Počítačové praktikum - opakování

1. Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla $(1+i)^5$.

2. Vypočtěte $(\mathbf{v}+1)^T\,\mathbf{v}$, kde $\mathbf{v}$ je sloupcový vektor daný předpisem

$$\mathbf{v}_k = \begin{cases} \sin(k), & k = 1,\ldots,30, \\ \sin(k) - k + 30, & k = 31,\ldots,100. \end{cases}$$

3. Napište program pro výpočet obsahu lichoběžníka s výškou v a délkami základen z_1 a z_2.

4. Napište program, který určí prvních n členů aritmetické posloupnosti a jejich součet. Vstupními parametry programu budou: první člen a_1, diference d a počet členů n, výstupními parametry budou: vektor a obsahující prvních n členů a součet s prvních n členů.

5. Určete všechna řešení soustavy:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4, \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -5, \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 10. \end{array}$$

6. Určete všechna řešení soustavy:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4, \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7. \end{array}$$

7. Určete všechna řešení soustavy:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & & & & & & & = & 2, \\ x_1 & + & 2x_2 & & & & & = & 2, \\ x_1 & & & + & 2x_3 & & & = & 2, \\ \vdots & & & & & \ddots & & = & \vdots \\ x_1 & & & & & + & 2x_{10} & = & 2. \end{array}$$

8. Určete matici inverzní k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

9. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{C} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Určete vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ velikosti 10×10, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & & 2 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 2 & & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Řešte maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{X} + 2\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 14 \end{pmatrix}$$

12. Určete vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ velikosti 30×30, která má strukturu:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 5 & 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & 5 & & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

tj. diagonální prvky jsou rovny 5 a ostatní prvky jsou rovny 1.

13. Určete vlastní číslo matice $\mathbf{A}$, které je v absolutní hodnotě maximální, a vlastní vektor příslušný tomuto vlastnímu číslu, je-li

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} i & i & i & i & 5 \\ i & i & i & 5 & i \\ i & i & 5 & i & i \\ i & 5 & i & i & i \\ 5 & i & i & i & i \end{pmatrix},$$

kde i označuje imaginární jednotku.

14. Vypočtěte součet všech složek vektoru $\mathbf{u}$, jestliže $\mathbf{u}$ je sloupcový vektor definovaný rekurentně předpisem: $\mathbf{u}_1 = 1$, $\mathbf{u}_i = 2\mathbf{u}_{i-1} - 2$ pro $i = 2, \dots, 20$.

15. Vypočtěte součin $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdots \frac{1}{23} \cdot \frac{1}{25}$.

Výsledky

1. Reálná část zadaného čísla je -4 a imaginární část je -4.

2. 114505,03

3.
```
function S=obsah_lichobeznika(z1, z2, v)
S=(z1 + z2)*v/2;
end
```

4.
```
function [a,s]=aritmeticka_posloupnost( a1, d, n)
a=zeros(1,n);
a(1)=a1;
for i=2:n
    a(i)=a(i-1)+d;
end
s=n*(a(1)+a(n))/2;
end
```

5. Daná soustava má řešení $x = (1, 5, -3)^T$.

6. Daná soustava má nekonečně mnoho řešení tvaru

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7333 \\ 1,8667 \\ 0,6667 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -0,3651 \\ -0,1826 \\ 0,9129 \end{pmatrix}, \quad \text{kde } c \in \mathbb{R}.$$

7. Daná rovnice má řešení $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = \ldots = x_{10} = 0,5$.

8.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} \text{ pro } a \neq 0.$$

9. Matice $\mathbf{C}$ má vlastní čísla $\lambda_1 = 1,47$ a $\lambda_2 = 9,53$ a jim příslušné vlastní vektory $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0,66 \\ -0,75 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -0,75 \\ -0,66 \end{pmatrix}$.

10. Zadaná matice má vlastní čísla 2 a -2.

11. Daná rovnice má řešení $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

12. Matice má vlastní čísla 4 a 34.

13. Vlastní číslo matice $\mathbf{A}$, které má maximální absolutní hodnotu, je číslo $5+4i$ a vlastní vektor příslušný tomuto vlastnímu číslu je $\mathbf{u} = (0{,}4472\ 0{,}4472\ 0{,}4472\ 0{,}4472\ 0{,}4472)^T$.

14. -1048535

15. $1{,}2649 \cdot 10^{-13}$