kvadraturní vzorec

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_1(x) dx = \frac{f(a) + f(b)}{2} (b-a),$$



Je-li  $f \in C^2([a, b])$ , potom existuje  $\xi \in [a, b]$  takové, že pro chybu platí

$$E_1(f) = -\frac{f^{(2)}(\xi)}{12} (b-a)^3.$$

### 3. SIMPSONOVO PRAVIDLO

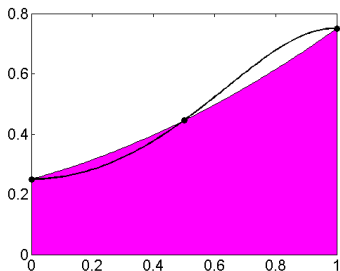
Pro  $n = 2$ ,  $x_0 = a$ ,  $x_1 = \frac{a+b}{2}$ ,  $x_2 = b$ , má Lagrangeův interpolační polynom tvar

$$P_2(x) = f(x_0) \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1) \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2) \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)},$$

z toho odvodíme kvadrurní vzorec

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_2(x) dx = \frac{h}{3} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right),$$

kde  $h = (b-a)/2$  je vzdálenost mezi uzly.



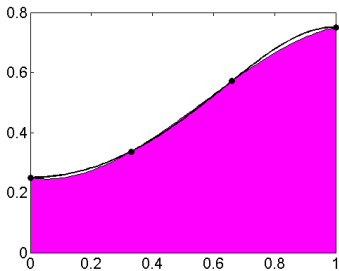
Je-li  $f \in C^4([a, b])$ , potom existuje  $\xi \in [a, b]$  takové, že pro chybu platí

$$E_2(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{90} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5.$$

## 4. SIMPSONOVO 3/8 PRAVIDLO

Pro  $n = 3$ ,  $h = \frac{b-a}{3}$ ,  $x_0 = a$ ,  $x_1 = a + h$ ,  $x_2 = a + 2h$ ,  $x_3 = b$ ,  
dostaneme kvadrturní vzorec

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{8} \left( f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right),$$



Je-li  $f \in C^4([a, b])$ , potom existuje  $\xi \in [a, b]$  takové, že pro chybu platí

$$E_3(f) = \frac{3f^{(4)}(\xi)}{80}h^5.$$

## 1. (SLOŽENÉ) OBDÉLNÍKOVÉ PRAVIDLO

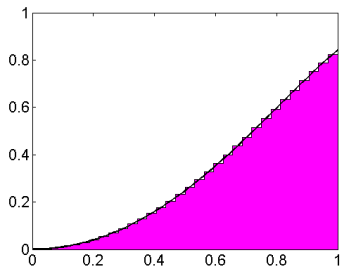
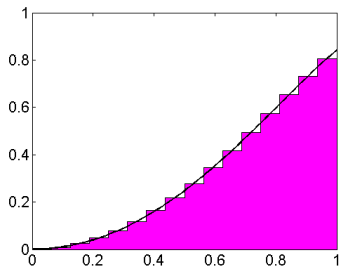
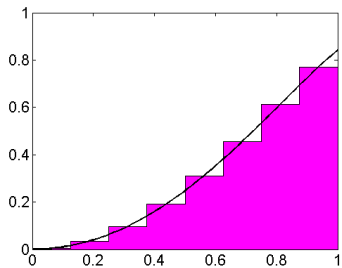
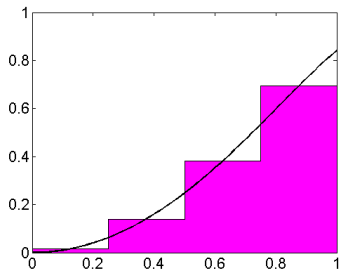
Rozdělíme interval  $[a, b]$  na  $m$  podintervalů stejné délky  $h = \frac{b-a}{m}$ , označíme středy podintervalů  $x_1, \dots, x_m$ , tj.  $x_i = a + (i - 1/2)h$ , a na každém podintervalu použijeme obdélníkové pravidlo, dostaneme tzv. **složené obdélníkové pravidlo**

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=1}^m f(x_i),$$

Je-li  $f \in C^2([a, b])$ , potom existuje  $\xi \in [a, b]$  takové, že pro chybu platí

$$E_m(f) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{24} (b-a) h^2.$$





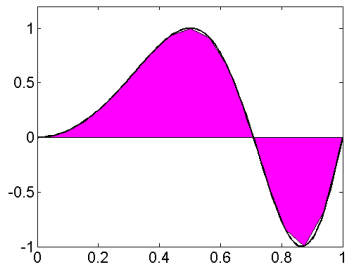
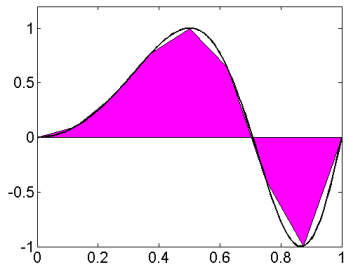
## 2. (SLOŽENÉ) LICHOBĚŽNÍKOVÉ PRAVIDLO

Rozdělíme interval  $[a, b]$  na  $m$  podintervalů stejné délky  $h = \frac{b-a}{m}$ , označíme  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, \dots, m$  a na každém podintervalu použijeme lichoběžníkové pravidlo, dostaneme tzv. **složené lichoběžníkové pravidlo**

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left( \frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{m-1}) + \frac{f(x_m)}{2} \right)$$

Je-li  $f \in C^2([a, b])$ , potom existuje  $\xi \in [a, b]$  takové, že pro chybu platí

$$E_m(f) = -\frac{f^{(2)}(\xi)}{12} (b-a) h^2.$$



### 3. (SLOŽENÉ) SIMPSONOVO PRAVIDLO

Rozdělíme interval  $[a, b]$  na  $m$  podintervalů stejné délky  $h = \frac{b-a}{m}$ ,  $m$  je sudé, označíme  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, \dots, m$  a na každém podintervalu  $[x_{2i}, x_{2i+2}]$  použijeme jednoduché Simpsonovo pravidlo, dostaneme tzv. **složené Simpsonovo pravidlo**

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 4f(x_{m-1}) + f(x_m))$$

Je-li  $f \in C^4([a, b])$ , potom existuje  $\xi \in [a, b]$  takové, že pro chybu platí

$$E_m(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{180} (b-a) h^4.$$

## 4. (SLOŽENÉ) SIMPSONOVO 3/8 PRAVIDLO

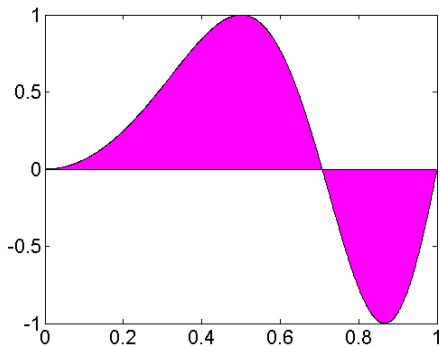
Rozdělíme interval  $[a, b]$  na  $m$  podintervalů stejné délky  $h = \frac{b-a}{m}$ ,  $m$  je dělitelné 3, označíme  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, \dots, m$  a na každém podintervalu  $[x_{3i}, x_{3i+3}]$  použijeme jednoduché Simpsonovo 3/8 pravidlo, dostaneme tzv. **složené Simpsonovo 3/8 pravidlo**

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{8} \left[ f(x_0) + f(x_m) + 3 \sum_{k=1}^{m/3} (f(x_{3k-1}) + f(x_{3k-2})) + 2 \sum_{k=1}^{m/3-1} f(x_{3k}) \right]$$

Je-li  $f \in C^4([a, b])$ , potom pro chybu platí

$$E_m(f) = -\frac{3f^{(4)}(\xi)}{80} (b-a) h^4.$$

PŘÍKLAD: Vypočtete  $\int_0^1 \sin(2\pi x^2)$ .



m	obdélníkové	lichoběžníkové	Simpsonovo
16	<b>0.16962518890597</b>	<b>0.17584107153707</b>	<b>0.17152825575011</b>
32	<b>0.17119420389884</b>	<b>0.17273313022152</b>	<b>0.17169714978300</b>
64	<b>0.17157986357475</b>	<b>0.17196366706018</b>	<b>0.17170717933974</b>
128	<b>0.17167587226279</b>	<b>0.17177176531747</b>	<b>0.17170779806989</b>
256	<b>0.17169984913705</b>	<b>0.17172381879013</b>	<b>0.17170783661435</b>
512	<b>0.17170584177594</b>	<b>0.17171183396359</b>	<b>0.17170783902141</b>
1024	<b>0.17170733983695</b>	<b>0.17170883786976</b>	<b>0.17170783917182</b>
2048	<b>0.17170771434604</b>	<b>0.17170808885336</b>	<b>0.17170783918122</b>