Cvičení 2

Příklad 1. Určete definiční obory následujících funkcí:

- $y = \sqrt{3x - x^3} \qquad (x \in (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [0, \sqrt{3}])$,
- $y = (x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \qquad (x \in [-1, 1))$,
- $y = \dfrac{x-1}{x^2 - 5x + 6} + \sqrt[3]{2x+1} \qquad (x \in (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty))$,
- $y = \arccos \dfrac{1-2x}{3} \qquad (x \in [-1, 2])$,
- $y = \dfrac{x}{\sin x} \qquad (x \in \mathbb{R} \ \& \ x \neq k\pi;\ k \in \mathbb{Z})$,
- $y = \ln \sin x \qquad (x \in \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, 2k\pi + \pi))$.

Příklad 2. Sestrojte graf funkce $f:\ y = \arcsin(\sin x)$.

Řešení:

Funkce sin zobrazuje $\mathbb{R}$ do intervalu $[-1, 1]$ a definiční obor funkce arcsin je právě interval $[-1, 1]$ a tedy funkce $\arcsin(\sin x)$ je definována pro libovolné reálné číslo. Funkce sin je 2π-periodická, takže

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x \qquad \text{a potom i} \qquad \arcsin(\sin(x + 2k\pi)) = \arcsin(\sin x).$$

Tedy i funkce $\arcsin(\sin x)$ je 2π-periodická. Stačí tedy vyšetřovat funkci $\arcsin(\sin x)$ pouze na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Dále na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ je k funkci sin inverzní funkce arcsin, tzn.

$$f(x) = \arcsin(\sin x) = x \qquad \text{pro } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Body z intervalu $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ můžeme napsat ve tvaru $x + \pi$, kde $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, potom platí:

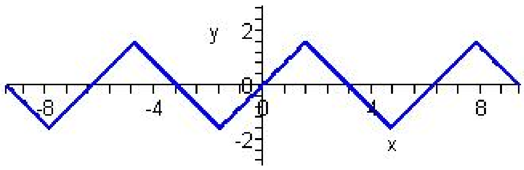
$$\sin(x + \pi) = \sin x \cos \pi + \sin \pi \cos x = -\sin x = \sin(-x).$$

Tedy funkce sin vypadá na intervalu $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ stejně jako funkce $-\sin$ na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Potom platí:

$$f(x + \pi) = \arcsin(\sin(x + \pi)) = \arcsin(-\sin x) = \arcsin(\sin -x) = -x \quad \text{pro } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

(Protože $-x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ a na tomto intervalu je k funkci sin inverzní funkce arcsin .)

Obrázek 1: $\arcsin(\sin x)$.



Příklad 3. Rozhodněte, zda-li jsou funkce $y = \ln x^2$ a $y = 2\ln x$ totožné.
(Nejsou, mají odlišné definiční obory.)

Příklad 4. Je-li dána funkce $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, spočtěte $f(2x)$, $2f(x)$, $f(x^2)$, $f^2(x)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\dfrac{1}{f(x)}$. $\left(f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{x+1}{x-1} = -f(x)\right)$

Příklad 5. Určete $f(x)$, je-li

- $f(x+1) = x^2 - 3x + 2 \qquad (f(x) = x^2 - 5x + 6)$,
- $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$ pro $x > 0 \qquad \left(f(x) = \dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$.

Příklad 6. Tvořte složené funkce z funkcí $u = \sqrt{1+x}$, $v = x^2$, $w = \operatorname{tg} x$ a určete jejich definiční obory.
$\left(\text{Například } y = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} \text{ má definiční obor } \mathbb{R} - \left\{x = \dfrac{(2k+1)\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\right\}.\right)$

Příklad 7. Určete, zda-li jsou následující funkce sudé (liché):

- $f(x) = \ln \dfrac{1-x}{1+x}$ (lichá),
- $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ (lichá),
- $f(x) = 4x^2 + 1$ (sudá),
- $f(x) = 2x + 1$ (ani sudá ani lichá).

Příklad 8. Určete, nejmenší periodu funkce $y = \operatorname{tg}(3x) + \sin(6x)$. $\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

Příklad 9. U následujících funkcí najděte inverzní funkce:

- $f(x) = 2^x - 3$
  $\left(f^{-1}(x) = \log_2(x+3),\ D(f) = H(f^{-1}) = \mathbb{R},\ H(f) = D(f^{-1}) = (-3, \infty)\right)$,

- $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$
  $\left(f^{-1}(x) = -\dfrac{dx-b}{cx-a},\ D(f) = H(f^{-1}) = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\},\ H(f) = D(f^{-1}) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{a}{c}\right\}\right)$,

- $f(x) = 2x - x^2$
  $(f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1-x}$ k funkci f na intervalu $[1, \infty)$,
  $D(f) = H(f^{-1}) = [1, \infty),\ H(f) = D(f^{-1}) = (-\infty, 1]$,

  $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x}$ k funkci f na intervalu $(-\infty, 1]$,
  $D(f) = H(f^{-1}) = (-\infty, 1],\ H(f) = D(f^{-1}) = (-\infty, 1])$.

Příklad 10. Na příkladech konkrétních funkcí ukažte základní transformace grafů (skládání funkcí). Načrtněte grafy následujících funkcí: $f(x)$, $f(x)+1$, $f(x)-1$, $2f(x)$, $\frac{1}{2}f(x)$, $-f(x)$, $f(x-1)$, $f(x+1)$, $f(2x)$, $f\left(\frac{x}{2}\right)$, $f(-x)$, $|f(x)|$, $f(|x|)$ (případně jejich kombinace).