Cvičení 7

Příklad 1. Dokažte, že funkce $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ ($c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$) splňuje rovnici $y'' + y = 0$.

Příklad 2. Zderivujte podle x funkci zadanou parametricky rovnicemi: $x = \arcsin \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ a $y = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ pro $t \in (-\infty, \infty)$. $\left(\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sgn} t,\ t \neq 0\right)$

Příklad 3. Spočtěte druhou derivaci (podle x) funkce zadané parametricky rovnicemi: $x = a \cos t$ a $y = b \sin t$ pro $t \in (0, \pi)$. $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-b}{a^2 \sin^3 t}\right)$

Příklad 4. Najděte bod, v němž je tečna k parabole $y = x^2$ rovnoběžná s tětivou vedenou zadanými body a napište rovnici této tečny.

- $[-1, 1]$ a $[3, 9]$ $\quad$ $([1, 1],\ y = 2x - 1)$,
- $[-3, 9]$ a $[3, 9]$ $\quad$ $([0, 0],\ y = 0)$,
- $[-3, 9]$ a $[1, 1]$ $\quad$ $([-1, 1],\ y = -2x - 1)$.

Příklad 5. Spočtěte pomocí l'Hospitalova pravidla

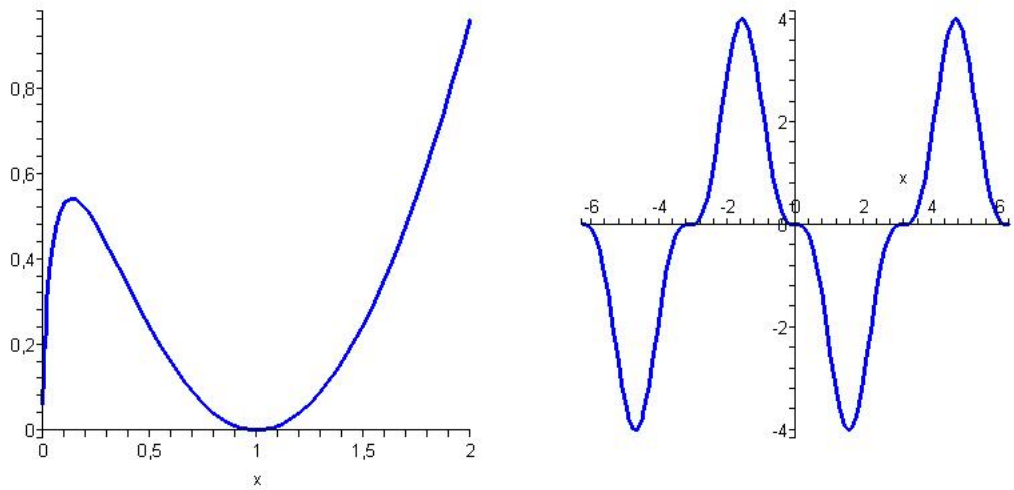
- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^m}{e^x}$ $\quad$ (0),
- $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln x \ln(1-x)$ $\quad$ (0),
- $\lim\limits_{x\to 1} (1-x) \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$ $\quad$ $\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$,
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos \dfrac{a}{x}\right)^{x^2}$, $a \neq 0$ $\quad$ $\left(e^{-a^2/2}\right)$,
- $\lim\limits_{x\to 0^+} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$ $\quad$ (1),
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{cotg} x - \dfrac{1}{x}$ $\quad$ (0).

Příklad 6. Najděte absolutní extrémy funkcí

- $f(x) = x \ln^2 x$ $\quad$ (abs. minimum v bodě $x = 1$, abs. maximum neexistuje),

- $f(x) = \sin(3x) - 3\sin(x)$
  (abs. min. v bodech $x = (4l+1)k\pi/2$, abs. max. v bodech $x = (4l+3)k\pi/2,\ l \in \mathbb{Z}$),
  Nápověda: $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$.
- $f(x) = x^3\sqrt[3]{(x-1)^2}$ v intervalu $[-2, 2]$
  (abs. minimum v bodech $x = -2$, abs. maximum v bodech $x = 2$),
- $f(x) = x^3\sqrt[3]{(x-1)^2}$ v intervalu $(-2, 2)$ (neexistují).

Obrázek 1:
$x\ln^2 x$, $\sin(3x) - 3\sin(x)$.



Obrázek 2: $x^3\sqrt[3]{(x-1)^2}$.