# WAVELETY

Dana Černá

http://www.fp.tul.cz/kmd/

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Technická Univerzita v Liberci

## Klasické řešení

Úloha (U): Budeme řešit diferenciální rovnici

$$-u'' + \alpha u = f \quad \text{na} \quad (a, b), \qquad u(a) = u(b) = 0, \qquad \alpha > 0. \tag{1}$$

Řekneme, že $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ je (klasické) řešení úlohy (U), jestliže $u \in C^2([a, b])$ a $u$ splňuje (1).

# Slabé řešení

Rovnici

$$-u'' + \alpha u = f \quad \text{na} \quad (a, b)\,, \qquad u\,(a) = u\,(b) = 0$$

vynásobíme funkcí $v \in H_0^1\,([a, b])$ a zintegrujeme přes interval $[a, b]$. Dostaneme

$$-\int_a^b u''\,(x)\,v\,(x)\,dx + \alpha \int_a^b u\,(x)\,v\,(x)\,dx = \int_a^b f\,(x)\,v\,(x)\,dx.$$

První člen upravíme pomocí per partes:

$$\begin{aligned} -\int_a^b u''\,(x)\,v\,(x)\,dx &= -\left[u'\,(x)\,v\,(x)\right]_a^b + \int_a^b u'\,(x)\,v'\,(x)\,dx \\ &= \int_a^b u'\,(x)\,v'\,(x)\,dx. \end{aligned}$$

Dostaneme

$$\int_a^b u'(x)\, v'(x)\, dx + \alpha \int_a^b u(x)\, v(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx.$$

Variační formulace úlohy (U):
Najdi $u \in H_0^1([a, b])$

$$\int_a^b u'(x)\, v'(x)\, dx + \alpha \int_a^b u(x)\, v(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, v(x)\, dx, \quad v \in H_0^1([a, b]).$$

Taková funkce $u \in H_0^1([a, b])$ se nazývá slabé řešení úlohy (U).

VĚTA: Jestliže $u$ je klasické řešení úlohy (U), potom $u$ je slabé řešení úlohy (U).

VĚTA: Jestliže $u$ je klasické řešení úlohy (U) a $u \in C^2([a, b])$, potom $u$ je klasické řešení úlohy (U).

# Galerkinova metoda

Zvolme $V_n \subset H_0^1([a,b])$ takové, že $V_n \subset V_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Budeme hledat přibližné řešení úlohy, tj. $u_n \in V_n$ takové, že

$$\int_a^b u_n'(x)\, v_n'(x)\, dx + \alpha \int_a^b u_n(x)\, v_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, v_n(x)\, dx, \; v_n \in V_n.$$

Označme $\phi_1, \ldots, \phi_n$ bázi prostoru $V_n$ a vyjádřeme rozvoj funkcí $u_n$ a $v_n$ vzhledem k této bázi.

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i$$

a položme postupně $v_n = \phi_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Dosazením do předchozí rovnice získáme soustavu lineárních algebraických rovnic:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \int_a^b \phi_i'(x)\,\phi_j'(x)\,dx + \alpha \sum_{i=1}^{n} c_i \int_a^b \phi_i(x)\,\phi_j(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,\phi_j(x)\,dx,$$

kde $j = 1, \ldots, n$. To je zapsáno maticově:

$$\mathbf{Kc} + \alpha\mathbf{Mc} = \mathbf{f},$$

kde $\mathbf{c} = (c_1, \ldots c_n)^T$,
$\mathbf{K}_{ij} = \int\limits_a^b \phi_i'(x)\,\phi_j'(x)\,dx, \mathbf{M}_{ij} = \int\limits_a^b \phi_i(x)\,\phi_j(x)\,dx, \mathbf{f}_i = \int\limits_a^b f(x)\,\phi_i(x)\,dx.$

Položme $\mathbf{A} = \mathbf{K} + \alpha\mathbf{M}$, potom má soustava tvar

$$\mathbf{Ac} = \mathbf{f}.$$

Matice $\mathbf{A}$ se nazývá matice tuhosti a vektor $\mathbf{f}$ se nazývá vektor síly.

Lineární konečné prvky:

Báze $\phi_1, \ldots, \phi_n$ prostoru $V_n$ je definována pro $i = 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} \phi_i(x) &= \frac{x - x_{i-1}}{h}, \; x \in [x_{i-1}, x_i], \\ &= \frac{x_{i+1} - x}{h}, \; x \in [x_i, x_{i+1}], \\ &= 0, \qquad\qquad x \in [0, x_{i-1}] \cup [x_{i+1}, 1], \end{aligned}$$

kde $N = n + 1 \in \mathbb{N}$, $h := \frac{b-a}{N}$, $x_i := a + ih$, $i = 0, \ldots, N$.

$$\mathbf{K}=\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{M}=\frac{h}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$