FP - SEMINÁŘ
Z NUMERICKÉ MATEMATIKY

Dana Černá

http://www.fp.tul.cz/kmd/

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Technická univerzita v Liberci

GAUSSOVA KVADRATURA

Určitý integrál budeme počítat přibližně pomocí součtu:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i),$$

kde $x_i \in [a, b]$ se nazývají uzly, $w_i \in \mathbb{R}$ se nazývají váhy.

Výraz na pravé straně se nazývá kvadraturní vzorec, označíme $Q(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$.

Chybu budeme definovat předpisem $E(f) = I(f) - Q(f)$.

Řekneme, že kvadraturní vzorec $Q(f)$ je řádu k, jestliže platí $E(P) = 0$ pro všechny polynomy P stupně nejvýše k.

Vzorec $Q(f)$ se nazývá Gaussův, jestliže je řádu $2n+1$.

Opakování - Hermitův interpolační polynom

Hermitův interpolační polynom H_{2n+1} interpolující funkci f a její derivaci v uzlech $x_0, \ldots, x_n$, které jsou navzájem různé, je dán předpisem

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} s_i(x) f(x_i) + \sum_{i=0}^{n} t_i(x) f'(x_i),$$

kde

$$s_i(x) = \left(1 - 2(x - x_i) l_i'(x_i)\right) l_i^2(x)$$

$$t_i(x) = (x - x_i) l_i^2(x), \quad l_i(x) = \frac{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}.$$

Potom

$$\int_a^b H_{2n+1}(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} r_i f(x_i) + \sum_{i=0}^{n} q_i f'(x_i),$$

kde

$$r_i = \int_a^b s_i(x)\,dx, \quad q_i = \int_a^b t_i(x)\,dx \tag{1}$$

Položíme

$$Q(f) = \sum_{i=0}^{n} r_i f(x_i) \tag{2}$$

a určíme uzly $x_0, \ldots, x_n$ tak, aby $Q(f)$ byl řádu 2n+1.

VĚTA: Jestliže $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ a pro každý polynom P stupně menšího nebo rovného n platí $\int_a^b \omega_{n+1}(x) P(x)\, dx = 0$, kde $\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$, potom je $Q(f)$ definovaný vztahem (2) Gaussův.

Důkaz: Předpokládejme, že jsou splněny předpoklady věty. Jestliže $\tilde{P}$ je polynom stupně menšího nebo rovného $2n+1$, potom Hermitův interpolační polynom H_{2n+1} interpolující $\tilde{P}$ v uzlech $x_0, \ldots, x_n$ splňuje $H_{2n+1} = \tilde{P}$. Potom pro chybu platí

$$E\left(\tilde{P}\right) = \int_a^b \tilde{P}(x)\, dx - \sum_{i=0}^{n} r_i \tilde{P}(x_i) = \sum_{i=0}^{n} q_i \tilde{P}'(x_i).$$

Vypočítáme q_i:

$$\begin{aligned} q_i &= \int_a^b (x - x_i) \frac{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)^2}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)^2} \\ &= \int_a^b \omega_{n+1} \frac{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)^2} = 0. \end{aligned}$$

Z toho plyne, že $E\left(\tilde{P}\right) = 0$ a vzorec je tedy Gaussův.

Podmínka $\int_a^b \omega_{n+1}(x)\, P(x)\, dx = 0$ bude splněna, pokud ω_{n+1} bude tzv. ortogonální polynom.

Mezi ortogonální polynomy patří například Legendreovy polynomy, které jsou definovány na intervalu $[-1, 1]$ rekurentním vzorcem:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x$$

$$P_{m+1}(x) = \frac{2m+1}{m+1} x P_m(x) - \frac{m}{m+1} P_{m-1}(x), \; m \geq 1.$$

Závěr: Jestliže $x_0, \ldots, x_n$ jsou kořeny Legendreova polynomu stupně $n+1$ a r_i je dáno vztahem (1), potom platí

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx Q(f) = \sum_{i=0}^{n} r_i f(x_i)$$

a $Q(f)$ je Gaussův a nazývá se Gaussův-Legendreův vzorec.

Vztah pro integrál s obecnými mezemi a a b dostaneme substitucí:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \approx Q(f) = \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^{n} r_i f(t_i),$$

kde $t_i = \frac{b-a}{2} x_i + \frac{a+b}{2}$.

Hodnoty uzlů a vah Gaussovy-Legendreovy kvadratury

počet uzlů n	uzly x_i	váhy r_i
2	$\pm\frac{1}{3}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm\sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2\sqrt{6}}{7\sqrt{5}}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2\sqrt{6}}{7\sqrt{5}}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$

Váhy u Gaussovy kvadratury jsou kladná čísla.