Cvičení 5

Příklad 1. Určete definiční obor funkcí zadaných předpisy $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ a $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$. V bodech, kde nejsou tyto funkce definovány, je dodefinujte tak, aby byly spojité.

Příklad 2. Podle definice spočítejte derivaci funkce zadané předpisem $f(x) = x^4$ a určete obor platnosti.

Příklad 3. Dokažte, že funkce definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

je v bodě nula spojitá, ale nemá v tomto bodě derivaci.

Příklad 4. Spočtěte derivaci v bodě nula u následujících funkcí:

- $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad(\infty)$,
- $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ $\quad$ (neexistuje).

Příklad 5. Spočtěte derivaci (derivace vyšších řádů) funkce f a určete obor platnosti:

- $f(x) = \sin \pi \cos x + \sin x \cos \dfrac{\pi}{2} \quad (0 \quad \text{pro } x \in \mathbb{R})$,
- $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}} \quad \left(\dfrac{-3}{2x^2\sqrt{x}} \quad \text{pro } x > 0 \right)$,
- $f(x) = x(\sin x + \ln x) \quad (\sin x + x \cos x + \ln x + 1 \quad \text{pro } x > 0)$,
- $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x^2} \quad \left(e^{\operatorname{arctg} x^2} \dfrac{2x}{1 + x^4} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R} \right)$,
- $f(x) = \sqrt{1-x} \arccos \sqrt{x} \quad \left(\dfrac{-1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{\arccos \sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}} \quad \text{pro } x \in (0,1) \right)$,
- $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{8} \ln \dfrac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \dfrac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{2}x}{1 - x^2} \quad \left(\dfrac{1}{1 + x^4} \quad \text{pro } x \neq \pm 1 \right)$,
- $f(x) = \arcsin \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} \quad \left(\begin{cases} -\frac{2}{1+x^2} & \text{pro } x > 0, \\ \frac{2}{1+x^2} & \text{pro } x < 0. \end{cases} \right)$

Příklad 6. Spočtěte diferenciál funkce f zadané předpisem $f(x) = x^2 + x + 1$. $(\Delta f(x,h) = (2x+1)h)$

Příklad 7. Pomocí diferenciálu spočtěte přibližnou hodnotu $\sqrt{16,06}$.
Řešení: Označíme-li $f(x) = \sqrt{x}$, je $\Delta f(x,h) = \frac{h}{2\sqrt{x}}$. Potom $f(x+h) \approx f(x) + \Delta f(x,h)$, nebo-li $\sqrt{16,06} \approx \sqrt{16} + \frac{0,06}{2\sqrt{16}} = 4,0075$.