Cvičení 1

Příklad 1. Procvičte hledání rovnice přímky procházející zadanými body.

Příklad 2. Na množině reálných čísel řešte nerovnici

$$\frac{x-1}{x+2}+\frac{x+3}{x-4}\leq 2.$$

(Výsledek: $x \in (-\infty; -6,5] \cup (-2, 4)$.)

Příklad 3. Na množině reálných čísel řešte nerovnici $|x-2|-2x+3<0$.
$\left(\text{Výsledek: } x \in \left(\frac{5}{3}, \infty\right).\right)$

Příklad 4. Na množině reálných čísel řešte nerovnici

$$|x-a| \leq \varepsilon \quad (a, \varepsilon > 0 \in \mathbb{R}.)$$

Příklad 5. Na příkladech vysvětlete rozdíl mezi infimem a minimem a mezi supremem a maximem.

Příklad 6. Pomocí Moivreovy věty vyřešte rovnici $x^4 = 1$. Výsledek využije k důkazu tvrzení:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1).$$

(Moivreova věta dává čtyři řešení $1, i, -1, -i$ a tedy: $x^4-1=(x+1)(x+i)(x-1)(x-i)$.)

Příklad 7. Pomocí tabulky pravdivostních hodnot dokažte ekvivalence výrokových forem:

- $\neg(\neg X) \iff X$,
- $\neg(X \wedge Y) \iff (\neg X \vee \neg Y)$,
- $\neg(X \vee Y) \iff (\neg X \wedge \neg Y)$,
- $\neg(X \Rightarrow Y) \iff (X \wedge \neg Y)$,
- $\neg(X \Leftrightarrow Y) \iff (X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y)$.

Příklad 8. Rozhodněte o pravdivosti kvantifikovaných výroků:

- $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x^2+y^2=1$ (neplatí),

- $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x^2 + y^2 = 1$ (platí),
- $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists! y \in \mathbb{R} \quad x^2 + y^2 = 1$ (platí),
- $\exists! x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x^2 + y^2 = 1$ (neplatí),
- $\exists! x \in \mathbb{R}\ \exists! y \in \mathbb{R} \quad x^2 + y^2 = 1$ (neplatí),
- $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x^2 + y^2 = 1$ (neplatí),
- $\forall x \in [-1, 1]\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x^2 + y^2 = 1$ (platí).

Příklad 9. Nechť $A(x)$, $B(x)$ jsou výrokové formy definované na množině U. Proveďte negaci kvantifikovaných výroků:

- $\forall x \in U \quad A(x) \Rightarrow B(x)$,
- $\exists x \in U \quad A(x) \wedge B(x)$.

Příklad 10. Dokažte sporem, že číslo $\sqrt{2}$ není racionální.

Příklad 11. Vyvraťte nebo dokažte následující výroky:

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 + n + 11$ je prvočíslo (neplatí),
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 + n + 11$ je liché (platí),
- $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 = 0$ (neplatí),
- $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ (neplatí).

Příklad 12. Odvoďte a dokažte vzorce pro součet aritmetické a geometrické řady.

Příklad 13. Uveďte příklady zobrazení

- z množiny A do množiny B,
- množiny A do množiny B,
- z množiny A na množinu B (surjektivního),
- prostého (injektivního),
- vzájemně jednoznačného (bijektivního)
- inverzního.