Technická univerzita v Liberci

FP KMD

Matematika 1 a 2

Václav Finěk

 Vaclav.Finek@tul.cz

16. října 2024

Obsah

Celá obrazovka
Začátek
Strana 3
Vyhledávání
◀ ▶
Zpět Vpřed
Zavřít
Ukončit

KAPITOLA 1

Základní pojmy

Cílem této kapitoly je vysvětlit význam základních pojmů a také krátce zopakovat vybrané partie středoškolské matematiky. Tato kapitola má pouze informativní charakter, a proto nebudeme postupovat přísně axiomaticky.

1. Množiny a číselné množiny

Množinou budeme rozumět soubor určitých objektů, kterým budeme říkat **prvky**. Množina je svými prvky určena jednoznačně. Poznamenejme, že se nejedná o přesnou definici pojmu množina, ale jen o její intuitivní vymezení.

Jestliže x je prvkem množiny M (píšeme $x \in M$). Jestliže x není prvkem množiny M (píšeme $x \notin M$). Množinu můžeme určit buď výčtem jejích prvků nebo obecným zápisem pomocí její charakteristické vlastnosti.

Příklad 1.1

$$M = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\} \qquad \textit{nebo} \qquad N = \{x \in M;\ x < 5\} = \{1, 2, 3\} \qquad \heartsuit$$

Množina se nazývá **konečná**, jestliže má konečný počet prvků. V opačném případě se nazývá **nekonečná**. Množina neobsahující žádný prvek se nazývá **prázdná** a značí se $\emptyset$.

Množina A se nazývá **podmnožina** množiny B, když každý prvek množiny A patří i do množiny B (píšeme $A \subset B$). Rovnost množin (píšeme $A = B$) nastává, když $A \subseteq B$ a zároveň $B \subseteq A$.

Sjednocením množin A, B se rozumí množina $C = \{x; x \in A$ nebo $x \in B\}$ (píšeme $C = A \cup B$). **Průnikem** množin A, B se rozumí množina $D = \{x; x \in A$ a $x \in B\}$ (píšeme $D = A \cap B$). **Rozdílem** množin A, B se rozumí množina $E = \{x; x \in A$ a $x \notin B\}$ (píšeme $E = A - B$).

Číselné množiny

- přirozená čísla $\mathbb{N}$,
- celá čísla $\mathbb{Z}$,
- racionální čísla $\mathbb{Q}$,
- reálná čísla $\mathbb{R}$,
- komplexní čísla $\mathbb{C}$.

Mezi číselnými množinami platí následující vztahy:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Nyní tyto číselné množiny popíšeme podrobněji.

Přirozená čísla: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

Celá čísla: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Racionální čísla $\mathbb{Q}$ dostaneme rozšířením oboru celých čísel o zlomky, tj. o čísla ve tvaru $\dfrac{p}{q}$, kde p, g jsou celá čísla a $q \neq 0$. Přitom $\dfrac{p}{q} = \dfrac{p'}{g'}$ právě tehdy, je-li $pq' = p'q$.

Reálná čísla $\mathbb{R}$: Uspořádání racionálních čísel je husté (tj. mezi každými dvěma různými racionálními čísly leží nekonečně mnoho racionálních čísel), ale má mezery (např. $\sqrt{2}$ a π nejsou racionální čísla, ale tzv. **iracionální čísla**.) Vyplněním těchto mezer novými (iracionálními) čísly rozšiřujeme obor racionálních čísel a dostáváme tak čísla reálná.

Rozšíření množiny reálných čísel o ∞ (plus nekonečno) a $-\infty$ (mínus nekonečno), pro které platí:

$$-\infty < x < \infty \qquad\qquad \text{pro } \forall x \in \mathbb{R}$$

budeme nazývat rozšířenou reálnou osou. Tuto novou množinu budeme označovat $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$. Algebraické operace s nekonečny budeme definovat následujícím způsobem:

- $\pm\infty + x = \pm\infty \quad \text{pro } \forall x \in \mathbb{R}$,
- $|\pm\infty| = \infty$,
- $\infty + \infty = \infty \quad (-\infty - \infty = -\infty)$,
- $x \times \pm\infty = \pm\infty \quad \left(\dfrac{\pm\infty}{x} = \pm\infty\right) \quad \text{pro } x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$,
- $x \times \pm\infty = \mp\infty \quad \left(\dfrac{\pm\infty}{x} = \mp\infty\right) \quad \text{pro } x < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$,

Celá obrazovka
Začátek
Strana 9
Vyhledávání
◀ ▶
Zpět Vpřed
Zavřít
Ukončit

- $\dfrac{x}{\pm\infty} = 0 \quad$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$.

Připomeňme, že dělení libovolného čísla (včetně $\pm\infty$) nulou není definovaná operace. Kromě toho **nelze definovat následující operace s nekonečny:**

- $\infty - \infty$,
- $0 \times \infty$ a $0 \times -\infty$,
- $\dfrac{\infty}{-\infty}, \ \dfrac{\infty}{\infty}, \ \dfrac{\infty}{-\infty}, \ \dfrac{-\infty}{-\infty}$.

Ze střední školy známe zobrazování reálných čísel na **číselné ose**. Každému reálnému číslu odpovídá právě jeden bod číselné osy a naopak, každému bodu číselné osy odpovídá právě jedno reálné číslo. Pro jednoduchost vyjadřování se často nerozlišuje mezi číslem a jeho obrazem na číselné ose. **Interval** je podmnožina množiny reálných čísel, která se na číselné ose zobrazí jako úsečka, polopřímka nebo přímka. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ potom rozlišujeme následující typy intervalů

- **omezené** (znázorněné úsečkami)

  uzavřené $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$,

  polouzavřené

  $$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\} \quad \text{nebo} \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\},$$

  otevřené $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$,

- **neomezené** (znázorněné polopřímkami nebo přímkami)

  polouzavřené např. $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\}$,

  otevřené např. $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}$, $(-\infty, \infty) = \{x \in \mathbb{R}\}$.

Příklad 1.2 *Je-li A podmnožina množiny reálných čísel, pro niž* $0 \le x \le 10$ (*tj. A je interval* $[0, 10]$) *a je-li podobně* $B = [5, 15]$ *a* $C = [1, 4]$. *Pak*

$$A \cup B = [0, 15], \qquad A \cap B = [5, 10], \qquad A - B = [0, 5),$$

$$B - A = (10, 15], \qquad C \subset A \qquad a \qquad B \cap C = \emptyset. \qquad \heartsuit$$

Každé dva prvky z množiny reálných čísel lze porovnat podle jejich velikosti a příslušný vztah zapsat jako **rovnost** nebo **nerovnost**. **Uspořádání** na množině reálných čísel lze zavést pomocí těchto axiómů:

- U1: Pro každou dvojici čísel a, b platí právě jeden ze vztahů: $a > b$, $a < b$, $a = b$.
- U2: Když $a < b$ a $b < c$, pak $a < c$.
- U3: Když $a < b$, pak $a + c < b + c$ pro libovolné reálné číslo c.
- U4: Když $a < b$ a $0 < c$, pak $ac < bc$.

Reálná čísla větší než nula nazýváme **kladnými čísly**, reálná čísla menší než nula nazýváme **zápornými čísly**. Reálná čísla, která jsou větší nebo rovna nule (píšeme $\geq$) nazýváme **nezápornými čísly** a konečně reálná čísla, která jsou menší nebo rovna nule (píšeme $\leq$) nazýváme **nekladnými čísly**.

Příklad 1.3 *V množině reálných čísel řešme nerovnici*

$$(x + 2)(2x - 5)(x - 4) \geq 0.$$

Levá strana nerovnice je součin tří činitelů. Má-li být tento součin nezáporný musí být buď všichni činitelé nezápornými čísly, nebo jeden z nich nezáporným číslem a zbylé dva nekladnými čísly. Nejprve najdeme nulové body jednotlivých činitelů:

$$x = -2; \;\; 2,5; \;\; 4.$$

Je-li $x \geq 4$ jsou všichni tři činitelé nezáporní a je-li $-2 \leq x \leq 2,5$, je první činitel nezáporný a zbylé dva nekladné. Řešení dané nerovnice tedy tvoří všechna reálná čísla $x \in [-2; 2,5] \cup [4; \infty)$. ♡

Absolutní hodnota reálného čísla a je definována takto:

$$|a| = a \quad \text{pro } a \geq 0, \qquad |a| = -a \quad \text{pro } a < 0.$$

To je ve shodě s geometrickou interpretací – totiž že absolutní hodnota čísla je rovna jeho vzdálenosti od počátku číselné osy (od nuly). Nechť $x, y \in \mathbb{R}$ pak $|x - y|$ bude představovat **vzdálenost** dvou reálných čísel.

Příklad 1.4 *Na množině reálných čísel řešme nerovnici*

$$|x - a| \leq \varepsilon \quad (\varepsilon > 0; a, \varepsilon \in \mathbb{R}.)$$

V případě, že $x \geq a$, máme podle definice absolutní hodnoty $x - a \leq \varepsilon$, nebo-li $x \leq a + \varepsilon$. Je-li naopak $x < a$, je $x - a < 0$ a tedy podle definice absolutní hodnoty $|x - a| = -x + a \leq \varepsilon$. Po vynásobení nerovnosti mínus jedničkou dostaneme $x - a \geq -\varepsilon$, nebo-li $a - \varepsilon \leq x$. Celkem tedy máme

$$|x - a| \leq \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon. \quad ♡$$

Číselná množina se nazývá **shora omezená**, jestliže existuje takové číslo $h \in \mathbb{R}$, že pro $\forall x \in M$ platí $x \leq h$. Číslo h nazýváme **horní mez (závora)** množiny M. Číselná množina se nazývá **zdola omezená**, jestliže existuje takové číslo $d \in \mathbb{R}$, že pro $\forall x \in M$ platí $x \geq d$. Číslo d nazýváme **dolní mez (závora)** množiny M. Číselná množina M se nazývá **omezená**, když je omezená shora i zdola.

Číslo $s \in \mathbb{R}^*$ nazýváme **supremum** množiny M, jestliže s je nejmenší horní mez množiny M, a píšeme $s = \sup M$. Číslo $i \in \mathbb{R}^*$ nazýváme **infimum** množiny M, jestliže i je největší dolní mez množiny M, a píšeme $i = \inf M$. V případě, že supremum s (infimum i) navíc patří do množiny M, pak ho nazýváme **maximum (minimum)** množiny M a píšeme $s = \max M$ ($i = \min M$.)

Příklad 1.5 *Je-li A podmnožina množiny reálných čísel, pro niž $0 \leq x < 10$ a je-li podobně $B = (5, 15]$. Pak* $\sup A = 10$, $\inf A = 0$, $\min A = 0$ *a maximum množiny A neexistuje. Podobně pro množinu B :* $\sup B = 15$, $\inf B = 5$, $\max B = 15$ *a minimum množiny B neexistuje.* ♡

Příklad 1.6 *Rozmyslete si, že* $\inf \mathbb{N} = \min \mathbb{N} = 1$, $\sup \mathbb{N} = \infty$ *(v $\mathbb{R}^*$),* $\max \mathbb{N}$ *neexistuje.* ♡

Zbývá zodpovědět otázku, kdy supremum (resp. infimum) množiny čísel existuje:

Věta 1.7 **(O supremu a infimu.)** *Pro každou neprázdnou shora omezenou množinu reálných čísel existuje její supremum $s \in \mathbb{R}$. Pro každou neprázdnou zdola omezenou množinu reálných čísel existuje její infimum $i \in \mathbb{R}$. A nakonec pro každou množinu reálných čísel existuje její supremum $s \in \mathbb{R}^*$ a infimum $i \in \mathbb{R}^*$.*

Podstatná je okolnost, že předpoklady i tvrzení věty se týkají množiny reálných čísel. Např. pro racionální čísla tato věta neplatí!

Poznámka 1.8 *Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^*$. Potom platí:*

- *Jestliže existuje* $\max M$, *potom* $\sup M = \max M$.
- *Jestliže existuje* $\min M$, *potom* $\inf M = \min M$.

Komplexní čísla $\mathbb{C}$ jsou čísla ve (tzv. kartézském) tvaru $z = a + \mathrm{i}b$, kde a, b jsou reálná čísla, i je imaginární jednotka ($\mathrm{i}^2 = -1$). Číslo a se nazývá reálná část a číslo b imaginární část komplexního čísla z. Komplexní číslo $z = a + \mathrm{i}b$, nazýváme

- **reálným**, jestliže $b = 0$,
- **imaginárním**, jestliže $b \neq 0$,
- **ryze imaginárním**, jestliže $a = 0,\ b \neq 0$.

Komplexní čísla můžeme geometricky znázorňovat jako body euklidovské roviny a to tak, že komplexnímu číslu $z = a + \mathrm{i}b$ přiřadíme bod $[a, b]$. Euklidovskou rovinu v tomto případě nazýváme **Gaussovou rovinou**. Pomocí **polárních souřadnic** bodu $[a, b]$ dostaneme komplexní číslo $z = a + \mathrm{i}b$ v goniometrickém (polárním) tvaru:

$$z = a + \mathrm{i}b = |z|\frac{a}{|z|} + \mathrm{i}|z|\frac{b}{|z|} = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),$$

kde $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ je **absolutní hodnota komplexního čísla** z a $\varphi \in [0, 2\pi)$ splňující $\cos\varphi = \dfrac{a}{|z|}$, a $\sin\varphi = \dfrac{b}{|z|}$ je **argument komplexního čísla** z a značí se $\arg z$. Argument budeme většinou udávat v obloukové míře. Zápis komplexního čísla z v goniometrickém tvaru je zvlášť výhodný, chceme-li vypočítat číslo z^n ($n \in \mathbb{N}$) nebo chceme-li nalézt všechna komplexní čísla x, pro která platí $x^n = z$ ($n \in \mathbb{N}$). V těchto případech použijeme tzv. Moivreovu větu.

Věta 1.9 (**Moivreova.**) *Pro $z \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)),$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \quad \textit{pro } k \in 0, 1, \ldots, n-1.$$

Je zřejmé, že všechny n-té odmocniny mají stejnou absolutní hodnotu $\sqrt[n]{|z|}$ a jejich argumenty se liší o násobek čísla $\dfrac{2k\pi}{n}$ – tedy n-té odmocniny jsou vrcholy n-úhelníka vepsaného do kružnice se středem v počátku a poloměrem $\sqrt[n]{|z|}$.

Příklad 1.10 *Vypočtěme:* $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$.
Postupně spočteme

$$|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\varphi, \quad \varphi = \arg z = \frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi+8k\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi+8k\pi}{16}\right) \quad \textit{pro } k \in 0,1,2,3. \quad \heartsuit$$

2. Matematická logika

Každá vědní disciplína si v návaznosti na živý jazyk vytváří svůj specifický jazyk – speciální symboly, pojmy neužívané živým jazykem, zvláštní pravidla pro tvorbu vět. Také matematika si vytváří vlastní matematický jazyk. K nejdůležitějším zvláštnostem významového charakteru patří vytváření výroků a rozlišení symbolů na konstanty a proměnné.

Výrokem nazýváme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že je pravdivé, nebo že je nepravdivé.

Negací výroku A „$\neg A$“ nazýváme výrok definovaný takto: Výrok $\neg A$ je pravdivý, je-li výrok A nepravdivý, a naopak.

Příklad 1.11

$$A : 5 \le 3 \quad \textit{A je nepravdivý výrok. Jeho negace je:} \quad \neg A : 5 > 3. \quad \heartsuit$$

Celá obrazovka
Začátek
Strana 15
Vyhledávání
◀ ▶
Zpět Vpřed
Zavřít
Ukončit

Jsou-li A, B výroky, potom z nich můžeme vytvářet nové výroky. Ukažme nejprve **implikaci** $A \Rightarrow B$. Jestliže z pravdivosti výroku A plyne pravdivost výroku B, můžeme říci

- buď „výrok A implikuje výrok B",
- nebo „z A plyne B",
- nebo „platí-li A, pak platí B",
- nebo „B je nutná podmínka pro A",
- anebo „A je postačující podmínka pro B".

Je-li výrok A nepravdivý, pak implikaci $A \Rightarrow B$ pokládáme za pravdivou, ať je výrok B pravdivý nebo nepravdivý. V implikaci $A \Rightarrow B$ se A nazývá předpoklad a B závěr.

Příklad 1.12 *Posuďte pravdivost následujících implikací:*
„Je-li číslo 7 *dělitelné* 2*, pak je sudé." je* **pravdivý výrok** *(neplatí předpoklad).*
„Je-li číslo 6 *dělitelné* 2*, pak je sudé." je* **pravdivý výrok***.*
„Je-li číslo 7 *dělitelné* 2*, pak je liché." je* **pravdivý výrok** *(neplatí předpoklad).*
„Je-li číslo 6 *dělitelné* 2*, pak je liché." je* **nepravdivý výrok***.* ♡

Dalším složeným výrokem je **ekvivalence** $A \Leftrightarrow B$. Jestliže výroky A a B jsou buď zároveň pravdivé, nebo zároveň nepravdivé, můžeme říci

- buď „výrok A je ekvivalentní s výrokem B",
- nebo „A platí tehdy a jen tehdy, platí-li B",
- nebo „A platí právě tehdy, platí-li B",

- anebo „A je nutná a postačující podmínka pro B“.

Např. „Celé číslo x je dělitelné dvěma tehdy a jen tehdy, je-li sudé“.

Poznámka 1.13 *Ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ je pravdivá právě tehdy, když zároveň platí následující dvě implikace $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$.*

Poznámka 1.14 *Výrok $A \Rightarrow B$ je ekvivalentní s výrokem $\neg B \Rightarrow \neg A$.*

Další výroky utvořené z výroků A, B jsou **konjunkce** a **disjunkce**. Konjunkcí výroků (píšeme $A \wedge B$ nebo $A \& B$) rozumíme výrok, který je pravdivý, právě když oba výroky A, B jsou pravdivé. Disjunkce výroků A, B (píšeme $A \vee B$) je výrok pravdivý právě tehdy, platí-li alespoň jeden z výroků A, B.

Příklad 1.15 *„Číslo* 15 *je dělitelné* 3 *a číslo* 15 *je dělitelné* 5.*“ je konjunkce. „Číslo* 15 *je dělitelné* 3 *nebo číslo* 15 *je dělitelné* 4.*“ je disjunkce.* ♡

Jestliže pravdivému výroku přiřadíme číslo 1 a nepravdivému výroku číslo 0, potom negaci, implikaci, ekvivalenci, konjunkci a disjunkci můžeme definovat také pomocí **tabulky pravdivostních hodnot** (tabulka 1.1). Symboly $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\wedge$, $\vee$ nazýváme **logickými spojkami**.

Tabulka 1.1: Tabulka pravdivostních hodnot

$p(A)$	$p(B)$	$p(\neg A)$	$p(A \Rightarrow B)$	$p(A \Leftrightarrow B)$	$p(A \wedge B)$	$p(A \vee B)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	0

Příklad 1.16 *Dokažme následující ekvivalenci* $\neg(A \Rightarrow B) \iff (A \wedge \neg B)$.

Nejprve vyplníme první dva sloupce tabulky pravdivostních hodnot čtyřmi možnými kombinacemi pravdivostních hodnot výrokových proměnných. V dalším kroku za pomoci tabulky pravdivostních hodnot (tabulka 1.1) postupně určíme pravdivostní hodnoty výrokových funkcí $A \Rightarrow B$, $\neg(A \Rightarrow B)$, $\neg B$, $A \wedge \neg B$ *a nakonec* $\neg(A \Rightarrow B) \iff (A \wedge \neg B)$ *(tu budeme krátce označovat* C*). Z posledního sloupce tabulky 1.2 plyne, že pro libovolnou kombinaci pravdivostních hodnot výrokových proměnných, je ekvivalence* $\neg(A \Rightarrow B) \iff (A \wedge \neg B)$ *pravdivý výrok (nebo-li tautologie).* ♡

Tabulka 1.2:

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \Rightarrow B)$	$p(\neg(A \Rightarrow B))$	$p(\neg B)$	$p(A \wedge \neg B)$	$p(C)$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1

V matematice se často setkáváme s výrazy, které obsahují **proměnné**, za něž můžeme dosazovat prvky z dané množiny. Tuto množinu nazýváme **oborem** příslušných proměnných (např. výraz $x^2+1 \geq 2x$ s oborem proměnné $x \in \mathbb{R}$). Jestliže po dosazení libovolných prvků z oboru proměnných za tyto proměnné vznikne vždy výrok, nazýváme takové výrazy **výrokovými formami** (též výrokovými funkcemi nebo formulemi). Je-li $A(x)$ výroková forma s proměnnou $x \in M$, pak její kvantifikací vzniknou například následující výroky:

$$\forall x \in M \quad A(x), \qquad\qquad \exists x \in M \quad A(x).$$

Čteme „pro každý prvek x z oboru proměnných M platí $A(x)$“, resp. „v oboru proměnné M existuje prvek x takový, že platí $A(x)$“. Symbol $\forall$ je **obecný** nebo-li **velký kvantifikátor** a symbol $\exists$ je **existenční** nebo-li **malý kvantifikátor**. Posledním kvantifikátorem je **kvantifikátor jednoznačné existence** $\exists!\, x\ \ldots$ (čteme „existuje právě jedno $x\ \ldots$“).

Poznámka 1.17 *Je-li $A(x_1, x_2)$ výroková forma, pak platí ekvivalence:*

$$\neg(\forall x_1, x_2 \quad (x_1 \in M_1, x_2 \in M_2) \quad A(x_1, x_2))$$
$$\iff \quad \exists x_1, x_2 \quad (x_1 \in M_1, x_2 \in M_2) \quad \neg A(x_1, x_2).$$

Příklad 1.18 *Pro výrokovou formu s oborem proměnných, tvořeným všemi reálnými čísly, je výrok*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 \geq 2x$$

pravdivý, protože $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$. A jeho negace je následující:

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 < 2x. \quad \heartsuit$$

3. Logická výstavba matematiky - axiómy, definice, věty a důkazy

Jedním z hlavních rysů soudobé matematiky je axiomatická logická výstavba matematických teorií. Jejím základem jsou **axiómy** (postuláty) – výchozí matematické výroky, které se prohlásí za pravdivé bez dokazování. Obsahují základní (primitivní) pojmy, které se nedefinují, ale pokládají se za zavedené (plně charakterizované) právě soustavou axiómů. Tato soustava musí mít tyto vlastnosti:

- **bezespornost** - ze soustavy axiómů nelze odvodit výrok a zároveň negaci tohoto výroku,
- **úplnost** - ze soustavy axiómů je možné odvodit pravdivost, nebo nepravdivost libovolného výroku (který není axiómem) budované teorie,
- **nezávislost** - libovolný axióm soustavy nelze odvodit z ostatních axiómů.

Další matematické pojmy se zavádějí pomocí **definic**. Definice stanoví název zaváděného pojmu a vymezí charakteristické vlastnosti nového pojmu prostřednictvím pojmů primitivních nebo dříve definovaných.

Své výsledky formuluje matematická teorie ve **větách**. Matematická věta (poučka, teorém) je pravdivý matematický výrok, který lze odvodit pomocí logiky na základě axiómů, definic a dříve dokázaných vět. Pro pomocné věty se používá název **lemma**.

Většina matematických vět má tvar obecného výroku $\forall x \in M \quad V(x)$ (obecná věta), anebo existenčního výroku $\exists x \in M \quad V(x)$ (existenční věta). Pro obecnou větu ve tvaru implikace

$$\forall x \in M \quad A(x) \Rightarrow B(x)$$

se výroková forma $A(x)$ nazývá předpoklad věty a výroková forma $B(x)$ závěr nebo tvrzení věty. Protože věta představuje platný (pravdivý) výrok, a tedy implikace $A(x) \Rightarrow B(x)$ musí platit pro každé $x \in M$, je platnost předpokladu $A(x)$ postačující podmínkou pro platnost závěru $B(x)$ a platnost závěru $B(x)$ nutnou podmínkou pro platnost předpokladu $A(x)$ pro každé $x \in M$.

Příklad 1.19 *Za primitivní pojmy považujeme „bod“, „přímka“ a vztahy „bod leží na přímce“, „body jsou různé“. Dále vybereme tyto axiómy:*

- *Axióm 1: Ke každým dvěma různým bodům P, Q existuje právě jedna přímka tak, že P, Q na ní leží.*
- *Axióm 2: Existuje aspoň jedna přímka.*
- *Axióm 3: Každá přímka obsahuje alespoň tři různé body.*
- *Axióm 4: Všechny body neleží na téže přímce.*

Nyní budeme definovat pojem kolineárnosti. Dále vyslovíme a dokážeme větu, že ne všechny body jsou kolineární.
Definice: *Tři body se nazývají* **kolineární***, jestliže existuje taková přímka, že na ní leží všechny tři body.*
Věta: *Existují tři body, které neleží na téže přímce.*
Důkaz:

- *Podle axiómu 2 existuje alespoň jedna přímka p,*
- *podle axiómu 3 přímka obsahuje tři různé body, např. A, B, C,*
- *podle axiómu 4 existuje bod D, který neleží na přímce p.*
- *podle axiómu 1 existuje právě jedna přímka q, na níž leží body A, D.*
- *Přímka q je však různá od p, a tedy body A, B, D neleží na téže přímce.*

♡

Matematické věty se dokazují, tj. ověřuje se, že představují pravdivé výroky, nebo-li že věta platí. Důkazem matematické věty nazýváme logický proces, kterým ověřujeme její platnost pomocí axiómů, definic a dříve dokázaných vět na základě logických zákonitostí. Rozlišujeme tyto základní typy důkazů:

Přímý důkaz implikace $p \Rightarrow q$ spočívá v tom, že sestavíme řetězec pravdivých implikací

$$p \Rightarrow p_1, \quad p_1 \Rightarrow p_2, \ldots, p_{n-1} \Rightarrow p_n, \quad p_n \Rightarrow q,$$

z čehož plyne platnost dokazované implikace.

Příklad 1.20 *Dokažme větu: Jestliže celé číslo a není dělitelné 3, pak číslo $a^2 - 1$ je dělitelné 3 ($p \Rightarrow q$).*
Důkaz*: Ze tří po sobě jdoucích celých čísel $a-1$, a, $a+1$ je vždy právě jedno dělitelné třemi. Podle předpokladu není celé číslo a dělitelné 3. Tedy buď číslo $a-1$ nebo $a+1$ je dělitelné 3 ($p \Rightarrow p_1$). Pak také číslo $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$ je dělitelné třemi ($p_1 \Rightarrow q$).* ♡

Nepřímý důkaz implikace $p \Rightarrow q$ spočívá v přímém důkazu její obměny $\neg q \Rightarrow \neg p$, která je s ní ekvivalentní (viz. poznámka 1.14).

Příklad 1.21 *Dokažme tvrzení: $\forall n \in \mathbb{N} : n^2$ je sudé $\Rightarrow n$ je sudé.*
Nepřímý důkaz *provedeme jako přímý důkaz obměny dokazovaného tvrzení:*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \neg(n \text{ je sudé}) \Rightarrow \neg(n^2 \text{ je sudé})$$

nebo-li

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \text{ je liché} \Rightarrow n^2 \text{ je liché}.$$

Dále postupujeme analogicky jako v předchozím příkladu sestavením řetězce obecných vět ve tvaru implikací $\forall n \in \mathbb{N}$ platí:

$$n \text{ je liché } \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : \; n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^2 \text{ je liché.} \quad \heartsuit$$

Důkaz sporem výroku v vychází z předpokladu platnosti jeho negace $\neg v$. Dále sestavíme řetězec pravdivých implikací

$$\neg v \Rightarrow v_1, \quad v_1 \Rightarrow v_2, \ldots, v_{n-1} \Rightarrow v_n, \quad v_n \Rightarrow z,$$

kde výrok z neplatí (říkáme, že jsme dospěli ke sporu), odtud vyplývá, že neplatí výrok $\neg v$, a tedy platí dokazovaný výrok v.

Příklad 1.22 *Dokažme sporem tvrzení:* $\forall n \in \mathbb{N} : n^2$ *je sudé* $\Rightarrow n$ *je sudé.*
Důkaz sporem *provedeme tak, že předpokládáme platnost jeho negace. Podle příkladu 1.16 je negace implikace:*

$$\exists n \in \mathbb{N} : \; n \textit{ je liché} \wedge n^2 \textit{ je sudé.}$$

Z posledního tvrzení však postupně plyne tento řetězec implikací:

$$n \textit{ je liché} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : \; n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^2 \textit{ je liché.}$$

Tento závěr je však ve sporu s předpokladem, že n^2 *je sudé. Odtud plyne, že neplatí negace dokazované věty, a tedy platí věta sama.* ♡

Důkaz matematickou indukcí se užívá pro obecné věty typu

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \quad V(n),$$

kde $V(n)$ je výroková forma proměnné $n \in \mathbb{N}$, n_0 je dané přirozené číslo (pokud větu dokazujeme pro všechna přirozená n je $n_0 = 1$). Metoda důkazu matematickou indukcí spočívá ve dvou krocích:

- Nejprve dokážeme, že věta platí pro $n = n_0$, (tj. platí $V(n_0)$).
- A potom dokážeme pro každé přirozené číslo $k \geq n_0$: Jestliže platí $V(k)$, pak platí také $V(k+1)$ (tj. platí implikace $V(k) \Rightarrow V(k+1)$). Tomuto kroku se říká **indukční krok** a $V(k)$ se nazývá **indukční předpoklad**.

Příklad 1.23 *Dokažme matematickou indukcí:*

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Důkaz: *Označíme-li* $s_n = 1 + 2 + \cdots + n$, *potom chceme indukcí dokázat, že pro všechna přirozená* n *platí výrok* $V(n): \ s_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1. krok – pro $n = 1$ *rovnost platí, neboť*

$$s_1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1.$$

2. krok – důkaz platnosti implikace $V(n) \Rightarrow V(n+1)$ *pro* $\forall n \in \mathbb{N}$*: Předpokládejme platnost předpokladu* $V(k)$ *pro nějaké* $k \in \mathbb{N}$, *tedy*

$$s_k = 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}. \tag{1.1}$$

Nyní dokážeme platnost $V(k+1)$ *tím, že k rovnici (1.1) přičteme* $k+1$

$$s_{k+1} = s_k + (k+1) = 1 + 2 + \cdots + k + (k+1)$$
$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\frac{k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Tím jsme dokázali i druhý indukční krok a tedy platnost celé věty. ♡

Poznámka 1.24 *Existenční věta* $\exists x \in M \ V(x)$ *se dokazuje buď přímým důkazem (buď se přímo zkonstruuje objekt* x_1 *nebo se existence objektu* x_1 *dokáže bez jeho určení) nebo sporem. Důkazy vět o existenci a jednoznačnosti* $(\exists! x \in M \ V(x))$ *se provádíme tak, že nejprve dokážeme existenci a potom obvykle sporem jednoznačnost (z předpokladu existence dvou různých* $x_1, x_2 \in M$, *pro která platí* $V(x_1)$, $V(x_2)$, *se odvodí spor).*

4. Relace a zobrazení

Uspořádanou dvojici (a, b) prvků $a, b \in M$ zavádíme tak, že $(a, b) \neq (b, a)$ pro $a \neq b$. Uspořádaná dvojice je tedy množina prvků, u níž záleží na pořadí prvků. **Kartézský součin** $A \times B$ množin A a B je množina všech uspořádaných dvojic (a, b) takových, že $a \in A$ a $b \in B$.

Příklad 1.25 *Máme-li množiny* $A = \{1; 2; 3\}$ *a* $B = \{a; b; c; d\}$, *potom kartézský součin množin* $A \times B$ *je*

$$\{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d), (3, a), (3, b), (3, c), (3, d)\}. \heartsuit$$

Každá podmnožina R kartézského součinu $A \times B$ se nazývá **binární relace** mezi množinami A a B (v tomto pořadí). V případě, že $(x, y) \in R$, říkáme, že prvek x je v binární relaci s prvkem y a píšeme xRy (tedy relace R přiřazuje prvku x prvek y).

Příklad 1.26 *Je-li* $A = \{1; 2; 3\}$ *a* $B = \{a; b; c; d\}$, *potom příkladem relace mezi množinami* A *a* B *je:*

$$f = \{(1, a), (1, b), (1, d), (2, a)(2, c), (2, d), (3, b), (3, c)\} \subset A \times B. \quad \heartsuit$$

Relace f mezi množinami A a B, která má tu vlastnost, že uspořádané dvojice (x_1, y_1) a (x_1, y_2) patří do relace f, právě když $y_1 = y_2$, se nazývá **zobrazení f z množiny A do množiny B**. Místo $(x, y) \in f$, píšeme $y = f(x)$ a říkáme, že zobrazení f přiřazuje prvku x prvek y. Prvek $y = f(x) \in B$ nazýváme **hodnotou zobrazení** f v bodě x nebo **obrazem** prvku x v zobrazení f. Prvek x nazýváme **vzorem** prvku y v zobrazení f. Má-li prvek y právě jeden vzor, pak tento vzor označujeme $f^{-1}(y)$.

Množinu všech prvků $y \in B$, k nimž lze najít alespoň jeden vzor $x \in A$ tak, že $(x, y) \in f$, nazýváme **oborem hodnot zobrazení f** a značíme ho $R(f)$. Množinu všech prvků $x \in A$, k nimž lze najít alespoň jeden obraz $y \in B$ tak, že $(x, y) \in f$, nazýváme **definičním oborem zobrazení f** a značíme ho $D(f)$.

Příklad 1.27 *Vezmeme-li opět množiny $A = \{1; 2; 3\}$ a $B = \{a; b; c; d\}$, potom g definované předpisem $g = \{(1, b), (2, c), (3, b)\}$ je zobrazení z množiny A do množiny B. Potom $D(g) = \{1; 2; 3\}$, a $R(g) = \{b; c\}$.* ♡

Rozlišujeme následující typy zobrazení:

- Jestliže každý prvek $x \in A$ je prvkem některé uspořádané dvojice $(x, y) \in f$, pak se zobrazení f nazývá **zobrazení množiny A do množiny B**.
- Jestliže každý prvek $y \in B$ je prvkem některé uspořádané dvojice $(x, y) \in f$, pak se zobrazení f nazývá **zobrazení z množiny A na množinu B (surjektivní zobrazení)**.
- Zobrazení množiny A do množiny B se nazývá **prosté (injektivní) zobrazení množiny A do množiny B**, právě když pro každé dva různé prvky $x_1, x_2 \in A$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Prosté zobrazení množiny A na množinu B se nazývá **vzájemně jednoznačné (bijektivní) zobrazení mezi množinami A a B**.
- Je-li f prosté zobrazení množiny A do množiny B, pak prosté zobrazení f^{-1} množiny $R(f) \subseteq B$ na množinu A takové, že pro každý prvek $(x, y) \in f$ platí $(y, x) \in f^{-1}$ nazýváme **inverzním zobrazením k zobrazení f**.

Příklad 1.28 *Vezmeme množiny* $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ *a* $B = \{a; b; c; d\}$ *a ukážeme si postupně příklady některých zobrazení.*

- $g = \{(1, b), (2, c), (3, b)\}$ *je zobrazení z množiny* A *do množiny* B.
- $g = \{(1, b), (2, c), (3, b), (4, a), (5, c)\}$ *je zobrazení množiny* A *do množiny* B.
- $g = \{(1, b), (2, c), (3, d), (4, a)\}$ *je zobrazení z množiny* A *na množinu* B.

Vezmeme-li množiny $C = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ *a* $D = \{a; b; c; d; e; f\}$, *potom*

$$g = \{(1, b), (2, c), (3, d), (4, a), (5, f)\}$$

je prosté zobrazení množiny C *do množiny* D *a*

$$g^{-1} = \{(a, 4), (b, 1), (c, 2), (d, 3), (f, 5)\}$$

je inverzní zobrazení k zobrazení g.

Vezmeme-li množiny $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ *a* $F = \{a; b; c; d; e\}$ *potom*

$$g = \{(1, b), (2, c), (3, d), (4, a), (5, e)\}$$

je vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinami A *a* B *a*

$$g^{-1} = \{(a, 4), (b, 1), (c, 2), (d, 3), (e, 5)\}$$

je inverzní zobrazení k zobrazení g. ♡

Především nás bude zajímat zobrazení množiny A do množiny B, kde $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. V tomto případě hovoříme o reálné funkci n reálných proměnných nebo krátce o funkci n proměnných. V příštích kapitolách se převážně budeme věnovat studiu reálné funkce jedné reálné proměnné (tedy případu $n = 1$).

KAPITOLA 2

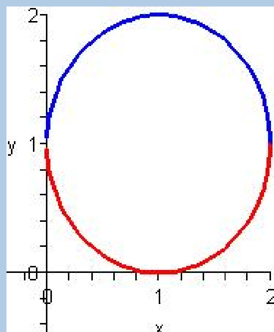
Funkce jedné proměnné

1. Základní pojmy

Definice 2.1 *Říkáme, že na neprázdné množině $M \subseteq \mathbb{R}$ je definována reálná* **funkce***, je-li dán předpis, podle kterého je každému $x \in M$ přiřazeno právě jedno reálné číslo y. x nazýváme* **nezávisle proměnnou (argumentem)***, y* **závisle proměnnou***. Množinu M nazýváme* **definiční obor funkce***. Množinu R všech čísel y, která dostaneme pro všechna $x \in M$, nazýváme* **oborem hodnot** *dané funkce.*

Příklad 2.2 *Obsah y čtverce je funkcí délky x jeho strany, $y = x^2$. Definiční obor je interval $(0, \infty)$, neboť délka strany čtverce je vždy kladné číslo. Obor hodnot je zde rovněž interval $(0, \infty)$.*

Funkce zpravidla značíme písmeny $f, g, \ldots$. Funkční hodnotu y v libovolném bodě $x \in M$ značíme $f(x), g(x), \ldots$. Ve smyslu předchozí kapitoly je funkce zobrazení množiny $M \subseteq \mathbb{R}$ do množiny reálných čísel, resp. množina všech uspořádaných dvojic $[x, f(x)]$, kde $x \in M$ a $f(x)$ je reálné číslo, jednoznačně přiřazené číslu x. Funkční předpis nemusí být vždy dán vzorcem pro výpočet hodnot závislé proměnné, jako tomu bylo v příkladu 2.2. V aplikacích bývá funkce často dána grafem nebo například při provádění měření získáme data pouze ve stanovených časových okamžicích a potom je funkce dána tabulkou naměřených hodnot. Někdy může být funkce zadána také vztahem mezi závislou a nezávislou proměnnou (implicitně), ze kterého je teprve třeba zjistit jednoznačné přiřazení funkční hodnoty y hodnotě závislé proměnné x.



Obrázek 2.1: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

Příklad 2.3 *Z funkce zadané implicitně rovnicí* $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ *snadno vyjádříme* y*. Potom pro* $y \in [1,2]$ *máme funkci danou předpisem* $\mathbf{y = f_1(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}+1}$ *a pro* $y \in [0,1]$ *máme funkci danou předpisem* $\mathbf{y = f_2(x) = -\sqrt{1-(x-1)^2}+1}$ *(viz. obrázek 2.1).* ♡

Celá obrazovka
Začátek
Strana 29
Vyhledávání
◀ ▶
Zpět Vpřed
Zavřít
Ukončit

Je-li funkční předpis dán analyticky, tj. rovnicí $y = f(x)$, pak nejprve hledáme, pro která x má tato rovnice smysl v oboru reálných čísel. Množinu těchto x pak prohlásíme za definiční obor funkce.

Příklad 2.4 *Definiční obor funkce dané předpisem* $y = \sqrt{1-(x-1)^2}+1$ *je interval* $[0,2]$, *protože pro* x *mimo tento interval není* $\sqrt{1-(x-1)^2}$ *reálné číslo. A budeme psát* $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2\}$. ♡

Definice 2.5 *Řekneme, že funkce* f *se* **rovná** *funkci* g, *jestliže* $D(f) = D(g)$ *(mají stejný definiční obor) a* $f(x) = g(x)$ *pro* $\forall x \in D(f)$. *Někdy také říkáme, že funkce* f *a* g *jsou* **totožné**.

Definice 2.6 **Grafem funkce** $y = f(x)$ *rozumíme množinu všech takových bodů* $[x, y]$ *v rovině* xy, *že* $x \in D(f)$ *a* $y = f(x)$.

Definice 2.7 *Nechť funkce* $y = f(x)$ *je definována v intervalu* M_1. *Říkáme, že funkce* f **zobrazí interval M_1 do intervalu M_2**, *jestliže pro každé* $x \in M_1$ *je* $y \in M_2$.

Jestliže navíc ke každému $y \in M_2$ *lze najít alespoň jedno* $x \in M_1$ *takové, že* $y = f(x)$. *Pak říkáme, že funkce* f **zobrazí interval M_1 na interval M_2**.

Příklad 2.8 *Funkce* $y = x^2$ *zobrazí interval* $[-1, 1]$ *na interval* $[0, 1]$. *Nakreslete si graf.* ♡

Definice 2.9 *Nechť funkce* $z = f(x)$ *zobrazí interval* M_1 *do intervalu* M_2, *na němž je definována funkce* $y = g(z)$. *Funkce* $y = g(f(x))$ *se nazývá* **složená funkce** *(z funkcí* $y = g(z)$ *a* $z = f(x)$*).*

Příklad 2.10 *Funkci* $y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ *můžeme rozložit na funkce* $y = \sqrt{z}$ *a* $z = 1 - \sin^2 x$. *Za* M_1 *můžeme vzít maximální možný interval, tedy* $(-\infty, \infty)$, *neboť funkce* $z = 1 - \sin^2 x$ *zobrazí interval* $(-\infty, \infty)$ *na interval* $[0, 1]$, *na němž je definována funkce* $y = \sqrt{z}$. ♡

Definice 2.11 *Nechť je funkce* f *definována v intervalu* J. *Jestliže pro každá dvě čísla* x_1, x_2 *z intervalu* J *splňující nerovnost* $x_1 < x_2$, *platí nerovnost* $f(x_1) < f(x_2)$, *říkáme, že funkce* f *je* **rostoucí** *v intervalu* J. *Jestliže naopak pro každá dvě čísla* x_1, x_2 *z intervalu* J *splňující nerovnost* $x_1 < x_2$, *platí nerovnost* $f(x_1) > f(x_2)$, *říkáme, že funkce* f *je* **klesající** *v intervalu* J.

Smysl této definice je jasný: u funkce rostoucí v J se hodnota funkce zvětší, zvětšíme-li x a u funkce klesající v J se hodnota funkce zmenší, zvětšíme-li x.

Příklad 2.12 *Funkce* $y = x^2$ *je klesající v intervalu* $(-\infty, 0]$ *a rostoucí v intervalu* $[0, \infty)$. *Důkaz: jestliže* $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ *a* $x_1 < x_2 \leq 0$, *potom* x_1 *je v absolutní hodnotě větší než* x_2 *a tedy i* $x_1^2 > x_2^2$ *a funkce je klesající. Jestliže* $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ *a* $0 \leq x_1 < x_2$, *potom* x_2 *je v absolutní hodnotě větší než* x_1 *a tedy i* $x_2^2 > x_1^2$ *a funkce je rostoucí. Viz. graf.* ♡

Definice 2.13 *Nechť je funkce* f *definována v intervalu* J. *Jestliže pro každá dvě čísla* x_1, x_2 *z intervalu* J, *splňující nerovnost* $x_1 < x_2$, *platí nerovnost* $f(x_1) \leq f(x_2)$, *říkáme, že funkce* f *je* **neklesající** *v intervalu* J. *Jestliže naopak pro každá dvě čísla* x_1, x_2 *z intervalu* J, *splňující nerovnost* $x_1 < x_2$, *platí nerovnost* $f(x_1) \geq f(x_2)$, *říkáme, že funkce* f *je* **nerostoucí** *v intervalu* J.

Funkce rostoucí, nerostoucí, klesající a neklesající v intervalu J zahrnujeme společným názvem **funkce monotónní v J**. Každá funkce rostoucí v J je neklesající v J, ale ne naopak (obdobně každá funkce klesající v J je nerostoucí v J). Funkcím rostoucím a klesajícím říkáme **funkce ryze monotónní v J.** Upozorněme, že funkce, která není v J rostoucí, nemusí být nerostoucí v J. Například funkce $y = x^2$ není v intervalu $[-1, 1]$ ani rostoucí, ani klesající, ani nerostoucí a ani neklesající. Viz. příklad 2.12.

Definice 2.14 *Nechť funkce $y = f(x)$ zobrazuje interval M_1 do intervalu M_2. Potom řekneme, že funkce f je* **prostá**, *právě když pro každé dva různé prvky $x_1, x_2 \in M_1$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

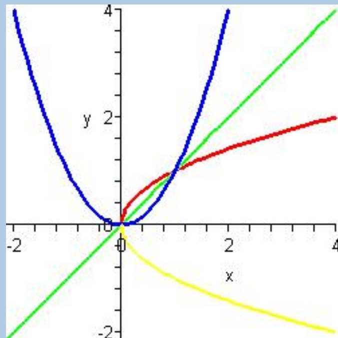
Definice 2.15 *Nechť f je prostá funkce, která zobrazuje interval M_1 na interval M_2. To znamená, že nejen každému $x \in M_1$ je přiřazeno právě jedno $y \in M_2$, ale také každému $y \in M_2$ je přiřazeno právě jedno $x \in M_1$ takové, že $y = f(x)$. Tím, že každému $y \in M_2$ je přiřazeno právě jedno $x \in M_1$, je na intervalu M_2 definována funkce, kterou označíme $x = f^{-1}(y)$. Tato funkce se nazývá* **inverzní funkce** *k funkci f. Naopak, funkce f je inverzní k funkci f^{-1}.*

Poznámka 2.16 *Z definice složené funkce ihned plyne, že složením funkce $z = f(x)$ a funkce k ní inverzní $y = f^{-1}(z)$ (nebo naopak) dostaneme tzv.* **identickou funkci**

$$y = f^{-1}(z) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

Dále se blíže podívejme na graf funkce f a graf funkce f^{-1} k ní inverzní. Je zřejmé, že $[x, y]$ patří do grafu funkce f, právě když $[y, x]$ patří do grafu funkce

f^{-1}. Tedy grafy funkcí f a f^{-1} jsou symetrické podle přímky $y = x$. Viz. například situace na obrázku 2.2.



Obrázek 2.2: $\mathbf{y = x^2}$, $\mathbf{y = f_1^{-1}(x) = -\sqrt{x}}$, $\mathbf{y = f_2^{-1}(x) = \sqrt{x}}$ a $\mathbf{y = x}$

Příklad 2.17 *Hledejme inverzní funkci k funkci $y = x^2$. Nejprve si uvědomme, že nalézt inverzní funkci znamená nalézt předpis pro x z rovnice $y = x^2$. V tomto případě to jde snadno, stačí odmocnit původní předpis a dostaneme $\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x|$. Tedy na intervalu $(-\infty, 0]$ je k funkci $y = f_1(x) = x^2$ inverzní funkce $x = f_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ a na intervalu $[0, \infty)$ je k funkci $y = f_2(x) = x^2$ inverzní funkce $x = f_2^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Při popisu funkční závislosti není podstatné, jakým písmem se značí nezávisle proměnná a jakým závisle proměnná. Nicméně bývá zvykem označovat symbolem x nezávisle proměnnou a symbolem y závisle proměnnou. Potom můžeme náš výsledek přepsat následovně: na intervalu $(-\infty, 0]$ je k funkci $y = f_1(x) = x^2$ inverzní funkce $y = f_1^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ a na intervalu $[0, \infty)$ je k funkci $y = f_2(x) = x^2$*

inverzní funkce $y = f_2^{-1}(x) = \sqrt{x}$. *Viz. obrázek* 2.2. ♡

Pro ryze monotónní funkce platí následující věta:

Věta 2.18 **(O existenci a jednoznačnosti inverzní funkce.)** *Nechť funkce f je ryze monotónní (tedy buď rostoucí nebo klesající) na intervalu I a nechť zobrazuje interval I na interval J. Potom k funkci f existuje právě jedna inverzní funkce f^{-1} zobrazující interval J na interval I. Navíc je-li funkce f rostoucí, je rostoucí i funkce f^{-1} a je-li funkce f klesající, je klesající i funkce f^{-1}.*

Důkaz. Je-li funkce f ryze monotónní, nemůže pro dvě různá čísla z intervalu I nabývat stejné funkční hodnoty. Je tedy prostá a existuje k ní inverzní funkce f^{-1} zobrazující interval J na interval I. Funkce f^{-1} je podle definice inverzní funkce určena jednoznačně (pokud by existovaly dvě takové funkce musely by mít stejný definiční obor a na tomto definičním oboru stejné funkční hodnoty a byly by tedy totožné.)

Je-li funkce f rostoucí, potom pro každá dvě čísla x_1, x_2 z intervalu I splňující nerovnost $x_1 < x_2$, platí nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$. Nyní $f(x_1), f(x_2) \in J$ a $f^{-1}(f(x_1)) = x_1 < x_2 = f^{-1}(f(x_2))$. Tedy funkce f^{-1} je také rostoucí. Obdobně bychom mohli tvrzení věty dokázat i pro klesající funkci. □

Definice 2.19 *Nechť je funkce f definována v neprázdné množině M. Funkce f zobrazuje množinu M na jistou množinu N. Množina N je množina všech hodnot $f(x)$ pro všechna $x \in M$. Je-li množina N shora omezená (tj. existuje číslo K tak, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \le K$), říkáme, že funkce $f(x)$ je* **shora omezená** *v množině M. Číslu* $\sup N$ *říkáme* **supremum funkce f v množině M** *a značíme je* $\sup\limits_{x \in M} f(x)$.

Definice 2.20 *Podobně: Je-li množina N zdola omezená (tj. existuje číslo K tak, že pro všechna $x \in M$. je $f(x) \geq K$), říkáme, že funkce $f(x)$ je* **zdola omezená** *v množině M. Číslu* $\inf N$ *říkáme* **infimum funkce f v množině M** *a značíme je $\inf\limits_{x \in M} f(x)$.*

Definice 2.21 *Je-li f zdola i shora omezená v množině M, říkáme, že f je* **omezená (ohraničená)** *v M.*

Příklad 2.22 *Podle příkladu 2.12 je funkce $f(x) = x^2$ klesající v intervalu $(-\infty, 0]$ a rostoucí v intervalu $[0, \infty)$. Potom je funkce f omezená na intervalu $[-2, 2]$, protože nejprve klesá z bodu -2 $(f(-2) = 4)$ do bodu 0 $(f(0) = 0)$ a potom roste do bodu 2 $(f(2) = 4)$. Tedy na intervalu $[-2, 2]$ platí nerovnost $0 \leq x^2 \leq 4$ a funkce f je zdola omezená 0 a shora omezená 4.* ♡

Definice 2.23 *Řekneme, že funkce f je* **sudá**, *jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí také $-x \in D(f)$ a dále pro každé $x \in D(f)$ platí $f(-x) = f(x)$.*

Příklad 2.24 *Funkce $f(x) = x^2$ je definována na celé reálné ose a platí $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Funkce f je tedy sudá.* ♡

Definice 2.25 *Řekneme, že funkce f je* **lichá**, *jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí také $-x \in D(f)$ a dále pro každé $x \in D(f)$ platí $f(-x) = -f(x)$.*

Příklad 2.26 *Funkce $f(x) = x$ je definována na celé reálné ose a platí $f(-x) = (-x) = -(x) = -f(x)$. Funkce f je tedy lichá.* ♡

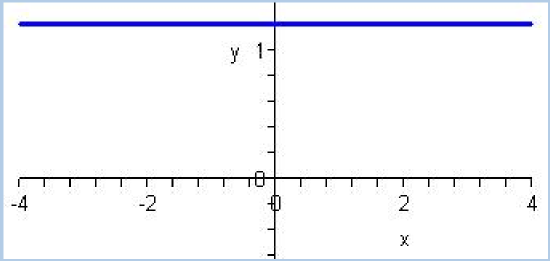
Definice 2.27 *Řekneme, že funkce f je* **periodická s periodou** $p \in \mathbb{R}$ *($p \neq 0$), jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí také $x \pm p \in D(f)$ a dále pro každé $x \in D(f)$ platí $f(x \pm p) = f(x)$.*

2. Elementární funkce

Konstantní funkce:

$$f: \ y = b \qquad b \in \mathbb{R},\ D(f) = \mathbb{R},\ R(f) = b.$$

Konstantní funkce je omezená, nerostoucí a neklesající, není prostá, takže k ní neexistuje inverzní funkce.

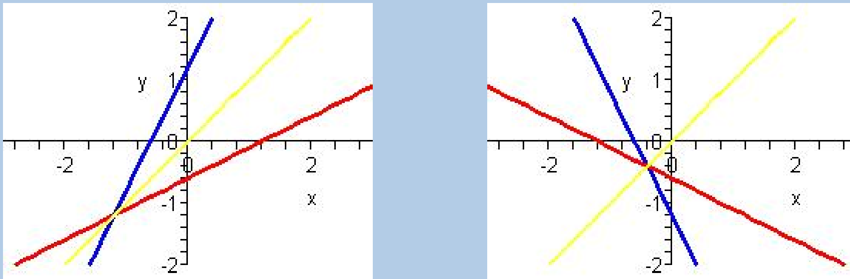


Obrázek 2.3: $\mathbf{y} = \mathbf{b},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}$.

Lineární funkce:

$$f: \ y = ax + b \qquad a, b \in \mathbb{R},\ D(f) = \mathbb{R},\ R(f) = \mathbb{R}.$$

Lineární funkce není ani shora, ani zdola omezená, pro $a \neq 0$ je prostá a tedy k ní existuje inverzní funkce. Pro $a > 0$ je rostoucí a pro $a < 0$ je klesající.



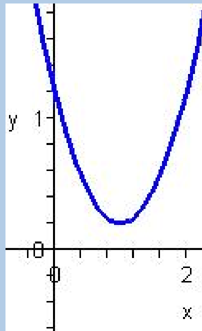
$a > 0$ $\qquad\qquad$ $a < 0$

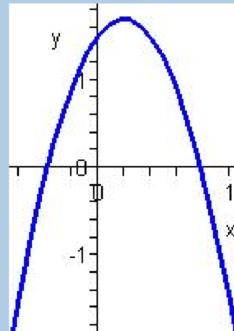
Obrázek 2.4: $\mathbf{f(x) = ax + b}$, $\mathbf{f^{-1}(x) = \dfrac{x - b}{a}}$, $\mathbf{y = x}$.

Kvadratická funkce:

$$f:\ y = ax^2 + bx + c \qquad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ D(f) = \mathbb{R}.$$

$a > 0$	$a < 0$
$R(f) = \left[c - \dfrac{b^2}{4a}, \infty\right)$	$R(f) = \left(-\infty, c - \dfrac{b^2}{4a}\right]$
Je zdola omezená,	Je shora omezená,
není shora omezená,	není zdola omezená,
klesající v $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$,	rostoucí v $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$,
rostoucí v $\left[-\dfrac{b}{2a}, \infty\right)$.	klesající v $\left[-\dfrac{b}{2a}, \infty\right)$.

$a > 0$ 

$a < 0$ 

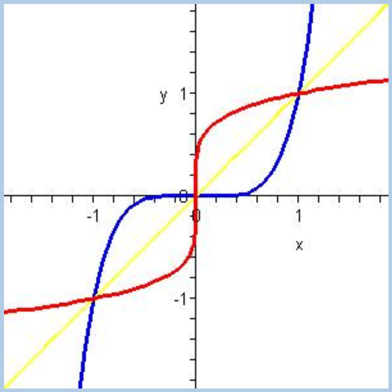
Obrázek 2.5: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Mocninná funkce s přirozeným mocnitelem:

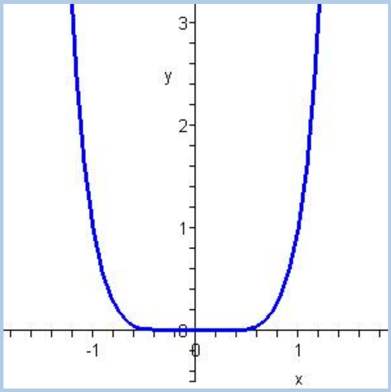
$$f: \ y = x^n \qquad n \in \mathbb{N}, \ D(f) = \mathbb{R}.$$

n je liché	n je sudé
$R(f) = \mathbb{R}$	$R(f) = [0, \infty)$
Není zdola omezená,	Je zdola omezená,
ani shora omezená,	není shora omezená,
rostoucí v $(-\infty, \infty)$,	klesající v $(-\infty, 0]$,
$f^{-1}: \ y = \sqrt[n]{x}$.	rostoucí v $[0, \infty)$.

Speciálně, je-li $n = 1$, je to lineární funkce, pro $n = 2$ kvadratická funkce a pro $n = 3$ kubická funkce.



n je liché



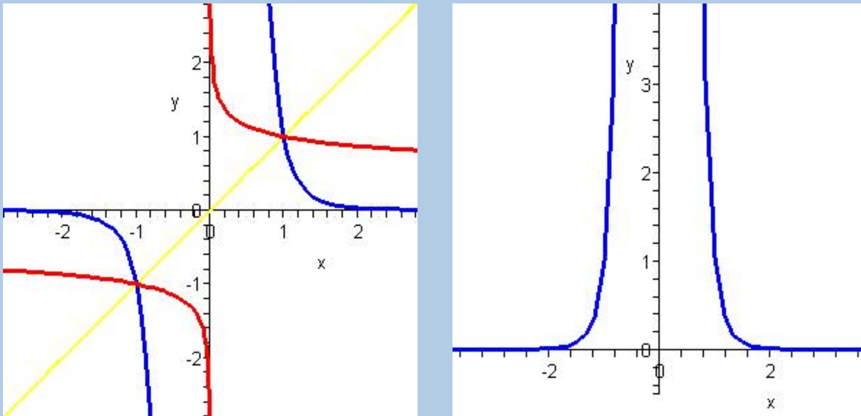
n je sudé

Obrázek 2.6: $f(x) = x^n$, $\mathbf{f^{-1}(x)} = \sqrt[n]{x}$, $\mathbf{y = x}$.

Mocninná funkce se záporným celým mocnitelem:

$$f:\ y = x^{-n} \qquad n \in \mathbb{N},\ D(f) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

n je liché	n je sudé
$R(f) = \mathbb{R} - \{0\}$	$R(f) = (0, \infty)$
Není zdola omezená,	Je zdola omezená,
ani shora omezená,	není shora omezená,
klesající v $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$,	rostoucí v $(-\infty, 0]$,
$f^{-1}:\ y = \sqrt[-n]{x}$.	klesající v $[0, \infty)$.



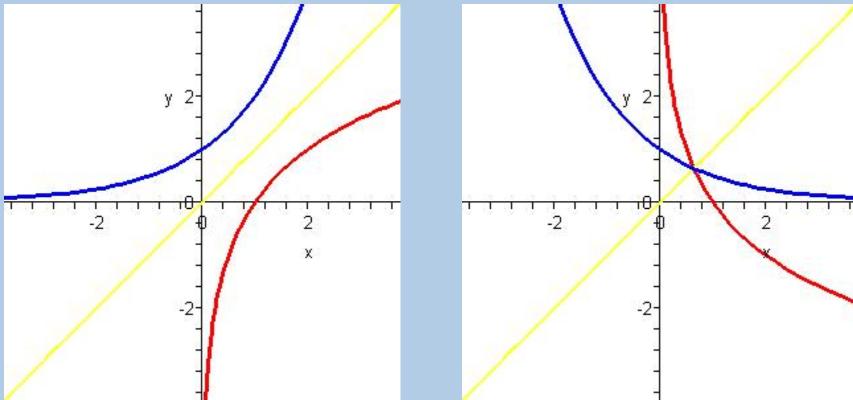
n je liché $\qquad\qquad$ n je sudé

Obrázek 2.7: $f(x) = x^{-n}$, $\mathbf{f^{-1}(x)} = \sqrt[-n]{x}$, $\mathbf{y = x}$.

Exponenciální funkce o základu a:

$$f:\ y = a^x \qquad a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1,\ D(f) = \mathbb{R},\ R(f) = (0, \infty)\,.$$

Je zdola omezená a není shora omezená. Pro $a > 1$ je rostoucí a tedy prostá a pro $0 < a < 1$ je klesající a tedy prostá. V obou případech tedy existuje inverzní funkce $f^{-1} : y = \log_a x$. Exponenciální funkce o základu $e = 2{,}718281828459\ldots$ (Eulerovo číslo) se nazývá (přirozená) exponenciální funkce. Exponenciální funkce $y = a^x$ a $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ jsou souměrné podle osy y. Na závěr ještě připomeňme, že platí vztah $a^{x+y} = a^x a^y$.



$a > 1$ $\qquad\qquad$ $0 < a < 1$

Obrázek 2.8: $f(x) = a^x$, $\mathbf{f^{-1}(x) = \log_a x}$, $\mathbf{y = x}$.

Logaritmus o základu a:

$$f: \ y = \log_a x \qquad a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1,\ D(f) = (0, \infty)\,,\ R(f) = \mathbb{R}.$$

Logaritmus je inverzní funkce k exponenciální funkci a z vlastností inverzní funkce ihned plynou následující vlastnosti. Logaritmus není zdola ani shora omezená. Pro $a > 1$ je rostoucí a tedy prostá a pro $0 < a < 1$ je klesající a tedy prostá. V obou případech tedy existuje inverzní funkce $f^{-1} : y = a^x$. Logaritmus o základu e se nazývá (přirozený) logaritmus a místo $\log_e x$ píšeme $\ln x$.

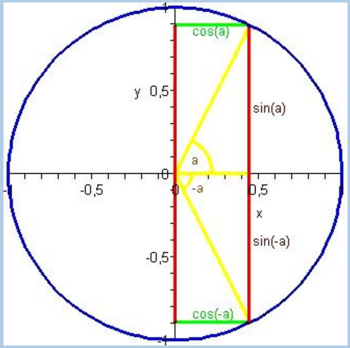
Věta 2.28 **(Vlastnosti logaritmů.)** *Nechť je $a, b, r, x, y \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$ a $y > 0$. Potom platí:*

$$\log_a a = 1, \qquad \log_a 1 = 0, \qquad a^{\log_a x} = x, \qquad \log_a (x\,y) = \log_a x + \log_a y,$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \qquad \log_a x^r = r \log_a x, \qquad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Funkce sinus a kosinus:

Úhly budeme uvádět v obloukové míře. Potom pro libovolné reálné x je $\cos x$ a $\sin x$ definováno jako první, respektive druhá souřadnice průsečíku jednotkové kružnice se středem v počátku a koncovým ramenem orientovaného úhlu o velikosti x, jehož počátečním ramenem je kladná část osy x. Tedy pro každé reálné číslo x je přiřazeno právě jedno reálné číslo $\sin x$ a právě jedno reálné číslo $\cos x$ (viz. obrázek 2.9).



Obrázek 2.9: Zavedení funkcí sinus a kosinus.

Z definice funkcí sinus a kosinus plyne, že obě funkce mají stejný definiční obor $D(f) = (-\infty, \infty)$ a obor hodnot $R(f) = [-1, 1]$. Ještě připomeňme, že funkce sinus je rostoucí na intervalech $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, klesající na intervalech $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ a funkce kosinus je rostoucí na intervalech $[-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$, klesající na intervalech $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Nejdůležitější vztahy mezi goniometrickými funkcemi shrneme do následující věty:

Věta 2.29 **Vlastnosti funkcí sinus a kosinus.** $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *platí:*

$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x, \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

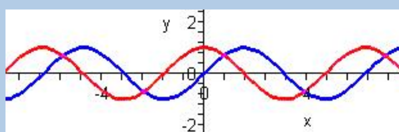
$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \qquad \cos(x + 2k\pi) = \cos x, \qquad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x,$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x, \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin y \sin x,$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}, \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}.$$

Další vzorce, například pro sinus a kosinus dvojnásobného a polovičního úhlu, z nich můžeme snadno odvodit.



Obrázek 2.10: $\sin x$, $\cos x$.

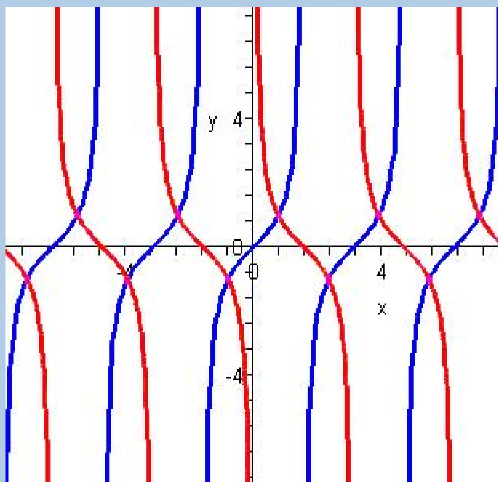
Celá obrazovka
Začátek
Strana 43
Vyhledávání
◀ ▶
Zpět Vpřed
Zavřít
Ukončit

Funkce tangens a kotangens:

$$\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x} \qquad D(f) = \mathbb{R} - \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \right\}, \; R(f) = (-\infty, \infty)\,.$$

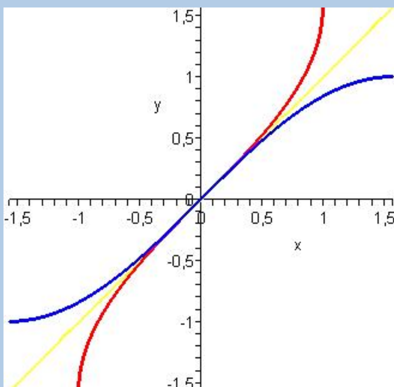
$$\operatorname{cotg} x := \frac{\cos x}{\sin x} \qquad D(f) = \mathbb{R} - \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{k\pi\}\,, \; R(f) = (-\infty, \infty)\,.$$

Obě funkce jsou liché, periodické s periodou π a nejsou ani shora ani zdola omezené. Funkce $\operatorname{tg} x$ je rostoucí (na intervalech $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$) a funkce $\operatorname{cotg} x$ je klesající (na intervalech $(k\pi, \pi + k\pi)$).

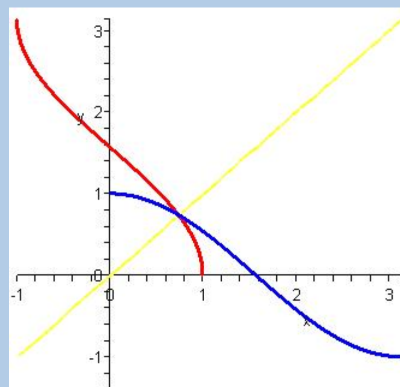


Obrázek 2.11: $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$.

Cyklometrické funkce: Budeme-li chtít nalézt inverzní funkce ke goniometrickým funkcím, narazíme na problém, že tyto funkce jsou periodické a tedy nejsou na celém definičním oboru prosté. Nicméně pokud se omezíme na vhodný interval, kde jsou tyto funkce ryze monotónní, potom podle věty 2.18 příslušná inverzní funkce existuje. Inverzní funkci k funkci $\sin x$ na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ označme symbolem **arcsin x** (čteme „arkus sinus“). Inverzní funkci k funkci $\cos x$ na intervalu $[0, \pi]$ označme symbolem **arccos x**. Inverzní funkci k funkci $\operatorname{tg} x$ na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ označme symbolem **arctg x**. A konečně inverzní funkci k funkci $\operatorname{cotg} x$ na intervalu $[0, \pi]$ označme symbolem **arccotg x**.

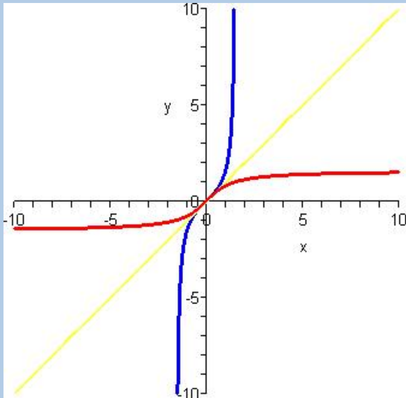


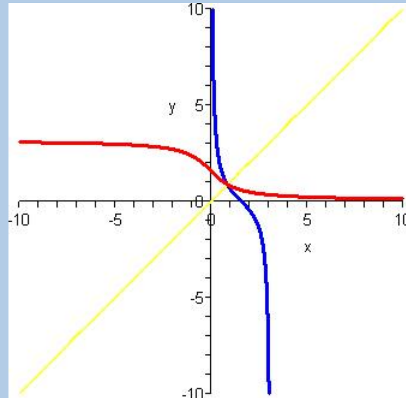
$\sin x$, $\arcsin x$,



$\cos x$, $\arccos x$.

Obrázek 2.12: $\arcsin x$, $\arccos x$.





$\mathrm{tg}\, x$, **arctg** x, $\mathrm{cotg}\, x$, **arccotg** x.

Obrázek 2.13: $\mathrm{arctg}\, x$, $\mathrm{arccotg}\, x$.

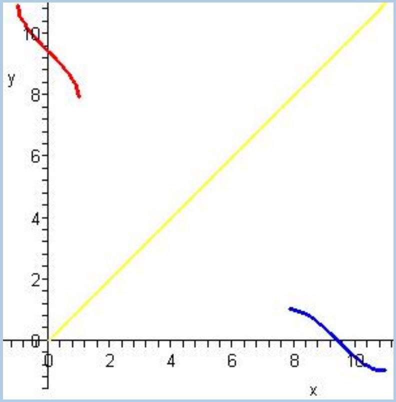
Příklad 2.30 *Spočtěme inverzní funkci k funkci* $f(x) = \sin x$ *na intervalu* $\left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$. *Funkce* sin *je na tomto intervalu klesající a tedy prostá, takže příslušná inverzní funkce existuje. Abychom mohli využít funkci* $\arcsin x$ *potřebujeme nejprve zadaný interval transformovat na základní interval* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. *Pouhé posunutí nestačí, protože na zadaném intervalu je funkce* $\sin x$ *klesající zatímco na základním intervalu je rostoucí - je tedy třeba převést počáteční bod zadaného intervalu na koncový bod základního intervalu a naopak koncový bod zadaného intervalu na počáteční bod základního intervalu. Tímto způsobem se* *klesající funkce změní na rostoucí. Dostaneme tedy soustavu rovnic:*

$$a + \frac{7\pi}{2}b = -\frac{\pi}{2} \qquad\qquad a + \frac{5\pi}{2}b = \frac{\pi}{2}.$$

Řešením je $b = -1$, $a = 3\pi$. *Nyní funkce* $z = (3\pi - x)$ *zobrazuje interval* $\left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$ *na interval* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *a tedy na rovnici* $y = \sin z$ *můžeme aplikovat inverzní funkci a dostaneme*

$$\arcsin y = z, \qquad \textit{a po dosazení} \qquad \arcsin y = 3\pi - x$$

nebo-li $x = 3\pi - \arcsin y$. *Tedy* $f^{-1}(x) = 3\pi - \arcsin x$ *(viz. obrázek).*

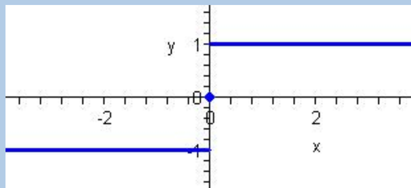


Obrázek 2.14: $\mathrm{f(x)} = \sin x$, $x \in \left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$, $\mathbf{f^{-1}(x) = 3\pi - \arcsin} x$.

Signum:

$$f : y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

$D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = \{-1, 0, 1\}$. Funkce signum je lichá a shora i zdola omezená.



Obrázek 2.15: $\operatorname{sgn} x$.

Absolutní hodnota:

$$f : y = |x| = \begin{cases} x & \text{pro } x \geq 0, \\ -x & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

$D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = (0, \infty)$. Funkce absolutní hodnota je sudá, zdola omezená a shora neomezená (viz. graf).

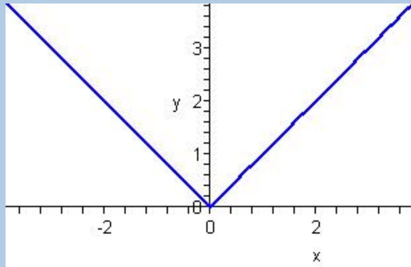
Celá část:

$$f : y = [x] \qquad D(f) = \mathbb{R},\ R(f) = \mathbb{Z}.$$

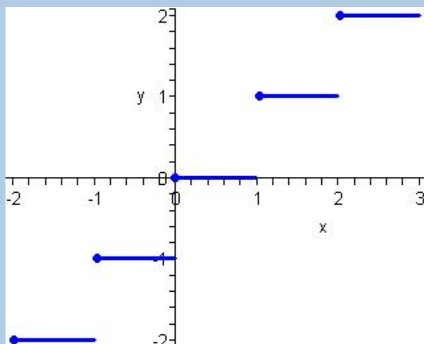
$[x]$ definujeme jako největší celé číslo n takové, že $n \leq x$ (viz. graf). Funkce celá část není ani shora ani zdola omezená.

Další funkce můžeme získat sčítáním, odčítáním, násobením, dělením a skládáním elementárních funkcí.

Celá obrazovka
Začátek
Strana 48
Vyhledávání
◀ ▶
Zpět Vpřed
Zavřít
Ukončit



Obrázek 2.16: $|x|$.



Obrázek 2.17: $[x]$.

Celá obrazovka
Začátek
Strana 49
Vyhledávání
◀ ▶
Zpět Vpřed
Zavřít
Ukončit

3. Rovinné křivky

Rovinnou křivkou budeme rozumět množinu bodů v rovině nebo-li relaci mezi souřadnicemi. Rovinné křivky obvykle zadáváme

- **explicitně** - tedy pomocí grafu nějaké funkce $y = f(x)$. To se týká například všech probraných elementárních funkcí.
- **implicitně** - tedy zadané pomocí rovnice $F(x, y) = 0$, kde F je funkce dvou proměnných. Křivka je pak množinou bodů, které splňují rovnici $F(x, y) = 0$. Každou křivku zadanou explicitně můžeme vyjádřit též implicitně rovnicí $f(x) - y = 0$. Otázka ohledně vyjádření implicitně zadané křivky explicitně je podstatně složitější a budeme se jí věnovat později. Viz. příklad 2.3.
- **parametrickými rovnicemi**

  $$x = p(t), \qquad\qquad y = q(t),$$

  kde p, q jsou funkce reálné proměnné se společným definičním oborem M. Proměnnou t nazýváme parametr a křivka je tvořena všemi uspořádanými dvojicemi $[p(t), q(t)]$, $t \in M$. V případě, že na definičním oboru M existuje k funkci p inverzní funkce, potom lze zadanou křivku vyjádřit explicitně, platí totiž

  $$t = p^{-1}(x) \qquad \text{a} \qquad y = q(t) = q(p^{-1}(x)).$$

- **vztahem mezi polárními souřadnicemi** - polohu každého bodu B v rovině můžeme popsat buď pomocí kartézských souřadnic $[x, y]$ nebo pomocí jeho vzdálenosti od počátku souřadnic a úhlem, o který musíme pootočit kladnou část osy x (ve směru kladné části osy y) tak, aby splynula s polopřímkou vycházející z počátku a procházející bodem B. Úhel φ a vzdálenost r nazýváme **polárními souřadnicemi**. Vztah mezi polárními souřadnicemi bývá nejčastěji vyjádřen rovnicí ve tvaru $r = f(\varphi)$, kde f je funkce reálné proměnné. Křivka je pak tvořena body, jejichž polární souřadnice jsou $(\varphi, f(\varphi))$ (úhel,vzdálenost). Z definice funkcí sinus a kosinus je zřejmé (viz. obrázek 2.9), že mezi kartézskými a polárními souřadnicemi platí vztah

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi. \tag{2.1}$$

(Například pokud je poloměr konstantní pro libovolný úhel - tedy $r = c$, kde $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, potom dostaneme popis kružnice.) Křivku, kterou máme popsánu vztahem mezi polárními souřadnicemi $r = f(\varphi)$, můžeme snadno zapsat parametrickými rovnicemi. Dosadíme-li totiž z rovnice $r = f(\varphi)$ do transformačních rovnic (2.1), dostaneme parametrické rovnice křivky:

$$x = f(\varphi)\cos\varphi, \qquad y = f(\varphi)\sin\varphi.$$

Příklad 2.31 *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, potom* **lemniskátu** *můžeme popsat implicitně pomocí rovnice*

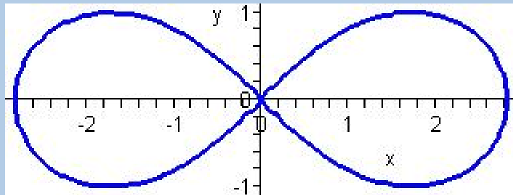
$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

Transformací do polárních souřadnic dostaneme

$$(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2 = 2a^2(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi).$$

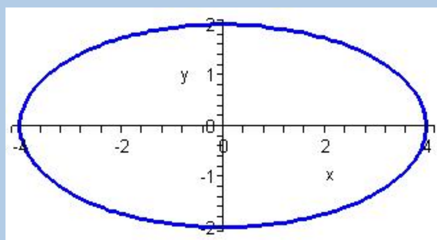
Tedy $r^4 = 2a^2r^2\cos(2\varphi)$ a vydělíme-li tuto rovnici r^2 dostaneme tento vztah mezi polárními souřadnicemi

$$r^2 = 2a^2\cos(2\varphi).$$



Obrázek 2.18: **Lemniskáta.**

Příklad 2.32 *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, potom* **elipsu** *můžeme popsat implicitně pomocí rovnice $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ (je-li $a = b$ dostaneme kružnici).*



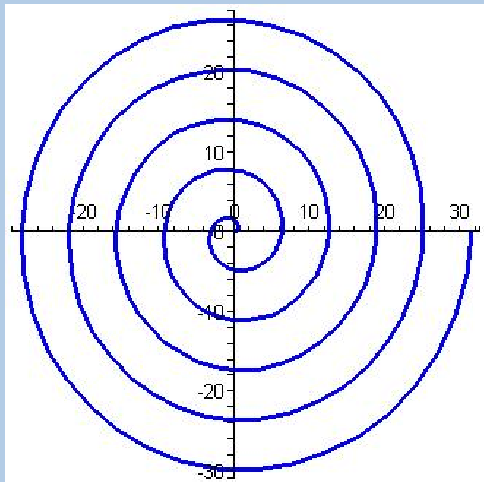
Obrázek 2.19: **Elipsa.**

Příklad 2.33 **Archimedovu spirálu** *můžeme popsat vztahem mezi polárními souřadnicemi rovnicí*

$$r = a\varphi, \qquad a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ \varphi > 0.$$

Dosadíme-li nyní rovnici $r = a\varphi$ do transformačních rovnic (2.1), dostaneme parametrické rovnice Archimedovy spirály:

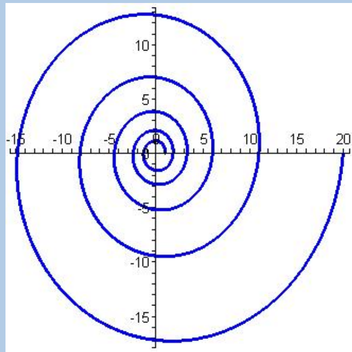
$$x = a\varphi\cos\varphi, \qquad\qquad y = a\varphi\sin\varphi.$$



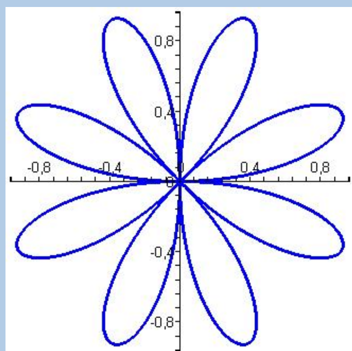
Obrázek 2.20: **Archimedova spirála.**

Příklad 2.34 **Logistiku** *můžeme popsat vztahem mezi polárními souřadnicemi rovnicí*

$$r = ab^{c\varphi}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R},\ a > 0,\ b > 0,\ \varphi \geq 0.$$



Obrázek 2.21: **Logistika.**



Obrázek 2.22: Osmilístek v polárních souřadnicích: $r = \sin(4\varphi)$.

Kapitola 3

Limita posloupnosti

1. Základní pojmy

Touto kapitolou začínáme studium matematické analýzy. Postupně probereme limitu posloupnosti, spojitost, limitu funkce a derivaci – tyto pojmy (a jejich vlastnosti) později využijeme při vyšetřování průběhu funkce. Matematická analýza je založena na pojmu limity, proto studium analýzy začneme právě tímto pojmem. Nejprve zavedeme základní pojmy.

Definice 3.1 **Posloupnost** *(reálných čísel) je zobrazení z množiny $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel do $\mathbb{R}$. Posloupnost, která každému $n \in \mathbb{N}$ přiřazuje číslo $a_n \in \mathbb{R}$, budeme zapisovat $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ nebo stručně $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Číslo a_n budeme nazývat* **n-tým členem** *této posloupnosti*

Poznamenejme, že není nutné, aby indexy členů posloupnosti tvořily posloupnost $1, 2, 3, \ldots$.

Definice 3.2 *Posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nazýváme:*

- **rostoucí**, *jestliže* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$,
- **klesající**, *jestliže* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$,
- **neklesající**, *jestliže* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$,
- **nerostoucí**, *jestliže* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$.

Všechny tyto případy shrnujeme pod jediný název: **monotónní posloupnost.** *V případech, kdy je posloupnost rostoucí nebo klesající, tak říkáme, že* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je* **ryze monotónní.**

Příklad 3.3 *Uveďme několik příkladů posloupností:*

- $\{n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ *je rostoucí.*
- $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$ *je klesající.*
- $\{2^n\}_{n=1}^{\infty} = \{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$ *je rostoucí.*
- $\{p_n : p_n = n\text{-té prvočíslo}\}_{n=1}^{\infty} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ *je rostoucí.*
- $\{1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$ *je neklesající i nerostoucí.*
- $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$ *není monotónní.*
- $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 1 + a_n^2 = \{1, 2, 5, 26, 677, \dots\}$ *je rostoucí.*

Definice 3.4 *Nechť je dána posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a rostoucí posloupnost přirozených čísel* $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Potom posloupnost* $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ *nazýváme* **vybranou posloupností** *z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Vybranou posloupnost tedy získáme tak, že z původní posloupnosti vyškrtáme konečně nebo nekonečně mnoho členů tak, aby jich ještě nekonečně mnoho zůstalo.

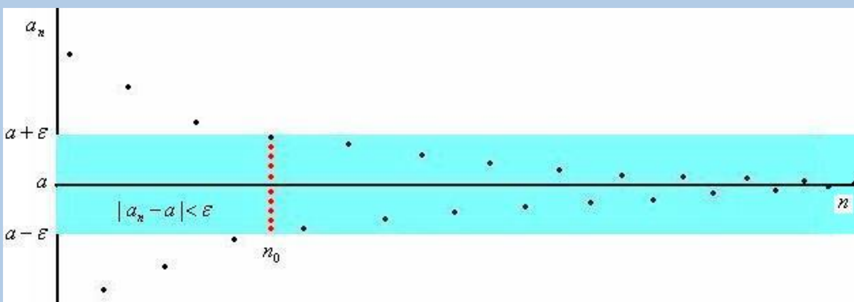
Příklad 3.5 *Pokud z posloupnosti* $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ *vybereme sudé členy, dostaneme vybranou posloupnost:* $1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots$ *nebo-li* $\{(-1)^{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$.

Definice 3.6 *O posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *řekneme, že má* **(vlastní) limitu** $a \in \mathbb{R}$, *jestliže pro* $\forall \varepsilon > 0$ $(\varepsilon \in \mathbb{R})$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že*

$$\forall n > n_0 \qquad \textit{platí} \qquad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Jestliže posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má limitu* a, *říkáme také, že posloupnost* **konverguje** *a píšeme,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$



Obrázek 3.1: Definice limity posloupnosti graficky.

Příklad 3.7 *Hledejme limitu posloupnosti* $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. *Vidíme, že s rostoucím n se členy posloupnosti blíží k nule. Zkusme tedy podle definice limity dokázat, že limita této posloupnosti je nula. Vezmeme libovolné $\varepsilon > 0$. Potom* $|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$ *a můžeme tedy volit* $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. *Potom pro $n > n_0$ je $n > \frac{1}{\varepsilon}$, nebo-li $\frac{1}{n} < \varepsilon$. A protože ε bylo libovolné, je* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2. Věty o limitách

Definice limity nás vede k domněnce, že dvě různá čísla nemohou být zároveň limitami stejné posloupnosti. Jak uvidíme v následující větě, tato domněnka je správná.

Věta 3.8 **(O jednoznačnosti limity posloupnosti.)** *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Dokážeme sporem. Nechť posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má dvě různé limity $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{2}(b - a)$. A protože číslo a je limitou posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ tak, že } \forall n \geq n_1 \text{ platí} \quad |a_n - a| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Zároveň i číslo b je limitou posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - tedy podle definice limity

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ tak, že } \forall n \geq n_2 \text{ platí} \quad |a_n - b| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Zvolme dále $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, potom platí (3.1) i (3.2), takže

$$b - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad b - \varepsilon < a + \varepsilon,$$

takže $b - a < 2\varepsilon$, což je spor s předpokladem $\varepsilon = \dfrac{1}{2}(b - a)$. $\square$

Lemma 3.9 *Jsou-li všechny členy posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ od jistého indexu n_1 rovny témuž číslu a (tj. je-li $a_n = a$ pro všechna $n \geq n_1$), je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.*

Lemma 3.10 *Jestliže posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu $a \in \mathbb{R}$, potom každá vybraná posloupnost má limitu a.*

Důkazy předchozích dvou lemmat jsou jednoduché a proto je ponecháme jako cvičení.

Poznámka 3.11 *Hledejme limitu posloupnosti: $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$. Pokud vybereme sudé členy této posloupnosti, dostaneme vybranou posloupnost:* $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$*. Takto vybraná posloupnost je konvergentní a její limita je* 1*. Pokud vybereme liché členy z původní posloupnosti, dostaneme vybranou posloupnost:* $-1, -1, -1, -1, -1, \ldots$*. Takto vybraná posloupnost je opět konvergentní a její limita je* -1*. Máme tedy dvě vybrané posloupnosti s různými limitami a z negace předchozího lemmatu plyne, že zadaná posloupnost nemá limitu.* **Chceme-li dokázat, že posloupnost nemá limitu, stačí najít dvě vybrané posloupnosti, které mají různé limity!**

Jestliže posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá vlastní limitu, říkáme, že je **divergentní.**

Definice 3.12 *Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá* **omezená (ohraničená)**, *resp.* **shora omezená (ohraničená)**, *resp.* **zdola omezená (ohraničená)**, *jestliže množina jejích členů $A = \{a_n \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ je omezená, resp. shora omezená, resp. zdola omezená.*

Celá obrazovka
Začátek
Strana 59
Vyhledávání
◀ ▶
Zpět Vpřed
Zavřít
Ukončit

Věta 3.13 (O omezenosti konvergentní posloupnosti.) *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Důkaz. Podle definice limity existuje k číslu $\varepsilon = 1$ přirozené číslo n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $|a_n - a| < 1$. Položme

$$K = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, a + 1\},$$

$$k = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, a - 1\}.$$

Je-li $n > n_0$, je $a - 1 < a_n < a + 1$ a tedy $k < a_n < K$. Je-li $n \leq n_0$, je zřejmě rovněž $k < a_n < K$. $\square$

Zde je třeba upozornit, že **omezená posloupnost nemusí být konvergentní** (viz. poznámka 3.11).

Věta 3.14 (O aritmetice limit posloupností.) *Je-li*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b,$$

potom platí:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b, \qquad \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b, \qquad \lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab.$$

Je-li navíc $b \neq 0$, potom platí $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Důkaz. 1. Máme dokázat, že posloupnost, jejíž n-tý člen je $a_n + b_n$, má limitu $a + b$. Platí

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|. \tag{3.3}$$

Podle definice limity k číslu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existují $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\text{pro } n > n_1 \text{ je} \qquad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.4}$$

$$\text{pro } n > n_2 \text{ je} \qquad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.5}$$

Zvolíme-li $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, platí zároveň rovnice (3.3), (3.4), (3.5) a tedy

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Protože ε bylo libovolné, dokázali jsme, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

3. Dále máme dokázat, že posloupnost, jejíž n-tý člen je $a_n b_n$, má limitu ab. Platí

$$a_n b_n - ab = a_n b_n - ab_n + ab_n - ab = b_n(a_n - a) + a(b_n - b),$$

$$|a_n b_n - ab| \le |b_n(a_n - a)| + |a(b_n - b)| = |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b|. \tag{3.6}$$

Podle věty o omezenosti konvergentní posloupnosti $\exists k > 0$ tak, že $|b_n| < k$. Zvolme $K = \max\{k, a\}$, potom podle definice limity k číslu $\dfrac{\varepsilon}{2K} > 0$ existují přirozená čísla n_1 a n_2 tak, že je

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K} \text{ pro } n > n_1, \qquad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2K} \text{ pro } n > n_2. \tag{3.7}$$

Zvolíme-li $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, platí zároveň rovnice (3.6), (3.7) a tedy

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &\le |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b| < K|a_n - a| + K|b_n - b| \\ &< K\frac{\varepsilon}{2K} + K\frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Protože ε bylo libovolné, dokázali jsme, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$.

2. Je-li speciálně $c_n = -1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, potom podle dříve dokázaného tvrzení o limitě součinu máme $\lim\limits_{n\to\infty} (c_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (-b_n) = -b$. A podle dříve dokázaného tvrzení o limitě součtu dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n + (-b_n)) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} (-b_n) = a - b.$$

4. Je-li $b \neq 0$, dokážeme nejprve, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$.

Podle definice limity k číslu $\frac{|b|}{2} > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n > n_1$ je

$$|b_n - b| < \frac{|b|}{2}.$$

Potom pro $n > n_1$ platí:

$$|b_n| = |b - (b - b_n)| \geq |b| - |b - b_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2},$$

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n||b|} \leq \frac{|b - b_n|}{\frac{|b|}{2}|b|} = \frac{2|b - b_n|}{b^2}. \tag{3.8}$$

Dále podle definice limity k číslu $\frac{b^2\varepsilon}{2} > 0$ $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n > n_2$ je

$$|b_n - b| < \frac{b^2\varepsilon}{2}. \tag{3.9}$$

Zvolíme-li $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, platí zároveň rovnice (3.8), (3.9) a tedy

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \frac{2}{b^2}\frac{b^2\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Protože ε bylo libovolné, dokázali jsme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. Nakonec použijeme dříve dokázané tvrzení o limitě součinu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \frac{1}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

$\square$

Příklad 3.15 *Spočítejme* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3}{n^2-2n+3}$.

Čitatel ani jmenovatel nejsou shora omezené a tedy nekonvergují. Rozšiřme proto zlomek výrazem $\dfrac{1}{n^2}$:

$$\frac{2n^2+3}{n^2-2n+3}=\frac{2+3\frac{1}{n^2}}{1-2\frac{1}{n}+3\frac{1}{n^2}}.$$

Postupně spočteme $\lim\limits_{n\to\infty}1=1$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty}2=2$ *podle lemmatu 3.9. Podle příkladu 3.7 je* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ *a dále podle věty o aritmetice limit obdržíme:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot 0=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+3\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}2\;+\;\lim_{n\to\infty}3\frac{1}{n^2}=2+0=2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-2\frac{1}{n}+3\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}1\;-\;2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\;+\;3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=1-0+0=1.$$

Všechny limity tedy existují a limita jmenovatele je různá od nuly, proto platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{n^2-2n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+3\frac{1}{n^2}}{1-2\frac{1}{n}-3\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(2+3\frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1-2\frac{1}{n}+3\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}2\;+\;3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty}1\;-\;2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\;+\;3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{2+0}{1-0+0}=2.$$

Lemma 3.16 *Nechť existuje* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, *potom existuje i* $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.

Celá obrazovka
Začátek
Strana 63
Vyhledávání
◀ ▶
Zpět Vpřed
Zavřít
Ukončit

Lemma 3.17 *Rovnice* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *platí právě tehdy, platí-li* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Lemma 3.18 *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *a nechť existuje číslo* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tak, že pro* $n > n_1$ *je* $|b_n| \le |a_n|$. *Potom je též* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Důkazy předchozích tří lemmat jsou jednoduché, takže je ponecháme jako cvičení.

Příklad 3.19 **Dokažme, že pro** $|a| < 1$ **platí** $\lim_{n\to\infty} a^n = 0.$

1. *Pro* $a = 0$ *je* $a^n = 0$ *(pro* $n > 0$*) a tedy* $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$.

2. *Je-li* $0 < a < 1$, *potom číslo a můžeme psát ve tvaru* $a = \dfrac{1}{1+h}$, *kde h je kladné reálné číslo. Potom pro* $n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ *platí*

$$a^n = \left(\frac{1}{1+h}\right)^n = \frac{1}{(1+h)^n} = \frac{1}{1 + nh + \binom{n}{2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n}h^n} < \frac{1}{nh}$$

a $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{nh} = \dfrac{1}{h} \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. *Vzhledem k tomu, že* $0 < a < 1$, *platí* $|a^n| < \left|\dfrac{1}{nh}\right|$ *a podle lemmatu 3.18 je* $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

3. *Je-li* $-1 < a < 0$ *a tedy* $0 < |a| < 1$. *Podle případu 2 je* $\lim_{n\to\infty} |a|^n = \lim_{n\to\infty} |a^n| = 0$ *a následně podle lemmatu 3.17 je* $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

Věta 3.20 **(O limitě sevřené posloupnosti.)** *Nechť pro posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *platí:* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$, $a \in \mathbb{R}$. *Dále předpokládejme, že existuje číslo* n_1 *tak, že pro každé* $n > n_1$, $n \in \mathbb{N}$ *je* $a_n \le b_n \le c_n$. *Potom platí, že* $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$. Potom podle definice limity existují čísla n_2, n_3 tak, že

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \text{pro} \quad n > n_2, \qquad a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon \quad \text{pro} \quad n > n_3.$$

Položíme-li $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$, potom pro všechna $n > n_0$ platí:

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$$

nebo-li $|b_n - a| < \varepsilon$ a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, protože ε bylo libovolné. □

Příklad 3.21 **Dokažme, že pro $x > 0$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$.**

1. *Pro $x = 1$ je $\sqrt[n]{x} = 1$ (pro $n > 0$) a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.*

2. *Je-li $x > 1$, potom číslo $\sqrt[n]{x}$ můžeme psát ve tvaru $\sqrt[n]{x} = 1 + h_n$, kde h_n je kladné reálné číslo. Potom pro $n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$) platí*

$$x = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \binom{n}{2} h_n^2 + \ldots + \binom{n}{n} h_n^n > nh_n$$

tedy $0 < h_n < \dfrac{x}{n}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{n} = x \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Potom podle věty o limitě sevřené funkce je $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$, tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + h_n) = 1$.

3. *Je-li $0 < x < 1$, položme $y = \dfrac{1}{x}$ a tedy $y > 1$. Potom*

$$\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{1} = 1 \qquad \textit{nebo-li} \qquad \sqrt[n]{x} = \frac{1}{\sqrt[n]{y}}.$$

Podle případu 2 a podle věty o aritmetice limit obdržíme:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{y}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{y}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Věta 3.22 *Nechť existují* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $(a,\ b \in \mathbb{R})$ *a nechť existuje číslo* n_1 *tak, že pro každé* $n > n_1$, $n \in \mathbb{N}$ *je* $a_n \leq b_n$. *Potom je* $a \leq b$.

Důkaz. Větu dokážeme sporem. Nechť naopak $a > b$. Zvolme $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$, tedy $\varepsilon > 0$ a $\varepsilon + b = a - \varepsilon$. Podle definice limity existují čísla n_2, n_3 tak, že

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \text{pro} \quad n > n_2, \qquad b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon \quad \text{pro} \quad n > n_3.$$

Položíme-li $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$, potom pro všechna $n > n_0$ platí:

$$b_n < \varepsilon + b = a - \varepsilon < a_n,$$

a to je ve sporu s předpokladem, že pro všechna $n > n_1$ je $a_n \leq b_n$. □

Poznámka 3.23 *Existují-li* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $(a,\ b \in \mathbb{R})$ *a pro všechna* $n > n_1$ *je* $a_n < b_n$. *Potom je podle předchozí věty* $a \leq b$. *Nemusí však platit* $a < b$. *Například* $\dfrac{1}{n} < \dfrac{2}{n}$, *ale* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = 0$. **Nerovnost tedy může v limitě přejít v rovnost!**

3. Monotónní posloupnosti

Všimněme si vlastností některých divergentních posloupností - například

$$\{2^n\}_{n=1}^{\infty} = \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots\}.$$

Vidíme, že členy této posloupnosti s rostoucím indexem n rostou nad každou mez. To nás přivádí k následujícím dvěma definicím.

Definice 3.24 *Nechť ke každému číslu* A *existuje* n_0 *tak, že pro každé* $n > n_0$ $(n,\ n_0 \in \mathbb{N})$ *je* $a_n > A$. *Potom říkáme, že posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má nevlastní limitu* ∞ *a píšeme* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Definice 3.25 *Nechť ke každému číslu A existuje n_0 tak, že pro každé $n > n_0$ ($n,\ n_0 \in \mathbb{N}$) je $A > a_n$. Potom říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu $-\infty$ a píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.*

Poznámka 3.26 *Většina dříve dokázaných vět týkajících se vlastních limit lze rozšířit i na nevlastní limity. Bez omezení lze pro nevlastní limity vyslovit větu o jednoznačnosti limity, lemma 3.10 (o limitě vybrané posloupnosti) a větu o limitě sevřené posloupnosti. Pouze v případě věty o aritmetice limit je třeba doplnit předpoklad* „**pokud pravá strana existuje**“, *abychom se vyvarovali případů, kdy některá operace s nekonečny není definována.*

Poznámka 3.27 *Máme-li zadánu posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, potom* **může nastat právě jeden z následujících případů:** *(viz. předchozí poznámka)*

- *existuje vlastní limita,*
- *existuje nevlastní limita ∞,*
- *existuje nevlastní limita $-\infty$,*
- *neexistuje ani vlastní ani nevlastní limita.*

Příklad 3.28 **Spočtěme ještě $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ pro $|a| \geq 1$.**

1. *Je-li $a = 1$, je $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.*

2. *Je-li $a > 1$, můžeme číslo a psát ve tvaru $a = 1 + h$, kde $h > 0$. Potom*

$$a^n = (1+h)^n = 1 + nh + \binom{n}{2} h^2 + \ldots + \binom{n}{n} h^n > nh.$$

Je-li A libovolné reálné číslo a zvolíme-li $n_0 = \dfrac{A}{h}$ obdržíme pro $n > n_0$

$$a^n > nh > n_0 h = \frac{A}{h} h = A.$$

Připomeneme-li si definici nevlastní limity, zjistíme, že $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.

3. *Je-li* $a < 1$, *vezmeme dvě vybrané posloupnosti. První bude obsahovat sudé členy a tato posloupnost je zároveň vybranou posloupností z předchozího případu – tedy* $\lim\limits_{n\to\infty} a^{2n} = \infty$. *Druhá vybraná posloupnost bude obsahovat liché členy a tedy* $\lim\limits_{n\to\infty} a^{2n+1} = a \lim\limits_{n\to\infty} a^{2n} = a \cdot \infty = -\infty$, *protože* a *je záporné. Máme tedy dvě vybrané posloupnosti s různými limitami a proto podle lemmatu 3.10 limita neexistuje.*

4. *Stejnou argumentaci jako v předchozím případu můžeme použít i pro* $a = -1$. *Tedy ani v tomto případě limita neexistuje.*

Shrneme-li *i výsledky z příkladu 3.19 máme:*

- *pro* $a \le -1$ *neexistuje ani vlastní ani nevlastní limita.*
- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ *pro* $-1 < a < 1$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$ *pro* $a = 1$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$ *pro* $a > 1$.

Na závěr této kapitoly dokážeme několik důležitých vět pro monotónní posloupnosti.

Věta 3.29 *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je neklesající posloupnost. Není-li shora omezená, je* $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$. *Je-li shora omezená, má vlastní limitu*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Důkaz. Není-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ shora omezená, existuje ke každému A přirozené číslo n_0 tak, že $a_{n_0} > A$. Protože je posloupnost neklesající, platí pro $n > n_0$ nerovnost $a_n \geq a_{n_0} > A$, což odpovídá definici nevlastní limity. Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.

Je-li shora omezená, označme $S = \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Potom $S \geq a_n$ pro všechna n a je-li $\varepsilon > 0$, existuje v posloupnosti alespoň jeden člen větší než $S - \varepsilon$, to znamená, že existuje přirozené číslo n_0 tak, že $a_{n_0} > S - \varepsilon$. Vzhledem k tomu, že posloupnost je neklesající, pro všechna přirozená $n > n_0$ platí $a_n \geq a_{n_0}$ a tedy $S - \varepsilon < a_n \leq S < S + \varepsilon$ nebo-li $|a_n - S| < \varepsilon$, což odpovídá definici limity. Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$. □

Věta 3.30 *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost. Není-li zdola omezená, je $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = -\infty$. Je-li zdola omezená, má vlastní limitu*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Důkaz této věty je obdobný důkazu věty 3.29, takže ho ponecháme jako cvičení. Výsledky vět 3.29 a 3.30 shrneme do následující věty.

Věta 3.31 (O existenci limity monotónní posloupnosti.) *Monotónní posloupnost je konvergentní tehdy a jen tehdy, je-li omezená.*

Příklad 3.32 *Podle příkladu 1.6 je* $\sup\mathbb{N} = \infty$. *Dále je posloupnost* $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ *neklesající a tedy podle věty 3.29 dostaneme*

$$\lim_{n\to\infty} n = \sup\mathbb{N} = \infty.$$

Příklad 3.33 *Z věty o aritmetice limit a z předchozího příkladu obdržíme:*

$$\lim_{n\to\infty} 2n^2 = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \lim_{n\to\infty} n \cdot \lim_{n\to\infty} n = 2 \cdot \infty \cdot \infty.$$

Nakonec podle pravidel o počítání s nekonečny dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} 2n^2 = 2 \cdot \infty \cdot \infty = \infty.$$

4. Zavedení Eulerova čísla

Budeme vyšetřovat $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Dokážeme-li, že $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a omezená posloupnost, budeme moci využít větu o existenci limity monotónní posloupnosti, ze které plyne existence příslušné limity.

Lemma 3.34 *Posloupnost* $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *je rostoucí.*

Důkaz. Označíme-li $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, dostaneme užitím binomického rozvoje:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \end{aligned} \tag{3.10}$$

a podobně

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1}\frac{1}{n+1} + \ldots + \binom{n+1}{n+1}\frac{1}{(n+1)^{(n+1)}} \\ &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \ldots \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right). \qquad (3.11) \end{aligned}$$

Nyní pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$ platí nerovnost $1 - \dfrac{k}{n} < 1 - \dfrac{k}{n+1}$. Potom porovnáním činitelů u čísel $\dfrac{1}{i!}$ ve výrazech (3.10) a (3.11) pro $i = 2, 3, \ldots, n$ zjistíme, že každý součin ve výrazu (3.11) je vždy větší než příslušný součin ve výrazu (3.10). Dále výraz (3.11) obsahuje navíc poslední člen, který je kladný. Proto platí $a_n < a_{n+1}$ pro všechna přirozená n. □

Lemma 3.35 *Posloupnost* $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *je omezená.*

Důkaz. Posloupnost je rostoucí, stačí tedy ukázat, že je shora omezená. Nahradíme-li ve výrazu (3.10) všechna čísla ve tvaru $1 - \dfrac{k}{n}$ jedničkou pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$, zvětšíme tím celý výraz. Dále pro $i = 2, 3, \ldots, n-1$ je

$$\frac{1}{i!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdots i} < \frac{1}{\underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{(i-1)\text{-krát}}} = \frac{1}{2^{i-1}}.$$

Využijeme-li vztah (3.10) a obě dříve zmíněné úpravy, dostaneme

$$\begin{aligned} a_n &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots \\ &\quad +\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\ &< 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Na pravé straně poslední nerovnosti je geometrická řada s kvocientem $q=\frac{1}{2}$ a víme, že $1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{1-q^n}{1-q}$. Celkem tedy máme

$$a_n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}=1+2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)<3$$

a posloupnost je tedy shora omezená. □

Dokázali jsme, že posloupnost $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí (lemma 3.34) a omezená (lemma 3.35) a tedy z věty o existenci limity monotónní posloupnosti plyne následující věta:

Věta 3.36 *Posloupnost* $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *má limitu.*

Vzhledem k tomu, že limita posloupnosti $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ existuje, můžeme definovat:

Definice 3.37 *Předpis* $e := \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *definuje tzv.* **Eulerovo číslo.**

KAPITOLA 4

Spojitost a limita funkce

1. Spojitost

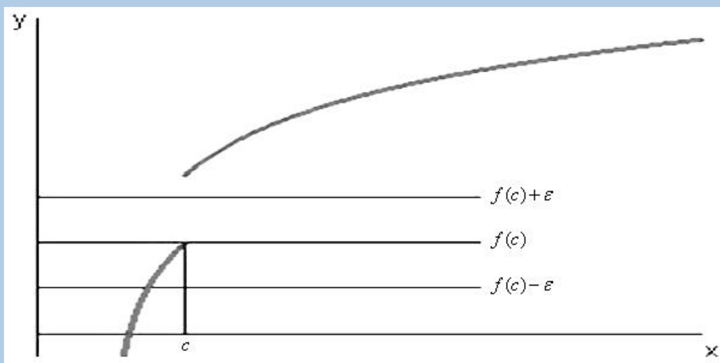
Ze střední školy možná znáte následující geometrickou definici spojitosti funkce v bodě. Spojitost funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$, v jehož okolí je funkce f definována, znamená, že její graf je pro hodnotu argumentu $x = a$ „nepřetržený“, tj. můžeme ho nakreslit jednou čarou, aniž bychom museli přerušit kreslení a pokračovat na jiném místě. Například lineární funkce je spojitá v každém bodě svého definičního oboru (tj. pro $\forall x \in \mathbb{R}$, viz. příklad 4.4), zatímco funkce celá část je spojitá v každém neceločíselném bodě (tj. je spojitá pro $\forall x \in \mathbb{R}$ a zároveň $x \notin \mathbb{Z}$). Tuto neurčitou představu musíme nahradit přesně definovaným pojmem, abychom mohli odvodit a dokázat obecné věty o spojitých funkcích. To nám mimo jiné umožní snadno poznat, zda-li je funkce spojitá nebo není. Spojitostí v bodě $x = c$ bude znamenat, že vyjdeme-li z bodu c a změníme-li málo hodnotu x, změní se málo i hodnota $f(x)$ (nebude se tedy příliš lišit od hodnoty $f(c)$). Tuto intuitivní definici nyní nahradíme definicí rigorózní.

Definice 4.1 *O funkci f řekneme, že je* **spojitá v bodě** c, *jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že*

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon \tag{4.1}$$

je splněna pro všechny hodnoty x, pro něž je

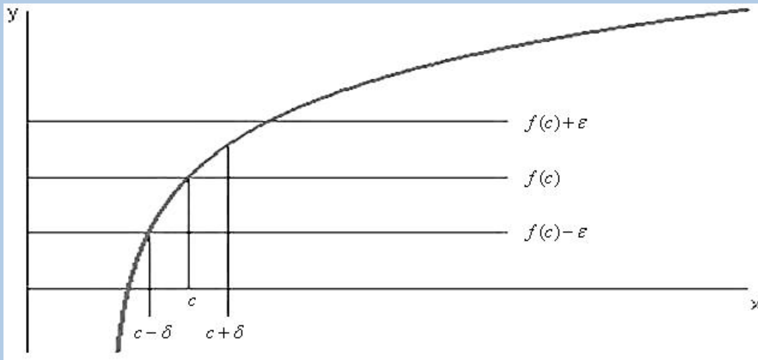
$$|x - c| < \delta. \tag{4.2}$$



Obrázek 4.1: Příklad nespojité funkce v bodě c.

Zobrazená funkce není spojitá v bodě c, protože jsme nalezli $\varepsilon > 0$, k němuž neexistuje $\delta > 0$ tak, aby nerovnost $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ byla splněna pro $\forall x \in (c - \delta, c + \delta)$.

Příklad 4.2 *Zvolíme-li $\varepsilon > 0$ a chceme najít příslušné $\delta > 0$ z definice spojitosti. Nejprve najdu čísla a, b tak, aby pro $\forall x \in (a, b)$ platila nerovnost $f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$. Potom stačí zvolit $\delta = \min\{c - a, b - c\}$ a protože $(c - \delta, c + \delta) \subset (a, b)$, platí i nerovnost (4.1). Viz. obrázek 4.2.*



Obrázek 4.2: Příklad spojité funkce v bodě c a ukázka hledání δ.

Poznámka 4.3 *Pokud je funkce f spojitá v bodě c, potom podle definice spojitosti můžeme zvolit kladné ε a najít k němu příslušné δ. Pak pro všechna x z intervalu $(c - \delta, c + \delta)$ platí nerovnost (4.1). Aby tato nerovnost platila musí mít symbol $f(x)$ smysl pro všechna x z intervalu $(c - \delta, c + \delta)$! Takže je-li funkce f spojitá v bodě c, je jistě definována v jistém otevřeném intervalu, obsahujícím bod c.*

Příklad 4.4 **Funkce $f(x) = x$ je spojitá pro všechna $x \in \mathbb{R}$.** *Důkaz: Nechť c je libovolné číslo. Máme dokázat, že ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že nerovnost*

$$|x - c| < \varepsilon$$

je splněna pro všechny hodnoty x, pro něž je $|x - c| < \delta$. Vidíme, že v tomto případě stačí zvolit $\delta = \varepsilon$. Tím jsme dokázali, že lineární funkce je spojitá pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

V tomto případě nebyl důkaz příliš obtížný, nicméně v obecném případě je třeba složitě hledat příslušné δ v závislosti na ε. Proto uvedeme několik jednoduchých obecných vět, které nám vyšetřování spojitosti velmi usnadní.

Věta 4.5 **(O spojitosti absolutní hodnoty, součtu, rozdílu, součinu a podílu.)** *Předpokládejme, že funkce f, g jsou spojité v bodě c. Potom také funkce $|f|$, $f + g$, $f - g$, fg jsou spojité v bodě c. Je-li navíc $g(c) \neq 0$, pak je v bodě c spojitá i funkce $\dfrac{f}{g}$.*

Důkaz. Důkaz provedeme pouze pro spojitost absolutní hodnoty, součtu a rozdílu, protože důkaz této věty je takřka totožný s důkazem věty o aritmetice limit posloupností.

1. Nechť $\varepsilon > 0$, potom z definice spojitosti existuje $\delta > 0$ tak, že platí

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon, \qquad \text{je-li } |x - c| < \delta.$$

Vzhledem k tomu, že platí nerovnost $||f(x)| - |f(c)|| < |f(x) - f(c)|$, kombinací předchozích dvou nerovností dostaneme

$$||f(x)| - |f(c)|| < \varepsilon, \qquad \text{je-li } |x - c| < \delta.$$

Tato nerovnost podle definice spojitosti znamená, že absolutní hodnota funkce spojité v bodě c, je také spojitá funkce v bodě c.

2., 3. Nechť $\varepsilon > 0$, potom z definice spojitosti existují δ_1, $\delta_2 > 0$ tak, že platí

$$|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{je-li } |x - c| < \delta_1, \tag{4.3}$$

$$|g(x) - g(c)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{je-li } |x - c| < \delta_2. \tag{4.4}$$

Položíme-li $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, platí zároveň (4.3) a (4.4). Potom pro x splňující nerovnost $|x - c| < \delta$ platí

$$|f(x) + g(x) - (f(c) + g(c))| \leq |f(x) - f(c)| + |g(x) - g(c)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x) - (f(c) - g(c))| &= |f(x) - f(c) + (g(c) - g(x))| \\ &\leq |f(x) - f(c)| + |g(c) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

První nerovnost podle definice spojitosti znamená, že součet dvou funkcí spojitých v bodě c, je také spojitá funkce v bodě c. Druhá nerovnost podle definice spojitosti znamená, že rozdíl dvou funkcí spojitých v bodě c, je také spojitá funkce v bodě c. □

Příklad 4.6 *Nechť $k, l \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, $l \geq 0$; $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ pro všechna $i, j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq i \leq k$, $0 \leq j \leq k$, $a_k \neq 0$ a $b_l \neq 0$. Potom je* **racionální lomená funkce $f(x) = \dfrac{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_0}{b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \ldots + b_0}$ spojitá v každém bodě, v němž je jmenovatel různý od nuly.**

Důkaz: *Nejprve dokážeme, že konstanta je spojitá funkce v každém bodě. Pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *a libovolné* $\varepsilon > 0$ *totiž platí nerovnost*

$$|f(x) - f(c)| = |a - a| = 0 < \varepsilon.$$

Tedy $\delta > 0$ *mohu dokonce volit libovolně a konstanta je spojitá funkce. V příkladu 4.4 jsme dokázali, že lineární funkce je spojitá pro všechna* $x \in \mathbb{R}$*. Potom podle věty o spojitosti součinu jsou funkce* $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x^2 \cdot x$, *...spojité pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *a podle věty o spojitosti součtu jsou i funkce*

$$a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_0, \qquad b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \ldots + b_0$$

spojité pro všechna $x \in \mathbb{R}$*. Nakonec podle věty o spojitosti podílu je funkce* $f(x) = \dfrac{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_0}{b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \ldots + b_0}$ *spojitá v každém bodě, v němž je jmenovatel různý od nuly.*

Například funkce $\dfrac{x}{x^2+1}$ *je spojitá pro všechna* $x \in \mathbb{R}$*, protože jmenovatel je kladný* $(x^2 + 1 > 0)$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 4.7 **Je-li $a > 0$, $a \neq 1$, je funkce $\log_a x$ spojitá v každém bodě $x > 0$.** *Důkaz:*

1. *Z druhé kapitoly víme, že* $\log_a x$ *je pro* $a > 1$ *rostoucí funkce v intervalu* $(0, \infty)$*. Tvrzení nejprve dokážeme pro* $\ln x$ *– to je rostoucí funkce, protože* $e = 2,718281828459\ldots > 1$*. Nechť* $c > 0$, $\varepsilon > 0$ *a zvolme* v_1, v_2 *tak, že*

$$\ln v_1 = \ln c - \varepsilon, \quad \ln v_2 = \ln c + \varepsilon, \quad tj. \quad v_1 = ce^{-\varepsilon}, \quad v_2 = ce^{\varepsilon}.$$

Tedy $v_1 < c < v_2$*. Nyní zvolme* $\delta > 0$ *tak, aby* $(c - \delta, c + \delta) \subset (v_1, v_2)$*. Potom pro všechna* $x \in (c - \delta, c + \delta)$ *je* $v_1 < x < v_2$ *a protože* $\ln x$ *je rostoucí, platí*

$$\ln c - \varepsilon = \ln v_1 < \ln x < \ln v_2 = \ln c + \varepsilon,$$

nebo-li $|\ln x - \ln c| < \varepsilon$ *a tedy* $\ln x$ *je spojitá v každém bodě* $x > 0$.

2. *Je-li nyní a libovolné* $(a > 0,\ a \neq 1,\ a \neq e,)$ *potom z věty o vlastnostech logaritmů víme, že*

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \qquad \textit{kde} \quad \ln a \neq 0.$$

O funkci $\ln x$ *již víme, že je spojitá v každém bodě* $x > 0$ *a funkce* $\ln a$ *je konstanta a ta je podle příkladu 4.6 spojitá v každém bodě* $x \in \mathbb{R}$ *a je různá od nuly. Můžeme tedy použít větu o spojitosti podílu a funkce* $\log_a x$ *je spojitá v každém bodě* $x > 0$.

Již známe větu o spojitostí součtu, rozdílu, součinu a podílu a nyní se budeme zabývat spojitostí složené funkce a spojitostí inverzní funkce.

Věta 4.8 **(O spojitosti složené funkce.)** *Předpokládejme, že funkce* g *je spojitá v bodě* c *a funkce* h *je spojitá v bodě* $d = g(c)$. *Potom i složená funkce* $h(g)$ *je spojitá v bodě* c.

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$. Potřebujeme najít $\delta > 0$ tak, že $\forall x$, pro něž je

$$|x - c| < \delta \qquad \text{platí} \qquad |h(g(x)) - h(g(c))| < \varepsilon.$$

Označíme-li $y = g(x)$, potom poslední nerovnost můžeme psát ve tvaru $|h(y) - h(d)| < \varepsilon$. Ale funkce h je podle předpokladu věty spojitá v bodě $d = g(c)$, existuje tedy $\delta_1 > 0$ tak, že $\forall y$, pro něž je

$$|y - d| < \delta_1 \qquad \text{platí} \qquad |h(g(x)) - h(g(c))| = |h(y) - h(d)| < \varepsilon. \tag{4.5}$$

Označili jsme $y = g(x)$, $d = g(c)$, ale funkce g je podle předpokladu věty spojitá v bodě c, existuje tedy $\delta > 0$ tak, že $\forall x$, pro něž je

$$|x - c| < \delta \qquad \text{platí} \qquad |g(x) - g(c)| = |y - d| < \delta_1. \tag{4.6}$$

Je-li nyní x libovolné číslo, pro něž platí nerovnost $|x - c| < \delta$, potom podle nerovnosti (4.6) platí $|g(x) - g(c)| = |y - d| < \delta_1$ a z nerovnosti (4.5) plyne, že $|h(g(x)) - h(g(c))| = |h(y) - h(d)| < \varepsilon$. Tedy složená funkce $h(g)$ je spojitá v bodě c. $\square$

Příklad 4.9 *Dokažme, že funkce* $\ln(x^2 + 1)$ *je spojitá* $\forall x \in \mathbb{R}$.

Položme $h(y) = \ln y$ *a* $y = g(x) = x^2 + 1$. *Podle příkladu 4.6 je funkce* g *spojitá* $\forall x \in \mathbb{R}$. *Dále* $y = g(x) = x^2 + 1 > 0$, *takže podle příkladu 4.7 je funkce* h *spojitá v bodě* $y = x^2 + 1$. *Tedy podle věty o spojitosti složené funkce je funkce* $h(g(x)) = \ln(x^2 + 1)$ *spojitá* $\forall x \in \mathbb{R}$.

V případě, že máme funkci f definovanou na uzavřeném intervalu $[a, b]$, potom podle naší definice spojitosti nemůžeme v krajních bodech tohoto intervalu vyšetřovat spojitost, protože $\forall \varepsilon > 0$ by mělo existovat $\delta > 0$ tak, že nerovnost $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ platí pro všechny hodnoty x, pro něž je $a - \delta < x < a + \delta$. Vzhledem k tomu, že funkce f není definována nalevo od bodu a, muselo by být $\delta = 0$, ale v definici spojitosti požadujeme $\delta > 0$. To nás přivádí k následujícím definicím.

Definice 4.10 *Řekneme, že funkce* f *je* **spojitá zprava v bodě** c, *jestliže* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *tak, že* $\forall x \in [c, c + \delta)$ *platí*

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Definice 4.11 *Řekneme, že funkce* f *je* **spojitá zleva v bodě** c, *jestliže* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *tak, že* $\forall x \in (c - \delta, c]$ *platí*

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Celá obrazovka
Začátek
Strana 81
Vyhledávání
◀ ▶
Zpět Vpřed
Zavřít
Ukončit

Vidíme, že definice spojitosti zprava a definice spojitosti zleva se podobají definici spojitosti. Platí následující věta:

Věta 4.12 *Funkce f je spojitá v bodě c, právě když je v bodě c spojitá zleva i zprava.*

Důkaz. Porovnáním definic spojitosti, spojitosti zprava a spojitosti zleva zjistíme, že je-li funkce spojitá v bodě c, pak je v bodě c spojitá zleva i zprava.

Je-li naopak funkce spojitá v bodě c zleva i zprava, potom podle definice spojitosti zprava a spojitosti zleva existují dvě čísla $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ tak, že nerovnost $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ platí jednak pro všechna x, pro něž je $c \leq x < c + \delta_1$ a jednak pro všechna x, pro něž je $c - \delta_2 \leq x < c$. Zvolíme-li nyní $\delta = \min\{\delta_1, \delta_1\}$, platí nerovnost $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ pro všechna x z intervalu $c - \delta < x < c + \delta$. Tedy funkce f je spojitá v bodě c. $\square$

Vnitřním bodem intervalu J nazveme každý bod intervalu J, který není jeho krajním bodem. Potom otevřený interval (a, b) se skládá pouze z vnitřních bodů nebo například polouzavřený interval $(a, b]$ se skládá z vnitřních bodů a z bodu b.

Definice 4.13 *Nechť funkce f je definována v intervalu J. Řekneme, že funkce f je* **spojitá v intervalu** J, *jestliže má tyto vlastnosti:*

- *Je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu J.*
- *Patří-li počáteční bod intervalu J k intervalu J, je funkce f spojitá v tomto bodě zprava.*
- *Patří-li koncový bod intervalu J k intervalu J, je funkce f spojitá v tomto bodě zleva.*

Poznámka 4.14 *Věta o spojitosti absolutní hodnoty, součtu, rozdílu, součinu a podílu platí i v případě, že v ní nahradíme slovo „spojitá" všude slovy „spojitá zprava" nebo všude slovy „spojitá zleva". Ale věta o spojitosti složené funkce neplatí, nahradíme-li v ní slovo „spojitá" všude slovy „spojitá zprava" nebo všude slovy „spojitá zleva". Platí však následující tvrzení:* **Je-li funkce g spojitá zprava (zleva) v bodě c a funkce h spojitá v bodě $g(c)$, potom je v bodě c spojitá zprava (zleva) i složená funkce $f = h(g)$.**

Nyní můžeme konečně přistoupit k vyslovení a důkazu věty o spojitosti inverzní funkce.

Věta 4.15 **(O spojitosti inverzní funkce.)** *Nechť f je ryze monotónní funkce, která je spojitá v intervalu J. Dále nechť funkce f zobrazuje interval J na interval J_1. Potom inverzní funkce f^{-1} k funkci f je spojitá v intervalu J_1.*

Důkaz. Především podle věty o existenci a jednoznačnosti inverzní funkce inverzní funkce f^{-1} existuje a zobrazuje interval J_1 na interval J. Potřebujeme dokázat, že funkce f^{-1} je spojitá zprava v každém bodě intervalu J_1, jenž není jeho koncovým bodem a že funkce f^{-1} je spojitá zleva v každém bodě intervalu J_1, jenž není jeho počátečním bodem. Dokážeme pouze první část tohoto tvrzení. Druhá část by se dokazovala podobně. Nechť $c \in J_1$ není koncovým bodem, položme $d = f^{-1}(c)$. Nechť $\varepsilon > 0$, chceme dokázat, že existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna y z intervalu $(c, c+\delta)$ platí $|f^{-1}(y) - f^{-1}(c)| < \varepsilon$. Důkaz první části můžeme ještě dále rozdělit na dva případy.

1. Nejprve předpokládejme, že funkce f je rostoucí, potom je rostoucí i funkce f^{-1}. Bod d není koncovým bodem intervalu J, existuje tedy bod $d_1 \in J$ tak, že $d < d_1 \leq d + \varepsilon$. Položme $c_1 = f(d_1)$, takže $d_1 = f^{-1}(c_1)$.

Poslední nerovnost můžeme přepsat do tvaru

$$f^{-1}(c) < f^{-1}(c_1) \leq f^{-1}(c) + \varepsilon.$$

Protože funkce f^{-1} je rostoucí, platí $c < c_1$. Položíme-li $\delta = c_1 - c$, je $\delta > 0$. Leží-li nyní y v intervalu $(c, c+\delta)$ (tj. v intervalu (c, c_1)), platí

$$f^{-1}(c) < f^{-1}(y) < f^{-1}(c_1) \leq f^{-1}(c) + \varepsilon.$$

Tedy $|f^{-1}(y) - f^{-1}(c)| < \varepsilon$ a funkce f^{-1} je spojitá zprava v bodě d.

2. Nyní předpokládejme, že funkce f je klesající, potom je klesající i funkce f^{-1}. Bod d není počátečním bodem intervalu J, existuje tedy bod $d_1 \in J$ tak, že $d > d_1 \geq d-\varepsilon$. Položme $c_1 = f(d_1)$, takže $d_1 = f^{-1}(c_1)$. Poslední nerovnost můžeme přepsat do tvaru

$$f^{-1}(c) > f^{-1}(c_1) \geq f^{-1}(c) - \varepsilon.$$

Protože funkce f^{-1} je klesající, platí $c < c_1$. Položíme-li $\delta = c_1 - c$, je $\delta > 0$. Leží-li nyní y v intervalu $(c, c+\delta)$ (tj. v intervalu (c, c_1)), platí

$$f^{-1}(c) > f^{-1}(y) > f^{-1}(c_1) \geq f^{-1}(c) - \varepsilon.$$

Tedy $|f^{-1}(y) - f^{-1}(c)| < \varepsilon$ a funkce f^{-1} je spojitá zprava v bodě d. □

Příklad 4.16 Funkce $\sqrt{x}$ je spojitá v intervalu $[0, \infty)$.

Inverzní funkce k funkci $\sqrt{x}$ na intervalu $[0,\infty)$ je funkce x^2 na intervalu $[0,\infty)$ (viz. příklad 2.17). Z příkladu 4.6 víme, že funkce x^2 je spojitá na intervalu $(-\infty,\infty)$ a tedy je spojitá i na intervalu $[0,\infty)$. Nakonec podle věty o spojitosti inverzní funkce je spojitá i funkce $\sqrt{x}$ v každém bodě $x \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 4.17 **Je-li $a > 0$, $a \neq 1$, je funkce a^x spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$.**

Funkce a^x je na intervalu $(-\infty, \infty)$ inverzní k funkci $\log_a x$ a tato funkce je podle příkladu 4.7 spojitá na intervalu $(0, \infty)$. Potom podle věty o spojitosti inverzní funkce je funkce a^x spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 4.18 **Je-li $n \in \mathbb{R}$, je funkce x^n spojitá v intervalu $(0, \infty)$.**

Položíme-li $z = e^y$, $y = n \ln x$, potom $z = e^{n \ln x} = x^n$. Podle příkladu 4.7 je funkce $\ln x$ spojitá na intervalu $(0, \infty)$, podle předchozího příkladu je spojitá i funkce e^y na intervalu $(-\infty, \infty)$. Potom podle věty o spojitosti složené funkce je na intervalu $(0, \infty)$ spojitá i funkce $e^{n \ln x} = x^n$.

2. Limita funkce

Budeme-li vyšetřovat funkci $f(x) = \dfrac{sin(x)}{x}$, zjistíme, že je definována v každém bodě různém od nuly. Proto nás bude průběh funkce f v okolí bodu 0 zajímat. Budeme-li do funkce f dosazovat za x hodnoty blízké nule, zjistíme, že hodnota funkce f se málo liší od jedničky – budeme říkat, že funkce f má v bodě $x = 0$ limitu 1 (v příkladu 4.33 tuto limitu spočítáme). Tím se dostáváme k definici limity funkce.

Definice 4.19 *Říkáme, že funkce f má v bodě c* **(vlastní) limitu** *$A \in \mathbb{R}$, jestliže $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že nerovnost*

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

je splněna pro všechny hodnoty x, pro něž je $0 < |x - c| < \delta$. Existuje-li limita funkce f v bodě c, budeme ji značit symbolem $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$.

Připomeňme, že nerovnosti $0 < |x - c| < \delta$ jsou splněny pro x z intervalu $(c - \delta, c + \delta)$, jež jsou různá od c. Zhruba řečeno definice limity říká, že pro hodnoty x blízké hodnotě c (ale různé od c) je hodnota $f(x)$ blízko hodnotě A. V definice limity se vůbec nehovoří o hodnotě $f(c)$. Funkce f nemusí být v bodě c vůbec definována a umožňuje tedy vyšetřování průběhu funkce v okolí (problematického) bodu c.

Podobně jako u spojitosti zavedeme také limitu zprava (při níž se staráme pouze o hodnoty x vpravo od c) a limitu zleva (při níž se staráme pouze o hodnoty x vlevo od c):

Definice 4.20 *Říkáme, že funkce f má v bodě c* **(vlastní) limitu zprava** $A \in \mathbb{R}$, *jestliže* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *tak, že*

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

je splněna pro všechna x z intervalu $(c, c + \delta)$. Existuje-li limita zprava funkce f v bodě c, budeme ji značit symbolem $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = A$.

Definice 4.21 *Říkáme, že funkce f má v bodě c* **(vlastní) limitu zleva** $A \in \mathbb{R}$, *jestliže* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *tak, že*

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

je splněna pro všechna x z intervalu $(c - \delta, c)$. Existuje-li limita zleva funkce f v bodě c, budeme ji značit symbolem $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = A$.

Podobně jako u limit posloupností můžeme i pro funkce zavést pojem nevlastní limity.

Definice 4.22 *Říkáme, že funkce f má v bodě c* **nevlastní limitu ∞**, *jestliže $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0$ tak, že nerovnost $f(x) > K$ je splněna pro všechna x, pro něž je $0 < |x - c| < \delta$. Tuto nevlastní limitu budeme značit symbolem $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$.*

Definice 4.23 *Říkáme, že funkce f má v bodě c* **nevlastní limitu $-\infty$**, *jestliže $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0$ tak, že nerovnost $f(x) < K$ je splněna pro všechna x, pro něž je $0 < |x - c| < \delta$. Tuto nevlastní limitu budeme značit symbolem $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty$.*

Obdobně jako pro vlastní limity bychom mohli zavést i jednostranné nevlastní limity.

Limita funkce f v bodě c popisuje průběh funkce f v okolí bodu c. Pro poznání průběhu funkce je však také důležité zjistit, co se s funkcí f děje, když buď x vzrůstá nade všechny meze, nebo x klesá pod všechny meze (tedy když se x na číselné ose vzdaluje od počátku buď směrem doprava nebo směrem doleva). Z tohoto důvodu zavádíme ještě následující dva pojmy.

Definice 4.24 *Budeme říkat, že*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A, \qquad \textit{je-li} \qquad \lim_{y\to 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right) = A$$

a budeme říkat, že

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A, \qquad \textit{je-li} \qquad \lim_{y\to 0^-} f\left(\frac{1}{y}\right) = A.$$

Pro limitu funkce můžeme odvodit a dokázat obdobné věty jako pro limitu posloupnosti.

Věta 4.25 **(O jednoznačnosti limity funkce.)** *Funkce f má v bodě c nejvýše jednu limitu (vlastní nebo nevlastní), a rovněž nejvýše jednu limitu zprava a nejvýše jednu limitu zleva.*

Důkaz této věty lze v případě vlastní limity provést obdobně jako důkaz věty o jednoznačnosti limity posloupnosti. Dále z definice vlastní limity plyne, že jestliže má funkce f v bodě c vlastní limitu, musí být v okolí bodu c omezená a tedy nemůže mít zároveň nevlastní limitu. Jestliže má funkce f v bodě c nevlastní limitu ∞, není podle definice v okolí bodu c shora omezená a tedy podle definice nemůže mít zároveň nevlastní limitu $-\infty$.

Poznámka 4.26 *Vyšetřujeme-li limitu (popřípadě limitu zprava nebo zleva) funkce f v bodě c potom* **může nastat právě jeden z následujících případů:**

- *existuje vlastní limita,*
- *existuje nevlastní limita ∞,*
- *existuje nevlastní limita $-\infty$,*
- *neexistuje ani vlastní ani nevlastní limita.*

V případě spojitosti jsme dokázali větu, že funkce f je spojitá v bodě c, právě když je spojitá v bodě c zprava i zleva. Stejnou větu dokážeme i pro limity. Důkaz této věty bychom mohli provést takřka totožně jako u podobné věty pro spojitost. Z tohoto důvodu ho nebudeme uvádět.

Věta 4.27 (Nutná a postačující podmínka existence limity.) *Rovnice* $\lim_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}$ *platí tehdy a jen tehdy, je-li*

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = A.$$

Nápadná podobnost definice spojitosti a definice limity nás vede k domněnce, že mezi spojitostí a limitou je úzký vztah. Nahradíme-li v definici spojitosti nerovnost $|x-c| < \delta$ nerovností $0 < |x-c| < \delta$ (což smíme, protože pro $x = c$ je nerovnost (4.1) z definice spojitosti stejně vždy splněna, neboť $|f(c) - f(c)| = 0 < \varepsilon$), vidíme, že se obě definice vůbec neliší. Tím dostáváme větu:

Věta 4.28 (O limitě spojité funkce.) *Funkce* f *je v bodě* c *spojitá tehdy a jen tehdy, je-li*

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

Příklad 4.29 *Funkce* $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ *je podle příkladu 4.6 spojitá, takže podle předchozí věty můžeme dosazením spočítat, že* $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$.

Příklad 4.30 *Nyní definujme funkci* g *a zkoumejme její spojitost v bodě* $x = 0$.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1} & \text{pro } x \neq 0 \\ 1 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Opět máme

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+1} = 0,$$

ale $g(0) = 1$. *Funkce* g *tedy není spojitá v bodě* $x = 0$.

Srovnáme-li definici spojitosti zprava s definicí limity zprava a definici spojitosti zleva s definicí limity zleva obdržíme následující větu:

Věta 4.31 *Funkce* f *je v bodě* c *spojitá zprava (zleva) tehdy a jen tehdy, je-li*

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c) \qquad \left(\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)\right).$$

Vzhledem k podobnosti definice limity funkce a definice limity posloupnosti se dá předpokládat, že pro limity funkcí budou platit obdobné věty k větám dokázaným pro limity posloupností v předchozí kapitole. Nejdůležitější z nich si nyní připomeneme.

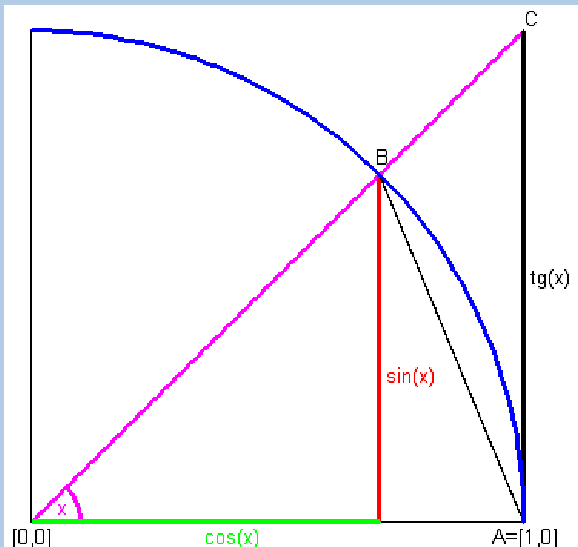
Věta 4.32 **(O limitě sevřené funkce.)** *Nechť* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *dále nechť existuje kladné číslo* δ *tak, že pro všechna* x *z intervalu* $(c-\delta, c+\delta)$ *platí* $f \le g \le h$. *Potom platí* $\lim\limits_{x\to c} g(x) = A$. *(Věta platí i pro limitu zleva a limitu zprava.)*

Důkaz je takřka stejný jako u obdobné věty o limitě sevřené posloupnosti, proto ho nebudeme uvádět.

Příklad 4.33 *Ukážeme si, jak aplikovat předchozí větu. Spočtěme* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$. *Nechť* $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. *Z obrázku plyne, že mezi obsahem* $S_{\Delta 0AB} = \dfrac{\sin x}{2}$ *trojúhelníku* $0AB$, *obsahem výseče* $S_{0AB} = \pi\dfrac{x}{2\pi} = \dfrac{x}{2}$ *(obsah jednotkové kruhu je* π

a obsahu výseče o velikosti úhlu x odpovídá poměrná část $\frac{x}{2\pi}$ obsahu kruhu) *a obsahem $S_{\Delta 0AC} = \frac{\mathrm{tg} x}{2}$ trojúhelníku $0AC$ platí nerovnosti*

$$S_{\Delta 0AB} < S_{0AB} < S_{\Delta 0AC}. \tag{4.7}$$



Obrázek 4.3: Vztahy mezi obsahy jednotlivých obrazců.

Dosadíme-li do nerovností (4.7), dostaneme

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\mathrm{tg} x}{2} = \frac{\sin x}{2\cos x}, \qquad \textit{nebo-li} \qquad \cos x < \frac{\sin(x)}{x} < 1 \tag{4.8}$$

pro $0 < x < \frac{\pi}{2}$ *(předposlední nerovnost jsme vydělili kladným číslem* $\frac{\sin x}{2}$ *a poté jsme tyto nerovnosti přepsali pro převrácené hodnoty, čímž se obrátili nerovnosti).*

Z věty o vlastnostech funkcí sinus a kosinus víme, že $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$. *A podle (4.8) je* $\frac{\sin(x)}{x} < 1$, *nebo-li* $\sin(x) < x$, *tedy také* $\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$ *a společně s nerovnostmi (4.8) máme*

$$1 - \frac{x^2}{2} < 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} = \cos x < \frac{\sin(x)}{x} < 1 \qquad \textit{pro } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Nyní si uvědomme, že všechny funkce v předchozí nerovnosti jsou sudé a tedy tato nerovnost platí i pro $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. *Ze spojitosti funkcí* $1 - \frac{x^2}{2}$ *a* 1 *v bodě* 0 *je podle věty o limitě spojité funkce*

$$\lim_{x\to 0^-} 1 - \frac{x^2}{2} = \lim_{x\to 0^+} 1 - \frac{x^2}{2} = 1, \qquad \lim_{x\to 0^-} 1 = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$$

Tedy podle věty o limitě sevřené funkce je $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. *Celkem tedy máme*

$$\lim_{\mathbf{x}\to \mathbf{0}} \frac{\sin \mathbf{x}}{\mathbf{x}} = \mathbf{1}.$$

Věta 4.34 (O aritmetice limit funkcí.) *Nechť* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to c} g(x) = B \in \mathbb{R}$. *Potom platí*

$$\lim_{x\to c} |f(x)| = |A|, \qquad \lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = A + B,$$

$$\lim_{x\to c} (f(x) - g(x)) = A - B, \qquad \lim_{x\to c} (f(x)g(x)) = AB.$$

Je-li navíc $B \neq 0$, *pak je*
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Věta zůstane v platnosti, nahradíme-li v ní „limity" „limitami zprava" nebo „limitami zleva". Důkaz této věty je takřka totožný s důkazy věty o spojitosti absolutní hodnoty, součtu, rozdílu, součinu a podílu a věty o aritmetice limit posloupností, proto ho nebudeme provádět.

Poznámka 4.35 *Většina dříve dokázaných vět týkajících se vlastních limit lze stejným způsobem jako u limit posloupností rozšířit i na nevlastní limity. Bez omezení lze pro nevlastní limity vyslovit větu o jednoznačnosti limity funkce, nutnou a postačující podmínku existence limity a větu o limitě sevřené funkce. Pouze v případě věty o aritmetice limit je třeba doplnit předpoklad* **„pokud pravá strana existuje"**, *abychom se vyvarovali případů, kdy některá operace s nekonečny není definována.*

Příklad 4.36 Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou spojité v intervalu $(-\infty, \infty)$.

Důkaz: *Nechť* x_0 *je libovolný bod. Podle věty o limitě spojité funkce stačí dokázat*

$$\lim_{h\to 0} \sin(x_0 + h) = \sin x_0, \qquad \lim_{h\to 0} \cos(x_0 + h) = \cos x_0, \qquad \textit{nebo-li}$$

$$\lim_{h\to 0}\,(\sin(x_0+h)-\sin x_0)=0, \qquad \lim_{h\to 0}\,(\cos(x_0+h)-\cos x_0)=0.$$

Z věty o vlastnostech funkcí sinus a kosinus víme, že

$$\cos(x_0+h)-\cos x_0 = -2\sin\frac{2x_0+h}{2}\sin\frac{h}{2}$$

$$= -2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{h}{2}\sin x_0 - 2\sin^2\frac{h}{2}\cos x_0 = -\sin h\sin x_0 - 2\sin^2\frac{h}{2}\cos x_0.$$

Z příkladu 4.33 víme, že $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}$. *Potom podle věty o aritmetice limit funkcí máme* $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{\sin h}{h}\cdot h\right) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}\lim\limits_{h\to 0} h = 1\cdot 0 = 0$, *tedy také* $\lim\limits_{h\to 0}\,\sin\dfrac{h}{2}=0$. *Nakonec dostaneme*

$$\lim_{h\to 0}\,(\cos(x_0+h)-\cos x_0) = \lim_{h\to 0}\,\left(-\sin h\sin x_0 - 2\sin^2\frac{h}{2}\cos x_0\right)$$

$$= -\sin x_0\lim_{h\to 0}\sin h - 2\cos x_0\lim_{h\to 0}\sin^2\frac{h}{2} = 0.$$

Tím jsme dokázali, že funkce $\cos$ *je spojitá v intervalu* $(-\infty,\infty)$.

Využitím věty o vlastnostech funkcí sinus a kosinus a spojitosti funkce $\cos$ *dostaneme*

$$\lim_{h\to 0}\,\sin(x_0+h) = \lim_{h\to 0}\,\cos\left(x_0+h-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x_0-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x_0.$$

Tedy i funkce $\sin$ *je spojitá v intervalu* $(-\infty,\infty)$.

Nakonec dokážeme větu podobnou větě o spojitosti složené funkce.

Věta 4.37 **(O limitě složené funkce.)** *Nechť* $\lim\limits_{x\to c} g(x) = d$ *a* $\lim\limits_{y\to d} h(y) = k$*. Dále nechť existuje* $\delta > 0$ *tak, že nerovnost* $g(x) \neq d$ *platí pro všechna* x*, pro něž je* $0 < |x - c| < \delta$*. Potom je* $\lim\limits_{x\to c} h(g(x)) = k$*.*

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$. Potřebujeme najít $\delta_3 > 0$ tak, že $\forall x$, pro něž je

$$0 < |x - c| < \delta_3 \qquad \text{platí} \qquad |h(g(x)) - k| < \varepsilon.$$

Označíme-li $y = g(x)$, potom poslední nerovnost můžeme psát ve tvaru $|h(y) - k| < \varepsilon$. Ale $\lim\limits_{y\to d} h(y) = k$, podle definice limity existuje $\delta_1 > 0$ tak, že $\forall y$, pro něž je

$$0 < |y - d| < \delta_1 \qquad \text{platí} \qquad |h(g(x)) - k| = |h(y) - k| < \varepsilon. \tag{4.9}$$

Označili jsme $y = g(x)$ a $\lim\limits_{x\to c} g(x) = d$, potom podle definice limity existuje $\delta_2 > 0$ tak, že $\forall x$, pro něž je

$$0 < |x - c| < \delta_2 \qquad \text{platí} \qquad |g(x) - d| = |y - d| < \delta_1. \tag{4.10}$$

Zvolíme-li $\delta_3 = \min\{\delta, \delta_2\}$ a je-li x libovolné číslo, pro něž platí nerovnost $0 < |x - c| < \delta_3$, potom je podle předpokladu věty $g(x) \neq d$ a tedy v (4.10) je $0 < |g(x) - d| = |y - d| < \delta_1$ a podle (4.9) je $|h(g(x)) - k| < \varepsilon$. $\square$

3. Technika počítání limit

Příklad 4.38 *Vypočtěme* $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$.

Limitu nelze počítat přímo podle věty o aritmetice limit funkcí, neboť $\lim\limits_{x\to -1} (x^2 - 1) = 0$*. Nicméně ze skutečnosti, že* $\lim\limits_{x\to -1} (x^3 + 1) = 0$ *můžeme* *usoudit, že oba mnohočleny mají společného dělitele a tím je člen $x+1$. Nejprve tedy vytkneme $x+1$, poté tento člen zkrátíme a nakonec použijeme větu o aritmetice limit funkcí.*

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-x+1}{x-1}$$

$$= \frac{\lim_{x\to -1}\,(x^2-x+1)}{\lim_{x\to -1}\,(x-1)} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}.$$

Příklad 4.39 *Vypočtěme* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

Podobně jako v předchozím příkladu nelze přímo použít větu o aritmetice limit funkcí, neboť opět bychom dostali neurčitý výraz $\dfrac{0}{0}$. *V tomto případě naopak zlomek rozšíříme výrazem* $\sqrt{x}+1$, *poté zkrátíme* $x-1$ *a nakonec opět použijeme větu o aritmetice limit funkcí.*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\lim_{x\to 1}\,1}{\lim_{x\to 1}\,(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}.$$

Příklad 4.40 *Vypočtěme* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3}$.

1. *Nejprve dokážeme, že* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^3} = \infty$.

Tento výsledek plyne z toho, že pro x napravo od nuly je zlomek $\frac{1}{x^3}$ *vždy kladný, dělíme tedy jedničku čím dál menším kladným číslem – výsledek tedy bude čím dál větší kladné číslo. Pokud bychom chtěli postupovat přesně (viz.* definice nevlastní limity ∞*), tak potřebujeme dokázat, že pro každé* $K \in \mathbb{R}$ *existuje* $\delta > 0$*, tak, že nerovnost* $\frac{1}{x^3} > K$ *platí pro všechna x z intervalu* $(0, \delta)$*. K nalezení příslušného δ použijeme následující řetězec implikací.*

$$\frac{1}{x^3} > K \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} > \sqrt[3]{K} \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{1}{\sqrt[3]{K}}.$$

Tedy pro libovolné $K \in \mathbb{R}$ *lze zvolit* $\delta = \frac{1}{\sqrt[3]{K}}$ *a nerovnost* $\frac{1}{x^3} > K$ *platí pro všechna x z intervalu* $(0, \delta)$*. Tím jsme dokázali, že* $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} = \infty$.

2. *Obdobně dokážeme, že* $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$.

Tento výsledek plyne z toho, že pro x nalevo od nuly je zlomek $\frac{1}{x^3}$ *vždy záporný, dělíme tedy jedničku čím dál menším záporným číslem – výsledek tedy bude záporné číslo, které bude v absolutní hodnotě čím dál tím větší. Přesně tedy (viz.* definice nevlastní limity $-\infty$*) potřebujeme dokázat, že pro každé* $K \in \mathbb{R}$ *existuje* $\delta > 0$*, tak, že nerovnost* $\frac{1}{x^3} < K$ *platí pro všechna x z intervalu* $(-\delta, 0)$*. K nalezení příslušného δ použijeme následující řetězec implikací.*

$$\frac{1}{x^3} < K \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} < \sqrt[3]{K} \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{1}{\sqrt[3]{K}}.$$

Tedy pro libovolné $K \in \mathbb{R}$ lze zvolit $\delta = \dfrac{1}{\sqrt[3]{K}}$ a nerovnost $\dfrac{1}{x^3} < K$ platí pro všechna x z intervalu $(-\delta, 0)$. Tím jsme dokázali, že $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^3} = -\infty$.

Vzhledem k tomu, že limita zprava a limita zleva jsou různé, tak

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \quad \textit{neexistuje !}$$

Příklad 4.41 *Vypočtěme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{x^2}$.*

V tomto případě můžeme rovnou použít větu o aritmetice limit funkcí.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} (x-1) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = -1 \cdot \infty = -\infty.$$

Při výpočtu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$ můžeme postupovat stejně jako v předchozím příkladu. Funkce $\dfrac{1}{x^2}$ není opět v okolí bodu 0 omezená, jediný rozdíl spočívá v tom, že tato funkce je sudá, takže $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = \infty$.

Příklad 4.42 *Vypočtěme $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x-1}{x+1}$.*

Výpočet této limity můžeme převést transformací $x = \dfrac{1}{y}$ na:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{1}{y}-1}{\frac{1}{y}+1} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{1-y}{y}}{\frac{1+y}{y}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1-y}{1+y} = \frac{1}{1} = 1.$$

Příklad 4.43 *Ukážeme si ještě jednu aplikaci věty o limitě sevřené funkce. Spočtěme* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$. *Nejprve si uvědomme, že pro libovolné* $x \in \mathbb{R}$ *platí následující nerovnosti:*

$$\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Dále $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-1}{x} = \lim\limits_{y\to 0^+} -y = 0$ *a* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{y\to 0^+} y = 0$. *Tedy podle věty o limitě sevřené funkce i* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0.$

Příklad 4.44 *Spočtěme* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

1. *Nejprve dokážeme, že posloupnost, jejíž n-tý člen je* $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, *je klesající a má limitu e. Platí*

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} = 1 + \binom{n+2}{1}\frac{1}{n(n+2)} + \binom{n+2}{2}\frac{1}{n^2(n+2)^2} + \dots$$
$$+ \binom{n+2}{n+2}\frac{1}{n^{n+2}(n+2)^{n+2}} > 1 + \binom{n+2}{1}\frac{1}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n}$$

(předchozí nerovnost platí, protože na levé straně jsme vynechali všechny kladné členy až na první dva) a protože $n(n+2)+1 = n^2+2n+1 = (n+1)^2$,

máme

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{n} &= 1+\frac{1}{n} < \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \\ &= \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2},\end{aligned}$$

nebo-li

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} < \frac{n}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Tedy posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ *je klesající. Dále podle definice e je*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

A tedy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e$ *pro* $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. *Nyní spočteme* $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{x}$. *Nechť* $0 < x < \frac{1}{2}$. *Zvolíme-li* $n = \left[\frac{1}{x}\right]$, *potom*

$$2 \le n \le \frac{1}{x} < n+1 \qquad \frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n}. \tag{4.11}$$

Z lemmatu 3.34 a z **1.** *víme, že*

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}.$$

Zkombinujeme-li dohromady předchozí nerovnosti s nerovnostmi (4.11) dostaneme

$$1+\frac{1}{n+1} < \sqrt[n+1]{e} < e^x \le \sqrt[n]{e} < 1+\frac{1}{n-1}. \tag{4.12}$$

Podle (4.11) platí

$$n-1 > \frac{1}{x}-2 = \frac{1-2x}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n-1} < \frac{x}{1-2x},$$

$$n+1 \le \frac{1}{x}+1 = \frac{1+x}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} \ge \frac{x}{1+x}.$$

Dosadíme-li tyto nerovnosti do (4.12), obdržíme

$$1+\frac{x}{1+x} \le 1+\frac{1}{n+1} < e^x < 1+\frac{1}{n-1} < 1+\frac{x}{1-2x}. \tag{4.13}$$

Odečteme-li jedničku a vydělíme-li tyto nerovnosti kladným číslem x, platí

$$\frac{1}{1+x} < \frac{e^x-1}{x} < \frac{1}{1-2x} \qquad \text{pro } 0 < x < \frac{1}{2}. \tag{4.14}$$

Ze spojitosti funkcí $\dfrac{1}{1+x}$ a $\dfrac{1}{1-2x}$ v bodě 0 je podle věty o limitě spojité funkce

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+0} = 1, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-2x} = \frac{1}{1-2\cdot 0} = 1.$$

Tedy podle věty o limitě sevřené funkce je $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1.$

3. *Nakonec spočteme* $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x}$. *Nechť* $-\frac{1}{2} < x < 0$. *Zvolíme-li* $y=-x$, *potom podle (4.13) platí*

$$\frac{1+2y}{1+y} = 1 + \frac{y}{1+y} < e^y < 1 + \frac{y}{1-2y} = \frac{1-y}{1-2y}.$$

Nyní dosadíme zpět $y = -x$ a zároveň přepíšeme poslední nerovnosti pro převrácené hodnoty, potom $\dfrac{1}{e^y} = e^x$ a obě nerovnosti se obrátí

$$\frac{1+2x}{1+x} < e^x < \frac{1-x}{1-2x} \qquad \text{pro } -\frac{1}{2} < x < 0.$$

Odečteme-li jedničku a vydělíme-li tyto nerovnosti záporným číslem x, platí

$$\frac{x}{1+x} < e^x - 1 < \frac{x}{1-2x} \qquad a \qquad \frac{1}{1-2x} < \frac{e^x-1}{x} < \frac{1}{1+x}$$

pro $-\frac{1}{2} < x < 0$. Ze spojitosti funkcí $\dfrac{1}{1+x}$ a $\dfrac{1}{1-2x}$ v bodě 0 opět podle věty o limitě spojité funkce máme

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+0} = 1, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1-2x} = \frac{1}{1-2\cdot 0} = 1.$$

Tedy podle věty o limitě sevřené funkce je $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

Celkem z **2.** *a z* **3.** *máme*

$$\lim_{\mathbf{x}\to \mathbf{0}} \frac{\mathbf{e^x - 1}}{\mathbf{x}} = \mathbf{1}.$$

Příklad 4.45 *Spočtěme* $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2-1}-1}{x^2-1}$.

$\lim_{x\to 1} x^2 - 1 = 0$ a podle příkladu 4.44 je $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$. Abychom mohli využít větu o limitě složené funkce, potřebujeme dokázat, že existuje $\delta > 0$ tak, že nerovnost $x^2 - 1 \neq 0$ platí pro všechna x, pro něž je $0 < |x - 1| < \delta$. Ale vzhledem k tomu, že $x^2 - 1 = 0$ pouze v bodech $x = 1$ a $x = 1$, stačí zvolit $\delta = 2$ a $x^2 - 1 \neq 0$ platí pro všechna x, pro něž je $0 < |x - 1| < 2$. A tedy

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2-1} - 1}{x^2 - 1} = 1.$$

Celá obrazovka
Začátek
Strana 103
Vyhledávání
◀ ▶
Zpět Vpřed
Zavřít
Ukončit

Kapitola 5

Derivace

1. Definice a základní vlastnosti

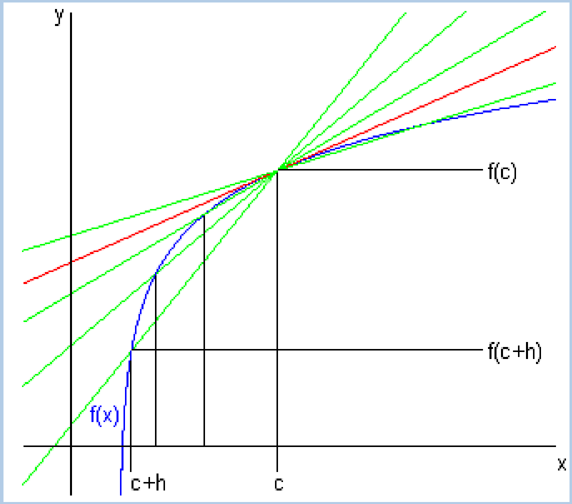
Nechť je dána funkce f a zvolme bod $[c, f(c)]$. Nyní se pokusíme zavést pojem tečny ke křivce $y = f(x)$ v bodě $[c, f(c)]$. Zvolíme-li na křivce $y = f(x)$ další libovolný bod $[c+h, f(c+h)]$, potom přímka procházející oběma body (sečna) má směrnici

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{(c+h) - c} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Blíží-li se nyní bod $[c+h, f(c+h)]$ k bodu $[c, f(c)]$, tedy blíží-li se h k nule, potom na obrázku vidíme, že příslušná sečna se blíží k červeně znázorněné limitě. Existuje-li vlastní limita

$$k = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h},$$

potom **tečnou** ke křivce $y = f(x)$ v bodě $[c, f(c)]$ budeme rozumět přímku určenou rovnicí $y - f(c) = k(x - c)$ (tato přímka prochází bodem $[c, f(c)]$ a má směrnici k).



Obrázek 5.1: Sečny a tečna.

Vzhledem k významu, který má $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$ v matematice i fyzice, můžeme po motivačních úvahách z předešlého odstavce přistoupit k definici derivace:

Definice 5.1 *Nechť f je funkce a x číslo. Limitu*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

nazveme **derivací funkce f má v bodě x** *a označíme ji symbolem $f'(x)$. Obdobně nazýváme limitu*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \qquad \left(resp. \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$

derivací zprava (zleva) funkce f v bodě x. *Označovat je budeme symbolem $f'_+(x)$, (resp. $f'_-(x)$). Neexistuje-li první, (popř. druhá, popř. třetí) z těchto limit, říkáme, že* **funkce f nemá v bodě x derivaci, (popř. derivaci zprava, popř. derivaci zleva)**. *Výše zmíněné limity mohou být vlastní nebo nevlastní, pak mluvíme o* **vlastní nebo nevlastní derivaci**.

Definice 5.2 *Nechť f je funkce a x číslo. Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) limita*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

říkáme, že **funkce f má v bodě x druhou (vlastní nebo nevlastní) derivaci** *a označíme ji $f''(x)$. Podobně se definují i derivace vyšších řádů. Značíme je $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$, $f^{(5)}(x)$, ...*

Stejným způsobem jako v definici derivace můžeme definovat druhou derivaci zprava (zleva), eventuálně derivace vyšších řádů.

Poznámka 5.3 *Má-li funkce f vlastní derivaci v bodě x, potom existuje číslo $\delta > 0$ tak, že funkce f je definována v intervalu $(x-\delta, x+\delta)$.*

Poznámka 5.4 *Dále upozorněme, že derivace funkce f v bodě x závisí na tom, jakou hodnotu x jsme zvolili. Derivace funkce f v bodě x je tedy funkcí proměnné x. Označíme-li $y = f(x)$, můžeme také psát $\frac{dy}{dx}$ místo f' a $\frac{d^2y}{dx^2}$ místo f''.* **Definičním oborem funkce f'** *je množina všech bodů, v nichž má funkce f vlastní derivaci.*

Poznámka 5.5 **Fyzikální význam derivace:** *Popisuje-li funkce f proměnné t polohu hmotného bodu na přímce v čase t, potom derivace f' v bodě t představuje okamžitou rychlost v čase t. Druhá derivace f'' v bodě t představuje zrychlení v čase t.*

Věta 5.6 **(Nutná a postačující podmínka existence derivace.)** *Rovnice $f'(a) = A$ platí tehdy a jen tehdy, je-li $f'_+(a) = f'_-(a) = A$ (platí pro vlastní i nevlastní derivaci).*

Důkaz plyne z nutné a postačující podmínky existence limity a z poznámky 4.35.

Věta 5.7 **Má-li funkce f v bodě a vlastní derivaci (resp. vlastní derivaci zprava nebo vlastní derivaci zleva), je funkce f v bodě a spojitá (resp. spojitá zprava nebo spojitá zleva).**

Důkaz. Existuje-li vlastní derivace $f'(a)$, potom platí

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) - f(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Tedy podle věty o limitě spojité funkce je funkce f v bodě a spojitá. (U posledního rovnítka jsme využili předpokladu existence vlastní derivace. Pro nevlastní derivaci by poslední krok nebylo možno provést, protože bychom dostali neurčitý výraz typu $\pm\infty \cdot 0$!) $\square$

Poznámka 5.8 **Opačná implikace neplatí – spojitá funkce nemusí mít derivaci!** *Podívejme se např. na funkci $f(x) = |x|$, která je v počátku souřadnic spojitá, ale nemá tam derivaci, v bodě 0 má derivaci zprava rovnou 1 a derivaci zleva rovnou -1.*

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{h}{h} = 1.$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{-h}{h} = -1.$$

2. Počítání derivací

Příklad 5.9 *Spočtěme podle definice derivaci konstantní a lineární funkce pro $x \in \mathbb{R}$.*

$$(c)' = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

$$(x)' = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

Příklad 5.10 *Spočtěme podle definice derivaci funkce $f(x) = e^x$ pro $x \in \mathbb{R}$.*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

Poslední rovnost plyne z příkladu 4.44.

Příklad 5.11 *Spočtěme podle definice derivaci funkcí* $\sin$ *a* $\cos$ *pro* $x \in \mathbb{R}$.

Z věty o vlastnostech funkcí sinus a kosinus víme, že

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos\frac{2x+h}{2} \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}}{h} = \cos x.$$

Protože ze spojitosti funkce $\cos$ *plyne, že* $\lim\limits_{h\to 0} \cos\frac{2x+h}{2} = \cos x$ *a a z příkladu 4.33 víme, že* $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$, *dále* $\lim\limits_{h\to 0} \frac{h}{2} = 0$ *a funkce* $\frac{h}{2} \neq 0$ *dokonce pro všechna* h *různá od nuly, jsou tedy splněny předpoklady věty o limitě složené funkce a platí:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1.$$

Podobně pro funkci $\cos$, *z věty o vlastnostech funkcí sinus a kosinus víme, že*

$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin\frac{2x+h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\sin\frac{2x+h}{2} \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}}{h} = -\sin x.$$

Protože ze spojitosti funkce $\sin$ *plyne, že* $\lim\limits_{h\to 0} \sin\frac{2x+h}{2} = \sin x$.

Příklad 5.12 *Je-li* $n \in \mathbb{N}$, *spočtěme podle definice derivaci funkcí* x^n *pro* $x \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}h + \ldots + \binom{n}{n} h^{n-1} \right) = nx^{n-1},
\end{aligned}
$$

protože pro $h \to 0$ mají všechny členy, kromě prvního, limitu 0.

Podle definice můžeme počítat derivaci pouze pro jednoduché funkce. Abychom mohli počítat derivace efektivněji, odvodíme několik obecných vět.

Věta 5.13 **(O derivaci součtu, součinu a podílu.)** *Nechť c_1, c_2 jsou dvě konstanty a f, g nechť jsou dvě funkce, které mají vlastní derivaci v bodě a. Potom funkce $c_1 f + c_2 g$ má v bodě a derivaci $c_1 f'(a) + c_2 g'(a)$, funkce fg má v bodě a derivaci $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ a je-li $g(a) \neq 0$, má funkce $\frac{f}{g}$ v bodě a derivaci*

$$
\frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.
$$

Důkaz. Zvolme $h \neq 0$ tak, aby funkce f, g byly definovány na intervalu $[a - h, a + h]$. Navíc v případě **3.** tak, aby $g(x) \neq 0$ na intervalu $[a-h, a+h]$. Podle předpokladu věty mají funkce f, g v bodě a vlastní derivaci a tedy $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, $g'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(a+h) - g(a)}{h}$. Dále podle věty 5.7 jsou funkce f, g spojité v bodě a, tedy $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$, $\lim\limits_{h\to 0} g(a+h) = g(a)$. Nyní vyjádříme derivaci součtu, součinu a podílu pomocí výše zmíněných limit.

1. $$(c_1 f + c_2 g)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{c_1 f(a+h) + c_2 g(a+h) - (c_1 f(a) + c_2 g(a))}{h}$$

$$= c_1 \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + c_2 \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = c_1 f'(a) + c_2 g'(a).$$

2. $$(fg)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a+h)g(a) + f(a+h)g(a) - f(a)g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a+h)g(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(a+h) \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} + g(a) \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= f(a)g'(a) + g(a)f'(a).$$

3. $$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a+h)}{g(a)g(a+h)h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(a+h)}{h} \, \frac{1}{g(a)g(a+h)}\right)$$

$$= \left(g(a) \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f(a) \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}\right) \frac{1}{g(a)} \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(a+h)}$$

$$= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

□

Příklad 5.14 *Podle věty o derivaci podílu a pomocí výsledků z příkladů 5.11, 5.12 spočteme:*

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \textit{pokud } \cos x \neq 0,$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} \quad \textit{pokud } \sin x \neq 0.$$

Pro $x \neq 0$ a celé záporné n máme

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' = \frac{0 - (-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{n-1}.$$

Příklad 5.15 *Jestliže umíme zderivovat některé funkce, potom můžeme podle věty o derivaci součtu, součinu a podílu zderivovat i všechny funkce, které dostaneme konečným počtem sčítání, odčítání, násobení a dělení těchto funkcí. Například u následujícího příkladu postupně použijeme vzorec pro derivaci podílu, rozdílu a součinu. Nakonec použijeme základní vzorce odvozené v příkladech 5.10 a 5.11.*

$$\begin{aligned}
\left(\frac{e^x \sin x - \cos x}{x}\right)' &= \frac{(e^x \sin x - \cos x)'x - (e^x \sin x - \cos x)(x)'}{x^2} \\
&= \frac{(e^x \sin x)'x - (\cos x)'x - (e^x \sin x - \cos x)(x)'}{x^2} \\
&= \frac{xe^x(\sin x)' + x(e^x)' \sin x - (\cos x)'x - (e^x \sin x - \cos x)(x)'}{x^2} \\
&= \frac{xe^x \cos x + xe^x \sin x + x \sin x - e^x \sin x + \cos x}{x^2} \quad \textit{pro } x \in \mathbb{R},\ x \neq 0.
\end{aligned}$$

Věta 5.16 **(O derivaci inverzní funkce.)** *Nechť x_0 je vnitřní bod intervalu I a f nechť je spojitá funkce, která je v intervalu I buď rostoucí nebo klesající. Dále nechť funkce f^{-1}, inverzní k funkci f, má v bodě $y_0 = f(x_0)$ vlastní derivaci různou od nuly. Potom má funkce f v bodě x_0 derivaci $f'(x_0) = \dfrac{1}{(f^{-1})'(y_0)}$.*

Důkaz. Je $y_0 = f(x_0)$ a tedy platí $f^{-1}(y_0) = f^{-1}(f(x_0)) = x_0$. Obdobně pro $x \neq x_0,\ x \in I$ je $y = f(x)$ a tedy opět $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$. Potom máme

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = 1 : \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$
$$= 1 : \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}.$$

Nyní $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, funkce f je buď rostoucí nebo klesající v intervalu I, takže $f(x) \neq y_0$ pro $x \neq x_0,\ x \in I$ a $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = (f^{-1})'(y_0)$, můžeme tedy použít větu o limitě složené funkce a dostaneme, že

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = (f^{-1})'(y_0).$$

Celkem tedy máme

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1 : \lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{(f^{-1})'(y_0)}.$$

□

Příklad 5.17 *Podle věty o derivaci inverzní funkce a pomocí výsledků z příkladů 5.10, 5.11, 5.14 spočteme:*

1. *V intervalu* $x \in (0, \infty)$ *je* $\ln x$ *rostoucí a spojitá funkce. K ní inverzní je funkce* e^y *a její derivace* $(e^y)' = e^y$ *je různá od nuly pro* $\forall y \in \mathbb{R}$, *píšeme-li* $x = e^y$, *je* $\ln x = \ln e^y = y$, *můžeme tedy aplikovat větu o derivaci inverzní funkce*

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

2. *V intervalu* $x \in (-1, 1)$ *je* $\arcsin x$ *rostoucí a spojitá funkce. K ní inverzní je funkce* $\sin y$ *na intervalu* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *a její derivace* $(\sin y)' = \cos y$ *je na tomto intervalu různá od nuly. Píšeme-li* $x = \sin y$, *je* $\arcsin x = \arcsin \sin y = y$, *můžeme tedy aplikovat větu o derivaci inverzní funkce*

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. *V intervalu* $x \in (-1, 1)$ *je* $\arccos x$ *klesající a spojitá funkce. K ní inverzní je funkce* $\cos y$ *na intervalu* $(0, \pi)$ *a její derivace* $(\cos y)' = -\sin y$ *je na tomto intervalu různá od nuly. Píšeme-li* $x = \cos y$, *je* $\arccos x = \arccos \cos y = y$, *můžeme tedy aplikovat větu o derivaci inverzní funkce*

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

4. *V intervalu* $x \in (-\infty, \infty)$ *je* $\operatorname{arctg} x$ *rostoucí a spojitá funkce. K ní inverzní je funkce* $\operatorname{tg} y$ *na intervalu* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *a její derivace* $(\operatorname{tg} y)' = \frac{1}{\cos^2 y}$ *je na tomto intervalu různá od nuly. Píšeme-li* $x = \operatorname{tg} y$, *je* $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \operatorname{tg} y =$

y, *můžeme tedy aplikovat větu o derivaci inverzní funkce*

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

5. *V intervalu* $x \in (-\infty, \infty)$ *je* $\operatorname{arccotg} x$ *klesající a spojitá funkce. K ní inverzní je funkce* $\operatorname{cotg} y$ *na intervalu* $(0, \pi)$ *a její derivace* $(\operatorname{cotg} y)' = -\dfrac{1}{\sin^2 y}$ *je na tomto intervalu různá od nuly. Píšeme-li* $x = \operatorname{cotg} y$, *je* $\operatorname{arccotg} x = \operatorname{arccotg} \operatorname{cotg} y = y$, *můžeme tedy aplikovat větu o derivaci inverzní funkce*

$$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{cotg} y)'} = -\sin^2 y = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{-1}{1+\operatorname{cotg}^2 y} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Věta 5.18 (O derivaci složené funkce.) *Nechť funkce g má vlastní derivaci v bodě x_0. Dále nechť funkce f má vlastní derivaci v bodě $y_0 = g(x_0)$. Potom má funkce $f(g)$ v bodě x_0 derivaci $f'(y_0)g'(x_0)$.*

Důkaz. Definujme funkci $\alpha(h) = g(x_0+h) - g(x_0)$ $(g(x_0+h) = g(x_0) + \alpha(h))$. Podle předpokladu věty má funkce g má vlastní derivaci v bodě x_0 a je tedy podle věty 5.7 v tomto bodě spojitá. To znamená, že funkce α je spojitá v bodě nula. Potřebujeme spočítat limitu podílu

$$\frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)} \; \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$
$$= \frac{f(y_0+\alpha(h)) - f(y_0)}{\alpha(h)} \; \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \tag{5.1}$$

pro $h \to 0$. Podle předpokladu věty má funkce f vlastní derivaci v bodě y_0, takže je podle věty 5.7 v tomto bodě spojitá. Definujme funkci F takto:

$F(k) = \dfrac{f(y_0+k) - f(y_0)}{k}$ pro $k \neq 0$ a předpisem $F(0) = f'(x_0)$ pro $k = 0$. Takto definovaná funkce je spojitá v bodě nula. (Protože $\lim\limits_{k\to 0} F(k) = f'(x_0)$ je podle věty o limitě spojité funkce funkce F spojitá v bodě nula.) Tedy funkce F a α jsou spojité v bodě nula, dále $\alpha(0) = g(x_0+0) - g(x_0) = 0$, takže podle věty o spojitosti složené funkce je v bodě nula spojitá i funkce $F(\alpha)$. Potom podle věty o limitě spojité funkce je

$$\lim_{h\to 0} F(\alpha(h)) = F(\alpha(0)) = F(0) = f'(y_0).$$

Zkombinujeme-li to s rovnicí (5.1) dostaneme

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(y_0+\alpha(h)) - f(y_0)}{\alpha(h)} \; \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} F(\alpha(h)) \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = f'(y_0)g'(x_0).
\end{aligned}$$

□

Poznámka 5.19 *Jiná možnost zápisu tvrzení předchozí věty je následující: označíme-li $z = f(y)$ a $y = g(x)$, potom $z = f(g(x))$ a $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx}$.*

Příklad 5.20 *Derivaci funkce $(x^2+x+1)^{10}$ můžeme nalézt tak, že ji umocníme a zderivujeme člen po členu. Jednodušší je však postup podle věty o derivaci* *složené funkce. Položíme-li $z = f(y) = y^{10}$ a $y = g(x) = x^2 + x + 1$, potom $\frac{dz}{dy} = 10y^9$ a $\frac{dy}{dx} = 2x + 1$. Dohromady tedy*

$$\left((x^2 + x + 1)^{10}\right)' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = 10y^9(2x + 1) = 10(x^2 + x + 1)^9(2x + 1).$$

Poznámka 5.21 *Větu o derivaci složené funkce můžeme využít i k výpočtu derivace funkce vícenásobně složené. Je-li například $z = f(g(h(x)))$, pak lze klást $z = f(y)$, $y = g(u)$ a $u = h(x)$. Má-li nyní $h(x)$ vlastní derivaci $h'(x) = \frac{du}{dx}$ v jistém bodě x a má-li $g(u)$ vlastní derivaci $g'(u) = \frac{dy}{du}$ v bodě $u = h(x)$, je podle věty o derivaci složené funkce $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$. Má-li ještě funkce $f(y)$ v bodě $y = g(u) = h(g(x))$ vlastní derivaci $\frac{dz}{dy} = f'(y)$, je podle věty o derivaci složené funkce $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$ a celkem tedy $\mathbf{\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}}$. Podobným způsobem bychom mohli rozšířit i větu o derivaci součtu a součinu.*

Příklad 5.22 *Spočtěme derivaci funkce $\sqrt{e^{x^2} + 1}$. Nejprve položíme $z = \sqrt{y}$, $y = e^u + 1$ a $u = x^2$. Postupným derivováním dostaneme*

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}, \qquad \frac{dy}{du} = e^u, \qquad \frac{du}{dx} = 2x.$$

Potom podle předchozí poznámky platí:

$$\left(\sqrt{e^{x^2} + 1}\right)' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}\ e^u\ 2x = \frac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2} + 1}}.$$

Věty a pravidla této kapitoly je třeba ovládat zcela mechanicky jako násobilku. Pro přehlednost shrneme nejdůležitější vzorce do následující věty.

Věta 5.23 **(Základní vzorce.)**

- $(x^n)' = nx^{n-1} \quad x > 0,\ n \in \mathbb{R},$
- $(x^n)' = nx^{n-1}, \quad (c)' = 0 \quad \textit{pro } x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$
- $(x^n)' = nx^{n-1} \quad x \neq 0,\ n \textit{ celé záporné},$
- $(a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x \quad \textit{pro } a > 0,\ x \in \mathbb{R},$
- $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x} \quad \textit{pro } a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,$
- $(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x \quad \textit{pro } x \in \mathbb{R},$
- $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad \textit{pro } x \in \mathbb{R},\ x \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z},$
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \quad \textit{pro } x \in \mathbb{R},\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \textit{pro } |x| < 1,$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2} \quad \textit{pro } x \in \mathbb{R}.$

Důkaz. Většinu derivací jsme již spočítali v příkladech 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.14 a 5.17. Nyní spočteme ještě zbývající tři:

1. $(a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a \quad$ pro $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

2. $(x^n)' = \left(e^{n \ln x}\right)' = e^{n \ln x} \dfrac{n}{x} = x^n \dfrac{n}{x} = nx^{n-1} \quad$ pro $x > 0$, $n \in \mathbb{R}$.

3. Je-li a, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq e$, $x > 0$, víme z věty o vlastnostech logaritmů, že $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$. Potom $(\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$. $\square$

Příklad 5.24 *Funkci $f(x)^{g(x)}$ nelze derivovat jako mocninu, protože mocnitel není konstantní, ani jako exponenciální funkci, protože základ není konstantní. Nicméně v případě, že funkce f je kladná v bodě x a existují-li v tomto bodě vlastní derivace $f'(x)$, $g'(x)$, lze následujícím způsobem použít větu o derivaci složené funkce:*

$$\left(\mathbf{f}(\mathbf{x})^{\mathbf{g}(\mathbf{x})}\right)' = \left(e^{g(x)\ln f(x)}\right)' = e^{g(x)\ln f(x)} \left(g(x) \ln f(x)\right)'$$
$$= \mathbf{f}(\mathbf{x})^{\mathbf{g}(\mathbf{x})} \left(\mathbf{g}'(\mathbf{x}) \ln \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{f}'(\mathbf{x})}{\mathbf{f}(\mathbf{x})}\right).$$

Na závěr si tento postup ilustrujme na konkrétním příkladu:

$$(x^x)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x \ln x} (x \ln x)' = x^x (\ln x + 1) \qquad \textit{pro } x > 0.$$

Věta 5.25 (Leibnizův vzorec.) *Mají-li funkce u, v v bodě x derivace do n-tého řádu, pak v tomto bodě platí:*

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v^{(1)} + \binom{n}{2} u^{(n-2)}v^{(2)} + \cdots + \binom{n}{n} uv^{(n)}.$$

Tuto větu lze snadno dokázat matematickou indukcí z věty o derivaci součinu, takže důkaz ponecháme jako cvičení.

Příklad 5.26 *Leibnizův vzorec lze velmi efektivně využít při výpočtu derivací vyšších řádů v případě, že od jisté derivace jsou všechny derivace vyššího řádu* *jednoho z činitelů rovny nule. Ilustrujme to na následujícím příkladu.*

$$((ax+b)e^x)^{(n)} = (ax+b)e^x + \binom{n}{1} ae^x = (ax+b+na)e^x.$$

Protože derivace vyššího než prvního řádu funkce $ax+b$ jsou rovny nule!

Příklad 5.27 *Nechť $n, k \in \mathbb{N}$; $a, b \in \mathbb{R}$. Rozmyslete si, že pro $x \in \mathbb{R}$ platí:*

$$((ax+b)^n)^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)a^k(ax+b)^{n-k},$$

$$\left(e^{ax+b}\right)^{(k)} = a^k e^{ax+b}.$$

3. Diferenciál funkce

Definice 5.28 *Říkáme, že* **f(x) má v bodě a diferenciál**, *je-li možno její* **přírůstek** *vyjádřit ve tvaru*

$$\Delta f(a,h) = f(a+h) - f(a) = Ah + r(h)h, \tag{5.2}$$

kde A je konstanta a r je funkce splňující podminku: $\lim\limits_{h\to 0} r(h) = 0$.

Věta 5.29 **(Nutná a postačující podmínka existence diferenciálu.)** *Funkce $f(x)$ má v bodě a diferenciál tehdy a jen tehdy, má-li v bodě a vlastní derivaci. Konstanta A v rovnici (5.2) je rovna hodnotě $f'(a)$, čili*

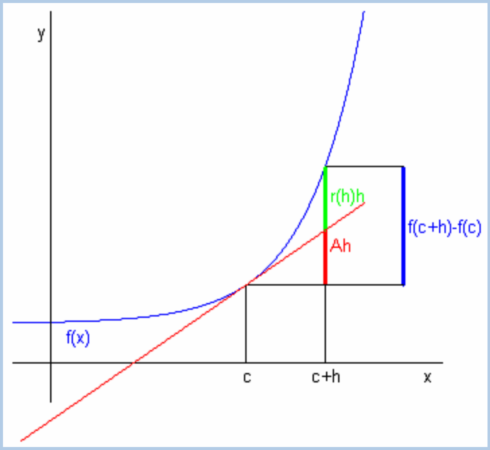
$$\Delta f(a,h) = f(a+h) - f(a) = f'(a)h + r(h)h.$$

Důkaz. Rovnice (5.2) znamená totéž, co rovnice:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{h} = f'(a) - A = \lim_{h\to 0} r(h) = 0.$$

Tedy existuje-li diferenciál, pak se musí rovnat derivaci a naopak. □

Definice 5.30 *Výrazu $f'(a)h$ říkáme* **diferenciál** *funkce f v bodě a. Značíme ho $\mathrm{d}f(a)$. V obecném případě píšeme $\mathrm{d}f(x)$ (nebo také $\mathrm{d}y$).*



Obrázek 5.2: Přírůstek a jeho chyba.

Geometrický význam diferenciálu je následující: Nahradíme-li přírůstek $\Delta f(a,h) = f(a+h) - f(a)$ diferenciálem $f'(a)h$, znamená to, že místo přírůstku na křivce $y = f(x)$ bereme jen přírůstek na tečně $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. Tím se dopouštíme chyby, která je rovna funkci $r(h)h$. Přitom funkce $r(h)h$ se pro malá a zmenšující se h blíží k nule rychleji než diferenciál (tedy pokud je různý od nuly). Tedy čím menší bude h, tím menší relativní chyby se dopustíme, nahradíme-li Δf diferenciálem $\mathrm{d}f$.

Příklad 5.31 *Diferenciálu často používáme k přibližnému určení chyby, které se dopustíme, počítáme-li hodnotu nějaké veličiny z jiné veličiny, která byla změřena s určitou chybou. Naměříme-li např. že poloměr koule je $x = 4cm$, a víme-li, že chyba měření je maximálně $h = 0,1mm$, pak maximální chyba při výpočtu objemu $V(4) = \frac{4\pi}{3}4^3 = \frac{256\pi}{3}cm^3 \approx 268cm^3$ je přibližně dána diferenciálem $V'(4) \cdot 0,01 = 4 \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 0,01 = 0,64 \cdot \pi cm^3 \approx 2cm^3$.*

Kapitola 6

Obecné věty o spojitosti a derivaci

1. Obecné věty o spojitých funkcí

Nejprve si uvedeme několik názorných vět o vlastnostech spojitých funkcí na uzavřených intervalech.

Věta 6.1 (O omezenosti spojité funkce.) *Funkce spojitá v uzavřeném intervalu je v tomto intervalu omezená.*

Důkaz. Nechť funkce f je spojitá v $[a, b]$. Protože funkce f je spojitá zprava v bodě a, existuje δ ($b-a \geq \delta > 0$) tak, že nerovnost $f(a)-1 < f(x) < f(a)+1$ platí pro $x \in [a, a+\delta)$. Tedy funkce f je v tomto intervalu omezená. Označme množinu

$$M = \{x \in [a, b];\ f \text{ je omezená v intervalu } [a, x)\}.$$

Tato množina je neprázdná a shora omezená, tedy podle věty o supremu existuje $c = \sup M$. Nyní sporem dokážeme, že $c = b$.

Předpokládejme, že $c < b$, potom $c \in (a, b)$ a podle předpokladu věty je funkce v tomto bodě spojitá, existuje δ_1 $(\min\{b - c, c - a\} > \delta_1 > 0)$ tak, že nerovnost $f(c) - 1 < f(x) < f(c) + 1$ platí pro $x \in (c - \delta_1, c + \delta_1)$ (δ_1 jsme volili tak, aby $(c - \delta_1, c + \delta_1) \subset [a, b]$). Tedy funkce f je v tomto intervalu omezená, takže je omezená i v intervalu $[a, c + \delta_1)$, což je ve sporu s tím, že $c = \sup M < b$. Platí tedy, že $b = \sup M$ a funkce f je omezená v intervalu $[a, b)$.

Zbývá vyšetřit bod b, ale v tomto bodě je funkce f spojitá zleva, existuje tedy δ_2 $(b - a > \delta_2 > 0)$ tak, že nerovnost $f(b) - 1 < f(x) < f(b) + 1$ platí pro $x \in (b - \delta_2, b]$. Tedy funkce f je v tomto intervalu omezená. Celkem jsme dokázali, že funkce f je omezená v intervalech $[a, b)$ a $(b - \delta_2, b]$, takže je omezená i v intervalu $[a, b]$. $\square$

Poznámka 6.2 *Pro neuzavřené intervaly předchozí věta neplatí. Např. funkce* $\dfrac{1}{x}$ *je spojitá v intervalu* $(0, 1]$, *ale zřejmě v něm není shora omezená.*

Věta 6.3 **(O nabývání minima a maxima.)** *Nechť funkce f je spojitá v intervalu $[a, b]$. Potom existují v intervalu $[a, b]$ body x_1, x_2 tak, že*

$$f(x_1) = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \qquad\qquad f(x_2) = \inf_{x \in [a,b]} f(x).$$

Tedy funkce f nabývá v bodě x_1 svého maxima a v bodě x_2 svého minima. Nebo-li pro všechna $x \in [a, b]$ platí: $f(x_2) \le f(x) \le f(x_1)$.

Důkaz. Funkce f spojitá v $[a, b]$ je v tomto intervalu podle předchozí věty omezená. Podle věty o supremu existuje číslo $G = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ tak, že $f(x) \le G$. Chceme najít $x_1 \in [a,b]$ tak, aby $f(x_1) = G$.

Předpokládejme, že takové x_1 neexistuje, platí tedy $f(x) < G$ pro všechna $x \in [a,b]$ a z toho odvodíme spor. Podle věty o spojitosti rozdílu a podílu jsou funkce $G - f(x)$ a $\dfrac{1}{G - f(x)}$ spojité v intervalu $[a,b]$. Podle předchozí věty je funkce $\dfrac{1}{G - f(x)}$ omezená a navíc kladná. Existuje tedy číslo K tak, že

$$\frac{1}{G - f(x)} < K \quad \text{tedy} \quad G - f(x) > \frac{1}{K} \quad \text{nebo-li} \quad f(x) < G - \frac{1}{K}$$

pro všechna $x \in [a,b]$. Takže číslo $G - \dfrac{1}{K}$ je menší horní závora než G, což je spor s předpokladem, že G je nejmenší horní závora (supremum). Existuje tedy $x_1 \in [a,b]$ tak, že $f(x_1) = G$.

Zbývá dokázat, že funkce f nabývá i svého minima. Podle věty o spojitosti rozdílu je funkce $-f(x)$ spojitá v $[a,b]$ a tedy existuje $x_2 \in [a,b]$ tak, že $-f(x_2) = \sup\limits_{x\in[a,b]} -f(x)$. Dále zřejmě platí

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) = -\sup_{x\in[a,b]} -f(x),$$

takže celkem máme $f(x_2) = -\sup\limits_{x\in[a,b]} -f(x) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. □

Poznámka 6.4 *Funkce může nabývat svého minima a maxima i ve více bodech. Například funkce $y = \sin x$ nabývá v intervalu $[-2\pi, 2\pi]$ maximální hodnoty v bodech $\dfrac{-3\pi}{2}$ a $\dfrac{\pi}{2}$, minimální hodnoty v bodech $\dfrac{-\pi}{2}$ a $\dfrac{3\pi}{2}$.*

Věta 6.5 **(O nabývání hodnot.)** *Nechť funkce f je spojitá v intervalu $[a, b]$. Potom funkce f nabývá v intervalu (a, b) všech hodnot ležících mezi čísly $i := \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ a $s := \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. (Tedy je-li d libovolné číslo ležící mezi čísly i a s, potom existuje alespoň jedno číslo c tak, že $a < c < b$ a $f(c) = d$.)*

Důkaz. Nechť pro číslo d platí $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) < d < \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. (Je-li $d = i$ nebo $d = s$, pak věta zřejmě platí.) Podle věty o nabývání minima a maxima existují čísla x_1, x_2 tak, že $f(x_1) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ a $f(x_2) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Je-li $x_1 < x_2$, označme množinu

$$M = \{x \in [x_1, x_2];\ f(x) < d\}.$$

Množina M je neprázdná (obsahuje bod x_2) a zdola omezená, tedy podle věty o infimu existuje bod $c = \inf M$. ($c \neq x_1$, protože jinak by platilo $|f(x_1) - f(x)| > \dfrac{f(x_1) - f(x)}{2} \geq \dfrac{f(x_1) - d}{2}$ pro $x \in (x_1, x_1 + \delta)$, což je ve sporu se spojitostí zprava v bodě x_1.) V bodě c je funkce f spojitá, takže pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje δ ($\min\{x_2 - c, c - x_1\} > \delta > 0$) tak, že nerovnost

$$f(x) - \varepsilon < f(c) < f(x) + \varepsilon \qquad \text{platí pro} \qquad x \in (c - \delta, c + \delta). \tag{6.1}$$

Nyní mohou nastat dvě varianty buď $x \in M$, pak je $f(x) < d$ a podle (6.1) je i $f(c) < d + \varepsilon$, nebo $x \notin M$, pak je $f(x) \geq d$ a podle (6.1) je i $d - \varepsilon < f(c)$. Dostaneme tedy nerovnost $|f(c) - d| < \varepsilon$ pro libovolné $\varepsilon > 0$, takže $f(c) = d$.

Je-li $x_2 < x_1$, označme množinu

$$N = \{x \in [x_2, x_1];\ f(x) < d\}.$$

Množina N je neprázdná (obsahuje bod x_2) a shora omezená, tedy podle věty o supremu existuje bod $c = \sup N$. ($c \neq x_1$, protože jinak by platilo $|f(x_1) - f(x)| > \dfrac{f(x_1) - f(x)}{2} \geq \dfrac{f(x_1) - d}{2}$ pro $x \in (x_1 - \delta, x_1)$, což je ve sporu se spojitostí zleva v bodě x_2.) V bodě c je funkce f spojitá, takže pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje δ ($\min\{x_2 - c, c - x_1\} > \delta > 0$) tak, že nerovnost

$$f(x) - \varepsilon < f(c) < f(x) + \varepsilon \qquad \text{platí pro} \qquad x \in (c - \delta, c + \delta). \tag{6.2}$$

Nyní mohou nastat dvě varianty buď $x \in N$, pak je $f(x) < d$ a podle (6.2) je i $f(c) < d + \varepsilon$, nebo $x \notin M$, pak je $f(x) \geq d$ a podle (6.2) je i $d - \varepsilon < f(c)$. Dostaneme tedy nerovnost $|f(c) - d| < \varepsilon$ pro libovolné $\varepsilon > 0$, takže opět $f(c) = d$. □

Poznámka 6.6 *Předchozí věta opět neplatí v případě, že funkce není spojitá - viz. například funkce* $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

Snadným důsledkem věty o nabývání hodnot je následující věta.

Věta 6.7 **Nechť je funkce f spojitá v intervalu J. Potom funkce f zobrazuje interval J buď na jednobodovou množinu nebo na interval.**

Poznámka 6.8 *Nechť funkce f je spojitá v intervalu J. Je-li $J = [a, b]$ uzavřený interval, je množina N opět uzavřený interval nebo jednobodová množina. Neboť podle věty o omezenosti spojité funkce je množina N omezená a podle věty o nabývání minima a maxima patří krajní body intervalu N (tedy pokud N je interval a ne jednobodová množina), tj. čísla* $\sup N = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$,

$\inf N = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ *k intervalu* N. *V ostatních případech nemusí druh intervalu zůstat zachován. Například funkce* x^2 *zobrazuje otevřený interval* $(-1,1)$ *na polouzavřený interval* $[0,1)$.

2. Věty o střední hodnotě

Definice 6.9 *Nechť* f *je funkce a* x_0 *číslo. Říkáme, že* **funkce f je rostoucí** *v bodě* x_0*, jestliže existuje číslo* $\delta > 0$ *takové, že pro* $x_0 < x < x_0 + \delta$ *je* $f(x) > f(x_0)$ *a pro* $x_0 - \delta < x < x_0$ *je* $f(x) < f(x_0)$. *Říkáme, že* **funkce f je klesající** *v bodě* x_0*, jestliže existuje číslo* $\delta > 0$ *takové, že pro* $x_0 < x < x_0+\delta$ *je* $f(x) < f(x_0)$ *a pro* $x_0 - \delta < x < x_0$ *je* $f(x) > f(x_0)$.

Věta 6.10 **(Význam znaménka první derivace.)** *Je-li* $f'(x_0) > 0$*, potom je funkce* f *rostoucí v bodě* x_0. *Je-li* $f'(x_0) < 0$*, potom je funkce* f *klesající v bodě* x_0.

Důkaz. V případě prvního tvrzení máme

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Tedy existuje $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - x_0| < \delta$ je

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

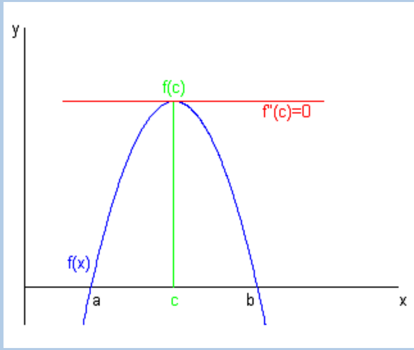
takže čitatel má totéž znaménko jako jmenovatel. Pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ je jmenovatel kladný, tedy i čitatel je kladný, takže $f(x) > f(x_0)$. Pro $x_0 - \delta < x < x_0$ je jmenovatel záporný, tedy i čitatel je záporný, takže $f(x) < f(x_0)$. Podobně můžeme dokázat i druhé tvrzení. □

K důkazu věty o střední hodnotě budeme potřebovat následující názornou větu

Věta 6.11 **(Rolleova.)** *Nechť funkce f má tyto vlastnosti:*

- *Funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu $[a, b]$,*
- *funkce $f(x)$ má derivaci (vlastní nebo nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b),*
- $f(a) = f(b) = 0$.

Potom existuje číslo $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.



Obrázek 6.1: Interpretace Rolleovy věty.

Důkaz. Mohou nastat tři případy: Buď existuje alespoň jeden bod $x_1 \in (a, b)$ tak, že $f(x_1) > 0$, nebo existuje alespoň jeden bod $x_2 \in (a, b)$ tak, že $f(x_2) < 0$, nebo platí $f(x) = 0$ v každém bodě intervalu (a, b). V posledním případě

Celá obrazovka
Začátek
Strana 129
Vyhledávání
◀ ▶
Zpět Vpřed
Zavřít
Ukončit

není již co dokazovat. Podívejme se podrobně na první případ. Podle věty o nabývání maxima existuje číslo c, kde funkce f nabývá svého maxima. Dále platí $a < c < b$, protože podle předpokladu je $f(a) = f(b) = 0$ a $f(c) > 0$. Podle věty o významu znaménka první derivace nemůže být derivace funkce f v bodě c kladná, protože pak by funkce f byla rostoucí, nemůže být ani záporná, protože pak by funkce f byla klesající – obojí je ve sporu s tím, že v bodě c nabývá funkce f svého maxima. Vzhledem k tomu, že v tomto bodě existuje dle předpokladů derivace, platí $f'(c) = 0$. Podobnou úvahou můžeme dokázat i druhý případ (tam by se jednalo o minimum). $\square$

Snadným zobecněním Rolleovy věty je následující věta, v níž je vynechán požadavek $f(a) = f(b) = 0$

Věta 6.12 **(O střední hodnotě.)** *Funkce f nechť je spojitá v intervalu $[a, b]$ a má derivaci (vlastní nebo nevlastní) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b). Potom existuje v intervalu (a, b) číslo c tak, že*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

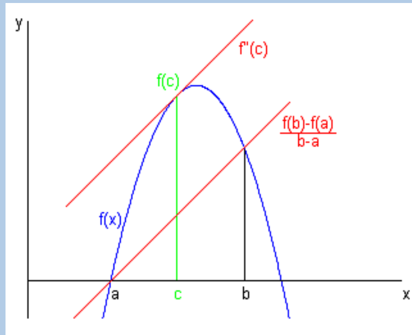
Důkaz. Definujme funkci g předpisem

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{x - a}{b - a}(f(b) - f(a)).$$

Funkce g je spojitá v intervalu $[a, b]$ a má derivaci

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \forall x \in (a, b).$$

A konečně $g(a) = g(b) = 0$. Funkce g splňuje předpoklady Rolleovy věty, existuje tedy číslo $c \in (a, b)$ tak, že $0 = g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. $\square$



Obrázek 6.2: Interpretace věty o střední hodnotě.

Větu o střední hodnotě lze ještě dále zobecnit.

Věta 6.13 **(Zobecněná věta o střední hodnotě.)** *Nechť funkce f, g mají tyto vlastnosti:*

- *Funkce $f(x)$, $g(x)$ jsou spojité v intervalu $[a, b]$,*
- *v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) existuje derivace $f'(x)$ (vlastní nebo nevlastní) a vlastní derivace $g'(x)$,*
- *v každém bodě x intervalu (a, b) je $g'(x) \neq 0$.*

Potom existuje v intervalu (a, b) bod c tak, že $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Důkaz. Definujme funkci F předpisem

$$F(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)).$$

Funkce $F(x)$ je zřejmě spojitá v intervalu $[a, b]$. Dále má tato funkce vlastní nebo nevlastní derivaci v každém bodě intervalu (a, b).

$$F'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a)).$$

A konečně $F(a) = F(b) = 0$. Funkce $F(x)$ splňuje předpoklady Rolleovy věty a tedy existuje v intervalu (a, b) číslo c tak, že

$$0 = F'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)). \tag{6.3}$$

Dále podle věty o střední hodnotě existuje číslo $c_1 \in (a, b)$ tak, že $g'(c_1) = \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a}$. Podle předpokladu je $g'(c_1) \neq 0$ a tedy i $g(b) - g(a) \neq 0$. Proto můžeme rovnici (6.3) vydělit jak $g'(x)$ tak i výrazem $g(b) - g(a)$ a dostaneme tvrzení věty. $\square$

3. l'Hospitalovo pravidlo

Jednou z aplikací vět o střední hodnotě je vyšetřování limit typu $\dfrac{0}{0}$ a $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Věta 6.14 (l'Hospitalovo pravidlo.) *Nechť* $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ *nebo* $\lim |g(x)| = +\infty$. *Potom platí: existuje-li* $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *(vlastní nebo nevlastní), existuje i* $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *a platí* $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. *Přitom může mít symbol* $\lim$ *kterýkoliv z těchto pěti významů:* $\lim\limits_{x \to c}$, $\lim\limits_{x \to c^+}$, $\lim\limits_{x \to c^-}$, $\lim\limits_{x \to \infty}$, $\lim\limits_{x \to -\infty}$.

Důkaz. Dokážeme tuto větu pouze pro případ $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \lim\limits_{x \to c^+} g(x) = 0$.

Ostatní případy lze dokázat obdobně. Nejprve doplňme, popřípadě pozměňme definici funkcí f, g v bodě c tak, že položíme $f(c) = g(c) = 0$ (to můžeme provést, protože limity nezávisí na hodnotách funkcí f, g v bodě c). Potom existuje $\delta > 0$ tak, že pro $c < x < c + \delta$ platí

- z existence limit $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to c^+} g(x) = 0$ plyne, že funkce f a g jsou spojité zprava v bodě c,
- z existence $\lim\limits_{x\to c^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ plyne, že v intervalu $(c, c+\delta)$ má podíl $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ smysl – existují tedy vlastní derivace $f'(x)$, $g'(x)$ a navíc je $g'(x) \neq 0$.

Máme tedy splněny předpoklady zobecněné věty o přírůstku funkce a existuje tedy bod d tak, že

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(d)}{g'(d)}, \qquad c < d < x.$$

A limitním přechodem dostaneme tvrzení věty

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \lim_{x\to c^+} \frac{f'(d)}{g'(d)} = \lim_{x\to c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

Příklad 6.15 *Spočtěme* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$. *Nejprve máme* $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ *a* $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$. *Dále* $(\sin x)' = \cos x$, $x' = 1$ *a* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. *Předpoklady l'Hospitalova pravidla jsou tedy splněny a máme*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

Příklad 6.16 *Jestliže po první aplikaci l'Hospitalova pravidla dostaneme opět limitu typu* $\frac{0}{0}$ *nebo* $\frac{\infty}{\infty}$, *je třeba tento postup opakovat. Ukažme si to na příkladu:* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. *Nejprve ověříme předpoklady:* $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$ *a* $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$. *Dále* $(1-\cos x)'=\sin x$, $(x^2)'=2x$ *a protože* $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ *a* $\lim\limits_{x\to 0}2x=0$ *dostali jsme opět limitu typu* $\frac{0}{0}$ *a můžeme tedy opět zkusit aplikovat l'Hospitalovo pravidlo. Ale z příkladu 6.15 víme, že* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{2}$. *Takže limita podílu derivací existuje a tím máme splněny všechny předpoklady l'Hospitalova pravidla. Platí tedy*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\cos x=\frac{1}{2}.$$

Příklad 6.17 *Spočtěme* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{(x-\frac{\pi}{2})^2}$. *Nejprve ověříme předpoklady l'Hospitalova pravidla:* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0$ *a* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2=0$. *Dále* $(\cos x)'=-\sin x$ *a* $\left(\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2\right)'=2\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$. *Pokud jde o limitu* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\sin x}{2(x-\frac{\pi}{2})}$ *– je-li* x *blízko hodnoty* $\frac{\pi}{2}$, *je čitatel blízko hodnoty* -1 *a jmenovatel je blízko nuly, a to kladný pro* $x>\frac{\pi}{2}$, *záporný pro* $x<\frac{\pi}{2}$. *Tedy podobně jako v příkladu 4.40* *dostaneme*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{-\sin x}{2(x-\frac{\pi}{2})}=\infty \qquad a \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}\frac{-\sin x}{2(x-\frac{\pi}{2})}=-\infty.$$

A podle l'Hospitalova pravidla máme také

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\cos x}{(x-\frac{\pi}{2})^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{-\sin x}{2(x-\frac{\pi}{2})}=\infty,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}\frac{\cos x}{(x-\frac{\pi}{2})^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}\frac{-\sin x}{2(x-\frac{\pi}{2})}=-\infty.$$

Limity zleva a zprava jsou různé a tedy limity

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{(x-\frac{\pi}{2})^2} \qquad a \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{2(x-\frac{\pi}{2})} \qquad \textit{neexistují.}$$

Na limity typu $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ lze převést i některé další příklady:

Příklad 6.18 *Spočtěme* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x$ *pro* $\alpha > 0$. *Nejprve převedeme součin na podíl typu* $\frac{-\infty}{\infty}$ *a pokud příslušná limita existuje, můžeme aplikovat Hospitalovo pravidlo:*

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(x^{-\alpha})'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}$$

$$=-\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0.$$

Protože poslední limita existuje, jsou splněny předpoklady l'Hospitalova pravidla a všechna výše napsaná rovnítka jsou napsána oprávněně.

Příklad 6.19 *Spočtěme* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$. *Nejprve převedeme rozdíl na společného jmenovatele* $\left(\text{tedy na limitu typu } \frac{0}{0}\right)$ *a zkusíme aplikovat l'Hospitalovo pravidlo:*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x)'}{(x\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}$$

to je výraz typu $\frac{0}{0}$, *takže zkusíme znovu aplikovat l'Hospitalovo pravidlo:*

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x - 1)'}{(\sin x + x\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

Protože poslední limita existuje, jsou splněny všechny předpoklady l'Hospitalova pravidla a všechna výše napsaná rovnítka jsou napsána oprávněně.

Také $\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)}$ lze upravit tak, abychom mohli využít l'Hospitalovo pravidlo. Především předpokládejme, že $f(x)>0$ v okolí bodu c. Potom

$$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to c} e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim_{x\to c}(g(x)\ln f(x))}.$$

Zde jsme využili vztahu $x=e^{\ln x}$ a také spojitosti exponenciální funkce. Ilustrujme si tento postup na následujícím příkladu.

Příklad 6.20 *Spočtěme* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$. *Pro* $x>0$ *platí:*

$$\lim_{x\to 0^+} x^x=\lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x}=e^{\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)}=e^0=1.$$

Využili jsme výsledek z příkladu 6.18 – pro $\alpha=1$ *je* $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)=0$.

4. Funkce monotónní, konvexní a konkávní

V této části budeme studovat význam znaménka první a druhé derivace pro průběh funkce. Začneme významem znaménka první derivace.

Věta 6.21 *Nechť funkce f je spojitá v intervalu I a nechť má derivaci v každém vnitřním bodě intervalu I. Jestliže v každém vnitřním bodě intervalu I platí:*

- $f'(x) > 0$, *potom je funkce f rostoucí v I.*
- $f'(x) \geq 0$, *potom je funkce f neklesající v I.*
- $f'(x) < 0$, *potom je funkce f klesající v I.*
- $f'(x) \leq 0$, *potom je funkce f nerostoucí v I.*
- $f'(x) = 0$, *potom je funkce f konstantní v I.*

Důkaz. Nechť a, $b \in I$, $a < b$. Podle věty o střední hodnotě existuje číslo c $(a < c < b)$ tak, že platí

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Potom například pro první tvrzení máme $f(b) - f(a) > 0$ pro $\forall a, b \in I$ a funkce f je tedy rostoucí. Obdobně můžeme dokázat i ostatní tvrzení. $\square$

Nyní již známe význam znaménka první derivace pro průběh funkce a můžeme se podívat na druhou derivaci.

Definice 6.22 *Nechť přímka p je dána rovnicí $y = y_0 + k(x - x_0)$. Jestliže souřadnice bodu $P = [x, y]$ splňují nerovnost $y > y_0 + k(x - x_0)$, říkáme, že* **bod $\mathbf{P} = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ leží nad přímkou p**. *Splňují-li nerovnost $y < y_0 + k(x - x_0)$, říkáme, že* **bod $\mathbf{P} = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ leží pod přímkou p**.

Definice 6.23 *Nechť f je funkce, definovaná v intervalu I, která má tuto vlastnost: jsou-li x_1, x_2, x_3 libovolná tři čísla z intervalu I splňující nerovnost $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $P_2 = [x_2, f(x_2)]$ buď pod přímkou, spojující body $P_1 = [x_1, f(x_1)]$ a $P_3 = [x_3, f(x_3)]$, nebo na ní. Potom říkáme, že* **funkce f je konvexní v intervalu I**. *Jestliže v této definici nahradíme slovo „pod“ slovem „nad“, obdržíme definici* **funkce konkávní v I**.

Definice 6.24 *Nechť f je funkce, definovaná v intervalu I, která má tuto vlastnost: jsou-li x_1, x_2, x_3 libovolná tři čísla z intervalu I splňující nerovnost $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $P_2 = [x_2, f(x_2)]$ pod přímkou, spojující body $P_1 = [x_1, f(x_1)]$ a $P_3 = [x_3, f(x_3)]$. Potom říkáme, že* **funkce f je ryze konvexní v intervalu I**. *Jestliže v této definici nahradíme slovo „pod“ slovem „nad“, obdržíme definici* **funkce ryze konkávní v I**.

Poznámka 6.25 *Každá funkce ryze konvexní (konkávní) v I je konvexní (konkávní) v I, ale ne naopak.*

Poznámka 6.26 *Přímka spojující body P_1 a P_3 z předchozích definic má rovnici*

$$y = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Funkce f je tedy konvexní v intervalu I tehdy a jen tehdy, jestliže pro každou trojici čísel x_1, x_2, x_3 z intervalu I splňující nerovnost $x_1 < x_2 < x_3$, platí nerovnost

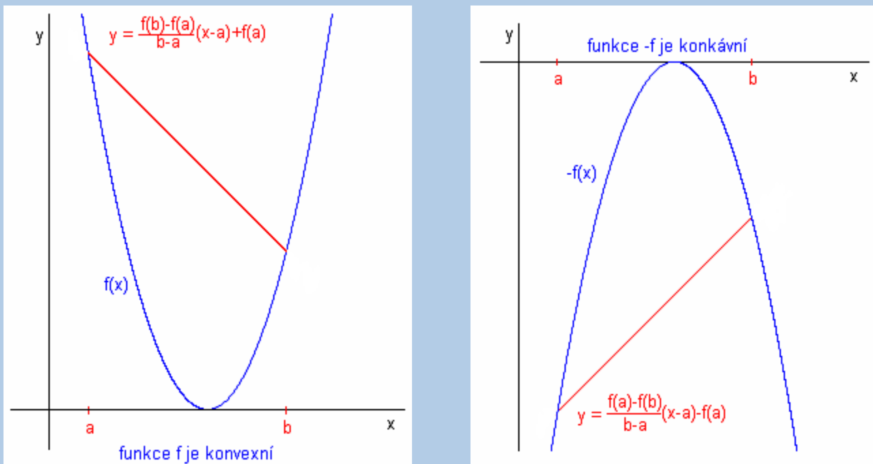
$$f(x_2) \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) + f(x_1),$$

$$\text{\textit{nebo-li}} \qquad f(x_2)(x_3 - x_1) \leq f(x_3)(x_2 - x_1) + f(x_1)(x_3 - x_2). \tag{6.4}$$

Podobně pro funkce konkávní dostaneme

$$f(x_2)(x_3 - x_1) \geq f(x_3)(x_2 - x_1) + f(x_1)(x_3 - x_2) \tag{6.5}$$

Pro funkce ryze konvexní (konkávní) bychom pouze neostré nerovnosti nahradili ostrými nerovnostmi. Vidíme, že nerovnost (6.4) dostaneme z nerovnosti (6.5) pouze obrácením znaménka nerovnosti. **Z toho plyne, že funkce f je konvexní (ryze konvexní) v intervalu I tehdy a jen tehdy, je-li funkce −f konkávní (ryze konkávní) v I.**



Obrázek 6.3: Upozorněme, že k tomu, aby byla funkce f na intervalu I konvexní musí úsečka y ležet nad funkcí f pro $\forall a, b \in I$ splňující $a < b$.

Věta 6.27 *Nechť funkce f je spojitá v intervalu I a nechť má druhou derivaci v každém vnitřním bodě intervalu I. Potom funkce f je v intervalu I*

- *konvexní, právě když $f''(x) \geq 0$ v každém vnitřním bodě intervalu I.*
- *ryze konvexní, právě když $f''(x) > 0$ v každém vnitřním bodě int. I.*
- *konkávní, právě když $f''(x) \leq 0$ v každém vnitřním bodě intervalu I.*
- *ryze konkávní, právě když $f''(x) < 0$ v každém vnitřním bodě int. I.*

Důkaz. Tvrzení věty dokážeme pouze pro konvexní funkce. Pro ryze konvexní funkce by to byla pouze jednoduchá modifikace důkazu pro konvexní funkce a pro konkávní a ryze konkávní funkce tvrzení platí na základě poznámky 6.26. Nechť $x_1 < x_2 < x_3$ jsou tři body z intervalu I. Podle věty o střední hodnotě existují čísla c a d tak, že $x_1 < c < x_2 < d < x_3$ a

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(d) \qquad f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Je-li $f''(x) \geq 0$, je funkce f' neklesající a tedy

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad \text{nebo-li}$$

$$(f(x_3) - f(x_2))(x_2 - x_1) \geq (f(x_2) - f(x_1))(x_3 - x_2).$$

A poslední nerovnost odpovídá nerovnosti (6.4), tedy funkce f je v intervalu I konvexní. Tím jsme dokázali jednu implikaci.

K důkazu druhé implikace předpokládejme existenci čísla $x_2 \in I$ tak, že $f''(x_2) < 0$. Dále existuje $\delta > 0$ tak, že jednak $f''(x) < 0$ pro $x \in (x_2 - \delta, x_2 + \delta)$ a jednak $(x_2 - \delta, x_2 + \delta) \subset I$. Zvolíme-li nyní $x_1 = x_2 - \delta$ a $x_3 = x_2 + \delta$, došli bychom stejným způsobem jako v první části důkazu, že funkce f je

Celá obrazovka
Začátek
Strana 140
Vyhledávání
◄ ►
Zpět Vpřed
Zavřít
Ukončit

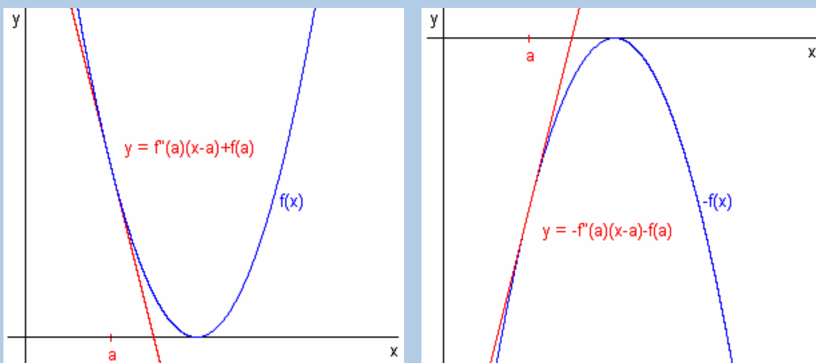
v intervalu $(x_2 - \delta, x_2 + \delta)$ ryze konkávní a tedy nemůže být v intervalu I konvexní. $\square$

Nyní ještě vyšetříme, co se dá usoudit o průběhu funkce ze znaménka druhé derivace v zadaném bodě x_0.

Definice 6.28 *Nechť existuje derivace $f'(x_0)$ v bodě x_0. Existuje-li číslo $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - x_0| < \delta$ leží bod $[x, f(x)]$ nad tečnou*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{6.6}$$

říkáme, že funkce f je **ryze konvexní v bodě $\mathbf{x_0}$**. *Existuje-li číslo $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - x_0| < \delta$ leží bod $[x, f(x)]$ pod tečnou (6.6), říkáme, že funkce f je* **ryze konkávní v bodě $\mathbf{x_0}$**.



Obrázek 6.4: Funkce f je v bodě a ryze konvexní, zatímco funkce $-f$ je v bodě a ryze konkávní.

Věta 6.29 **(Význam znaménka druhé derivace.)** *Je-li $f''(x_0) > 0$, je funkce f v bodě x_0 ryze konvexní. Je-li $f''(x) < 0$, je funkce f v bodě x_0 ryze konkávní.*

Důkaz. Je-li $f''(x_0) > 0$, potom je funkce $f'(x)$ rostoucí v bodě x_0. To znamená, že existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x_0 - \delta < c < x_0$ je $f'(c) < f'(x_0)$ a pro $x_0 < c < x_0 + \delta$ je $f'(x_0) < f'(c)$. Je-li $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ existuje podle věty o střední hodnotě číslo c ležící mezi x_0, x tak, že

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0). \tag{6.7}$$

Je-li nyní $x_0 < x < x_0 + \delta$, je i $x_0 < c < x_0 + \delta$, potom platí $x - x_0 > 0$ a $f'(x_0) < f'(c)$. Poslední nerovnost vynásobíme kladným číslem $(x - x_0)$ a dostaneme $f'(c)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0)$.
Je-li naopak $x_0 - \delta < x < x_0$, je i $x_0 - \delta < c < x_0$, potom platí $x - x_0 < 0$ a $f'(x_0) > f'(c)$. Poslední nerovnost vynásobíme záporným číslem $(x - x_0)$ a dostaneme opět $f'(c)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0)$. Dosazením této nerovnosti do rovnosti (6.7) dostaneme

$$y = f(x) = f'(c)(x - x_0) + f(x_0) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Tím je dokázáno, že funkce f v bodě x_0 ryze konvexní. Druhou část věty buď dokážeme podobně jako první část nebo užijeme první část na funkci $-f$. □

5. Lokální a absolutní extrémy

Definice 6.30 *Nechť je dáno číslo c a funkce f, definovaná v intervalu M obsahujícím bod c. Jestliže $f(x) \le f(c)$ pro všechna x z daného intervalu M, říkáme, že funkce f má v bodě c* **absolutní (globální) maximum na M**.

Definice 6.31 *Nechť je dáno číslo c a funkce f, definovaná v jistém intervalu (a, b) obsahujícím bod c. Existuje-li $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in (c - \delta, c + \delta)$ je $f(x) \leq f(c)$, říkáme, že funkce f má v bodě c* **lokální maximum**. *Lze-li zvolit $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in (c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)$ je $f(x) < f(c)$, říkáme, že funkce f má v bodě c* **ostré lokální maximum**.

Definice 6.32 *Nechť je dáno číslo c a funkce f, definovaná v intervalu M obsahujícím bod c. Jestliže $f(x) \geq f(c)$ pro všechna x z daného intervalu M, říkáme, že funkce f má v bodě c* **absolutní (globální) minimum na M**.

Definice 6.33 *Nechť je dáno číslo c a funkce f, definovaná v jistém intervalu (a, b) obsahujícím bod c. Existuje-li $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in (c - \delta, c + \delta)$ je $f(x) \geq f(c)$, říkáme, že funkce f má v bodě c* **lokální minimum**. *Lze-li zvolit $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in (c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)$ je $f(x) > f(c)$, říkáme, že funkce f má v bodě c* **ostré lokální minimum**.

Věta 6.34 **(Hledání absolutních extrémů.)** *Nechť funkce f je definována v intervalu I. Má-li funkce f v bodě $c \in I$ absolutní maximum na I, potom je bod c buď krajním bodem intervalu I nebo má funkce f v bodě c lokální maximum. Obdobně má-li funkce f v bodě $d \in I$ absolutní minimum na I, potom je bod d buď krajním bodem intervalu I nebo má funkce f v bodě d lokální minimum.*

Důkaz. Není-li bod c krajním bodem intervalu I, existuje $\delta > 0$ tak, že $(c - \delta, c + \delta) \subset I$ a podle předpokladu je $f(x) \leq f(c)$ pro $\forall x \in (c - \delta, c + \delta)$. Tedy funkce f má v bodě c lokální maximum. Podobně pro minimum. □

Význam lokálních extrémů pro získání představy o průběhu funkcí je jasný. Návod jak nalézt lokální extrémy popíšeme v následujících dvou větách.

Věta 6.35 **(Nutná podmínka existence lokálního extrému.)** *Existuje-li $f'(x_0) \neq 0$, nemá funkce f v bodě x_0 lokální extrém.*

Důkaz. Je-li $f'(x_0) \neq 0$, tedy buď $f'(x_0) > 0$ nebo $f'(x_0) < 0$, potom je funkce f v bodě x_0 buď rostoucí nebo klesající a nemůže mít v bodě x_0 ani lokální maximum ani lokální minimum. □

Poznámka 6.36 *Funkce $f_1(x) = x^2$ a $f_2(x) = x^3$ mají v bodě 0 derivaci rovnou nule, ale zatímco funkce f_1 má v bodě 0 ostré lokální minimum, funkce f_2 nemá v bodě 0 lokální extrém (je v tomto bodě rostoucí). Dále funkce $f_3(x) = |x|$ a $f_4(x) = |x| + 2x$ nemají v bodě 0 derivaci (viz. poznámka 5.8). Ale zatímco funkce f_3 má v bodě 0 ostré lokální minimum, funkce f_4 nemá v bodě 0 lokální extrém (je v tomto bodě rostoucí).* **Lokální extrémy může (ale nemusí!) mít funkce jen v bodech, ve kterých derivace buď neexistuje nebo je rovna nule.** *V následující větě si ukážeme, jak rozhodnout v těchto případech.*

Věta 6.37 **(Postačující podmínka existence lokálního extrému.)** *Nechť $x_0 \in (a, b)$. Dále nechť funkce f je spojitá v intervalu (a, b) a má derivaci v každém bodě intervalu (a, b) různém od bodu x_0. Existuje-li $\delta > 0$ tak, že*

- *pro $x_0 - \delta < x < x_0$ je $f'(x) > 0$ a pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ je $f'(x) < 0$, potom má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.*
- *pro $x_0 - \delta < x < x_0$ je $f'(x) < 0$ a pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ je $f'(x) > 0$, potom má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.*
- *pro $0 < |x - x_0| < \delta$ je $f'(x) > 0$, potom je funkce f v bodě x_0 rostoucí.*
- *pro $0 < |x - x_0| < \delta$ je $f'(x) < 0$, potom je funkce f v bodě x_0 klesající.*

Důkaz. Je-li x libovolný bod takový, že $0 < |x - x_0| < \delta$, existuje podle věty o střední hodnotě číslo c ležící mezi x_0, x tak, že je

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0). \tag{6.8}$$

V prvním případě pro $x_0 - \delta < x < x_0$ je $(x - x_0) < 0$ a $f'(c) > 0$. Tedy $f'(c)(x - x_0) < 0$ a po dosazení do rovnice (6.8) dostaneme

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) < 0.$$

Pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ máme $(x - x_0) > 0$ a $f'(c) < 0$. Tedy $f'(c)(x - x_0) < 0$ a po dosazení do rovnice (6.8) máme opět $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) < 0$. Takže pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí $f(x) < f(x_0)$ a funkce f má v bodě x_0 ostré lokální maximum. Ostatní případy se dokazují stejným způsobem. □

Příklad 6.38 *Hledejme absolutní extrémy funkce $f(x) = x^3 - 3x + 10$ v intervalu $[-3, 3)$.*

Funkce f může mít absolutní extrémy pouze na hranici intervalu ($x = -3$) nebo v bodech, v nichž derivace buď neexistuje nebo se rovná nule. Spočteme tedy derivaci

$$f'(x) = 3x^2 - 3x = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1).$$

Derivace existuje ve všech bodech a derivace se rovná nule v bodech $x = -1$ a $x = 1$. Dále ze znaménka derivace plyne: v intervalu $(-3, -1)$ je derivace kladná, takže funkce roste od hodnoty $f(-3) = -8$ do hodnoty $f(-1) = 12$; v intervalu $(-1, 1)$ je derivace záporná, takže funkce klesá od hodnoty $f(-1) =$ 12 (tedy v bodě $x = -1$ má podle předchozí věty funkce f lokální maximum) do hodnoty $f(1) = 8$ a v intervalu $(1, 3)$ je derivace opět kladná, takže funkce je v tomto intervalu rostoucí. Tedy v bodě $x = -1$ má podle předchozí věty funkce

f lokální minimum ($f(1) = 8$). Porovnáním čísel $f(-3) = -9$, $f(-1) = 12$, $f(1) = 8$ a $\lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3) = 28$, zjistíme, že v intervalu $[-3, 3)$ má funkce f absolutní minimum v bodě $x = -3$, ale nemá absolutní maximum, neboť $\sup_{x\in[-3,3)} f(x) = 28$, ale této hodnoty funkce f v intervalu $[-3, 3)$ nenabývá.

V případě, že bychom hledali absolutní extrémy na uzavřeném intervalu $[-3, 3]$, potom by v bodě $x = 3$ bylo absolutní maximum a v bodě $x = -3$ absolutní maximum.

Poznámka 6.39 *K rozhodnutí, zda-li v bodech, v nichž je derivace rovna nule nebo neexistuje, je lokální extrém, můžeme použít předchozí větu. V tomto případě musíme vyšetřovat chování první derivace ve všech bodech intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, různých od bodu x_0. Místo toho můžeme využít následující větu, v níž vystupují derivace vyšších řádů, ale stačí, když známe jejich hodnoty v jediném bodě x_0. Tato věta může selhat v případech, kdy některá derivace v bodě x_0 neexistuje.*

Věta 6.40 *Nechť f je funkce a x_0 číslo. Dále nechť existuje přirozené číslo n tak, že je $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ a $f^{(k)}(x_0) = 0$ pro $0 < k < n$. Potom platí:*

- *Je-li n liché a $f^{(n)}(x_0) > 0$, potom je funkce f rostoucí v bodě x_0.*
- *Je-li n liché a $f^{(n)}(x_0) < 0$, potom je funkce f klesající v bodě x_0.*
- *Je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0$, potom má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.*
- *Je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) < 0$, potom má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.*

Důkaz. Větu dokážeme matematickou indukcí pro případ $f^{(n)}(x_0) > 0$.

1) Pro $n = 1$ máme $f'(x_0) > 0$ a tedy funkce f je rostoucí v bodě x_0.

2) Nechť $n > 1$ a předpokládejme, že tvrzení věty platí pro $m = n - 1$, máme tedy

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-2)}(x_0) = 0 \qquad \text{a} \qquad f^{(n-1)}(x_0) > 0,$$

a chceme dokázat, že tvrzení platí i pro $m = n$. Funkce $g = f'$ vyhovuje indukčnímu předpokladu neboť $g'(x_0) = g''(x_0) = \cdots = g^{(n-2)}(x_0) = 0$ a $g^{(n-1)}(x_0) > 0$. Tedy pro funkci g věta platí. Nyní rozlišme dva případy:

Je-li n sudé (tedy $n-1$ liché), je podle tvrzení věty funkce $g = f'$ rostoucí v bodě x_0. Protože $g(x_0) = f'(x_0) = 0$, existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x_0 - \delta < x < x_0$ je $f'(x) < 0$ a pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ je $f'(x) > 0$. Potom podle předchozí věty (případ 2) má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Je-li n liché (tedy $n-1$ sudé), má podle tvrzení věty funkce $g = f'$ v bodě x_0 ostré lokální minimum. Protože $g(x_0) = f'(x_0) = 0$, existuje $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - x_0| < \delta$ je $f'(x) > 0$. Potom podle předchozí věty (případ 3) je funkce f rostoucí v bodě x_0.

Druhý případ $f^{(n)}(x_0) < 0$ lze dokázat podobně nebo převést tento případ na předchozí vyšetřováním funkce $-f$ místo funkce f. □

6. Inflexní body

Již známe význam znaménka druhé derivace. Nyní budeme zkoumat, co se děje v bodech, v nichž je druhá derivace rovna nule nebo neexistuje. Podíváme-li se, kdy je funkce podle definice ryze konvexní nebo ryze konkávní v bodě, zjistíme, že v některých bodech, v nichž je druhá derivace rovna nule nebo neexistuje, bude pravděpodobně přecházet křivka v bodě $[x_0, f(x_0)]$

z jedné strany tečny na druhou.

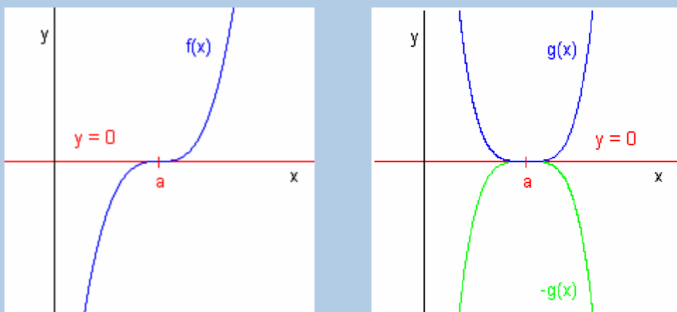
Definice 6.41 *Nechť funkce f má v bodě x_0 derivaci. Dále nechť existuje číslo $\delta > 0$ tak, že nastává jeden z těchto dvou případů:*

- *Buď leží bod $[x, f(x)]$ pro $x_0 - \delta < x < x_0$ pod tečnou*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{6.9}$$

  a pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ nad tečnou.
- *Nebo leží bod $[x, f(x)]$ pro $x_0 - \delta < x < x_0$ nad tečnou (6.9) a pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ pod tečnou.*

Potom říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **inflexi** *nebo také, že křivka $y = f(x)$ má v bodě $[x_0, f(x_0)]$* **inflexní bod**.



Obrázek 6.5: Funkce f má v bodě a inflexní bod, zatímco funkce g je v bodě a ryze konvexní a funkce $-g$ je v bodě a ryze konkávní.

Celá obrazovka
Začátek
Strana 148
Vyhledávání
◀ ▶
Zpět Vpřed
Zavřít
Ukončit

Věta 6.42 **(Nutná podmínka existence inflexe.)** *Existuje-li* $f''(x_0) \neq 0$, *potom nemá funkce* f *v bodě* x_0 *inflexi.*

Důkaz. Je-li $f''(x_0) \neq 0$, potom je funkce f v bodě x_0 buď ryze konvexní nebo ryze konkávní. Podle definice tedy nedochází k přechodu křivky v bodě $[x_0, f(x_0)]$ z jedné strany tečny na druhou a v bodě x_0 není inflexní bod. □

Poznámka 6.43 **Inflexe tedy může nastat jen v bodech, v nichž se druhá derivace buď rovná nule nebo neexistuje.** *Otázku, zda-li je v takovém bodě inflexní bod, nám pomůže rozhodnout následující věta.*

Věta 6.44 **(Postačující podmínka existence inflexe.)** *Nechť* $x_0 \in (a, b)$. *Dále nechť funkce* f *má spojitou první derivaci v intervalu* (a, b) *a nechť má druhou derivaci v každém bodě intervalu* (a, b) *různém od bodu* x_0. *Potom platí:*

- *Existuje-li* $\delta > 0$ *tak, že pro* $x_0 - \delta < x < x_0$ *je* $f''(x) < 0$ *a pro* $x_0 < x < x_0 + \delta$ *je* $f''(x) > 0$, *má funkce* f *v bodě* x_0 *inflexi.*
- *Existuje-li* $\delta > 0$ *tak, že pro* $x_0 - \delta < x < x_0$ *je* $f''(x) > 0$ *a pro* $x_0 < x < x_0 + \delta$ *je* $f''(x) < 0$, *má funkce* f *v bodě* x_0 *inflexi.*
- *Existuje-li* $\delta > 0$ *tak, že pro* $0 < |x - x_0| < \delta$ *je* $f''(x) > 0$, *je funkce* f *v bodě* x_0 *ryze konvexní.*
- *Existuje-li* $\delta > 0$ *tak, že pro* $0 < |x - x_0| < \delta$ *je* $f''(x) < 0$, *je funkce* f *v bodě* x_0 *ryze konkávní.*

Důkaz této věty je podobný důkazu postačující podmínky existence lokálního extrému, takže ho vynecháme.

7. Dodatky a příklady

Definice 6.45 *Nechť $T = [x, f(x)]$ je bod rovinné křivky $y = f(x)$ a p je přímka určena rovnicí $y = kx + q$. Vzdálenost bodu T od přímky p označme $v(x) = \dfrac{|f(x) - kx - q|}{\sqrt{k^2+1}}$. Je-li $\lim\limits_{x\to\infty} v(x) = 0$, pak přímku p nazýváme* **asymptotou** *křivky. Má-li funkce f v bodě c nevlastní limitu ∞ nebo $-\infty$ (popřípadě jednostrannou), pak přímka $x = c$ (rovnoběžná s osou y) je* **svislou asymptotou***.*

Pro asymptoty, které nejsou rovnoběžné s osou y platí:

Věta 6.46 *Je-li křivka $y = f(x)$ definována v intervalu $[a, \infty)$ a existují-li vlastní limity*

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad a \qquad q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx),$$

pak asymptota existuje a má rovnici $y = kx + q$.

Analogické tvrzení lze vyslovit i pro případ intervalu $(-\infty, a]$.

Důkaz.

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx - q) = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) - q = q - q = 0.$$

Absolutní hodnota je spojitá funkce, takže

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x) - kx - q|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{|0|}{\sqrt{k^2+1}} = 0.$$

□

Na závěr uvedeme několik aplikací teorie probrané v této kapitole.

Příklad 6.47 **(Vyšetřování průběhu funkce.)** *Vyšetřujme průběh funkce* $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

- *Určíme definiční obor* $D(f) = \{x \in \mathbb{R};\, x \neq 0\}$.
- *Funkce je spojitá na celém definičním oboru.*
- *Dále si všimněme, že daná funkce je lichá*
$$f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x).$$
- *Spočtěme první a druhou derivaci*
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \qquad f''(x) = \frac{2}{x^3} \qquad \text{pro všechna } x \in D(f).$$
- *Najdeme lokální extrémy. Rovnice* $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = 0$ *je splněna v bodech* $x_1 = 1$ *a* $x_2 = -1$. *Podle věty 6.40 pro* $n = 2$ *je v bodě* $x_1 = 1$ *ostré lokální minimum* ($f''(1) = 2 > 0$) *a v bodě* $x_2 = -1$ *ostré lokální maximum* ($f''(-1) = -2 < 0$). *Nakonec spočteme funkční hodnoty* $f(1) = 2$ *a* $f(-1) = -2$. *V ostatních bodech definičního oboru derivace existuje a je různá od nuly, takže žádné další lokální extrémy daná funkce nemá.*

- *Pro* $|x| > 1$ *je* $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} > 0$, *takže funkce f je rostoucí v intervalech* $(1, \infty)$ *a* $(-\infty, -1)$. *V intervalech* $(0, 1)$ *a* $(-1, 0)$ *je* $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} < 0$ *a tedy funkce f je v těchto intervalech klesající.*
- *Dále je* $f''(x) = \dfrac{2}{x^3} > 0$ *pro* $x > 0$, *takže funkce f je ryze konvexní v intervalu* $(0, \infty)$. *V intervalu* $(-\infty, 0)$ *je* $f''(x) = \frac{2}{x^3} < 0$ *a tedy funkce f je v tomto intervalu ryze konkávní.*

- *Druhá derivace existuje a je různá od nuly na celém definičním oboru funkce f, takže funkce f nemá inflexní bod.*
- *Nakonec spočteme limity v krajních bodech definičního oboru a určíme asymptoty.*

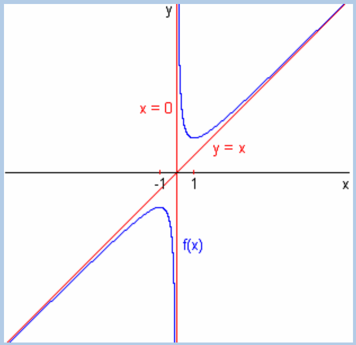
$$\lim_{x\to 0^+}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-}\left(x+\frac{1}{x}\right)=-\infty,$$

takže přímka $x=0$ je svislá asymptota. Dále existují konečné limity

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{y\to 0}(1+y^2)=1,$$

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\frac{1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0,$$

tedy podle věty 6.46 je přímka $y=x$ asymptota.



Obrázek 6.6: Nakonec načrtneme graf funkce včetně asymptot.

Poznámka 6.48 *Je-li funkce lichá, je její graf je symetrický vzhledem k počátku souřadnic. Této vlastnosti bychom mohli využít a vyšetřovat její průběh jen pro $x \geq 0$ – protože má-li lichá funkce například v bodě $x = 1$ lokální maximum, bude mít v bodě $x = -1$ lokální minimum, je-li funkce například na intervalu $(0, \infty)$ konvexní, bude na intervalu $(-\infty, 0)$ konkávní a podobně. Takže v předchozím příkladu stačilo vyšetřovat zadanou funkci pouze pro $x > 0$ a její průběh pro $x < 0$ odvodit z příslušné symetrie.*

Je-li funkce sudá, je její graf je symetrický podle osy y. Potom opět stačí vyšetřovat její průběh pouze pro $x \geq 0$ – protože má-li sudá funkce například v bodě $x = 1$ lokální maximum, bude mít v bodě $x = -1$ také lokální maximum, je-li funkce například na intervalu $(0, \infty)$ konvexní, bude konvexní i na intervalu $(-\infty, 0)$ a podobně.

Příklad 6.49 *Který z obdélníků o obvodu O cm $(O > 0)$ má největší obsah?* *Označíme-li strany obdélníka x a y, potom obsah $S = xy$ a $O = 2(x+y)$, nebo-li $y = \dfrac{O}{2} - x$. Potom $S(x) = x\left(\dfrac{O}{2} - x\right) = \dfrac{Ox}{2} - x^2$. Vzhledem k tomu, že délky stran musí být nezáporné, hledáme nyní maximum funkce S v intervalu $x \in \left[0, \dfrac{O}{2}\right]$. Funkce S nabývá svého maxima buď v bodech, v nichž je derivace rovna nule, nebo v krajních bodech. Z rovnice $S'(x) = \dfrac{O}{2} - 2x = 0$, plyne $x = \dfrac{O}{4}$. Máme tedy tři kandidáty na absolutní extrém: $S(0) = 0$, $S\left(\dfrac{O}{2}\right) = 0$ a $S\left(\dfrac{O}{4}\right) = \dfrac{O^2}{16}$. Absolutní maximum tedy nastává v bodě $x = \dfrac{O}{4}$, nebo-li* *největší obsah mezi všemi obdélníky o obvodu O má čtverec o straně* $\dfrac{O}{4}$.

Věta 6.50 **(O derivaci parametricky zadané funkce.)** *Nechť mají funkce $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$ v intervalu I vlastní derivaci a nechť dále $\varphi'(t) \neq 0$ v intervalu I. Pak pro $x \in \{\varphi(t); t \in I\}$ platí*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Důkaz. Je-li $\varphi'(t) \neq 0$, potom je funkce φ ryze monotónní a existuje k ní na intervalu I inverzní funkce φ^{-1}. Potom pro $x \in \{\varphi(t); t \in I\}$ platí $y(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ a z vět o derivaci složené funkce a o derivaci inverzní funkce plyne

$$\frac{dy}{dx} = \psi'(t)\left(\varphi^{-1}(x)\right)' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

□

Poznámka 6.51 *Spočítáme ještě druhou derivaci parametricky zadané funkce*

$$\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d}{dt}\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2}\,\frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Derivace vyšších řádů spočteme podobně.

Příklad 6.52 *Parametrické rovnice elipsy jsou: $x = a\cos t$ a $y = b\sin t$ pro $t \in (0,\pi)$ (pro horní polovinu elipsy). Potom pro $t \in (0,\pi)$ platí*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{cotg} t = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.$$

Určitý nebo-li Riemannův integrál

1. Součtová definice integrálu

V elementární geometrii se definuje obsah trojúhelníka (jako polovina součinu základny a výšky) a dále obsah obrazců, které se dají rozložit na konečný počet trojúhelníků (mnohoúhelníků). Problém, který přirozeným způsobem vede k zavedení určitého integrálu, je výpočet obsahu obecnějších obrazců než mnohoúhelníků. Představme si následující problém: Nechť je dána omezená nezáporná funkce f v intervalu $[a, b]$. Nyní sestrojme obrazec P, ohraničený osou x, přímkami $x = a$ a $x = b$ a funkcí f. Jak spočítat obsah obrazce P?

Nabízí se tato myšlenka: rozdělme interval $[a, b]$ na několik dílků (dělícími) body $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ (pro zjednodušení značení budeme psát $a = x_0$

Celá obrazovka
Začátek
Strana 155
Vyhledávání
◀ ▶
Zpět Vpřed
Zavřít
Ukončit

a $b = x_n$). Každý takto vzniklý interval $[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1, 2, \cdots, n$ bude tvořit základnu dvou obdélníků. První obdélník bude mít výšku M_i rovnou supremu funkce f v intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ a druhý bude mít výšku m_i rovnou infimu funkce f v intervalu $[x_{i-1}, x_i]$. Potom součet obsahů prvních obdélníků tvoří mnohoúhelník opsaný obrazci P a jeho obsah je roven číslu

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

A součet obsahů druhých obdélníků tvoří mnohoúhelník vepsaný obrazci P a jeho obsah je roven číslu

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Nyní se dostáváme k jádru naší hypotézy. Předpokládejme, že když bude počet dělících bodů vzrůstat nade všechny meze (nebo-li když budou délky jednotlivých dílků konvergovat k nule), bude jak obsah vepsaného tak i opsaného mnohoúhelníku konvergovat k téže limitě – obsahu obrazce P. V dalším textu se budeme věnovat ověřování této hypotézy. Pokud nebude řečeno jinak, budeme v této kapitole předpokládat, že $a < b$.

Definice 7.1 *Nechť $a < b$ a nechť je funkce f omezená v intervalu $[a, b]$. Je-li dáno $n \in \mathbb{N}$ a $n + 1$ dělících bodů*

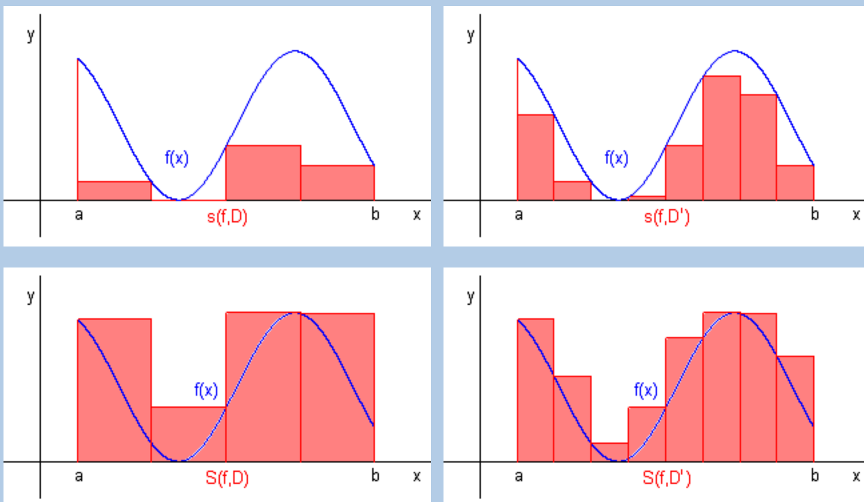
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

říkáme, že dělící body definují **dělení** *D intervalu $[a, b]$ na n intervalů $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\cdots$, $[x_{n-1}, x_n]$. Řekneme, že dělení D'* **zjemňuje** *dělení D, jestliže každý bod dělení D je také bodem dělení D'.*

Definice 7.2 *Nechť $a < b$ a f je funkce omezená v intervalu $[a, b]$. Dále nechť D je dělení intervalu $[a, b]$ s $n + 1$ dělícími body. Označme symbolem $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ tj. délku i-tého intervalu $[x_{i-1}, x_i]$, symbolem M_i supremum funkce f v intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ a symbolem m_i infimum funkce f v intervalu $[x_{i-1}, x_i]$. Danému rozdělení D přiřadíme dvě čísla:*

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \qquad\qquad s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i.$$

První číslo nazveme **horním součtem** *a druhé* **dolním součtem**.



Celá obrazovka
Začátek
Strana 157
Vyhledávání
◀ ▶
Zpět Vpřed
Zavřít
Ukončit

V následujícím lemmatu shrneme vlastnosti horních a dolních součtů.

Lemma 7.3 *Nechť $a < b$ a nechť je funkce f omezená v intervalu $[a, b]$. Potom platí následující tři tvrzení:*

- *Je-li M supremum a m infimum funkce f v intervalu $[a, b]$, potom pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ platí:*

$$m(b-a) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq M(b-a).$$

- *Je-li dělení D' zjemněním dělení D, je*

$$S(f, D') \leq S(f, D) \qquad a \qquad s(f, D') \geq s(f, D).$$

- *Jsou-li D_1 a D_2 dvě libovolná dělení intervalu $[a, b]$, je*

$$s(f, D_1) \leq S(f, D_2).$$

Příklad 7.4 *Je-li $\forall x \in [a, b]$ $f(x) = c$, potom pro libovolné dělení D je*

$$c(b-a) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq c(b-a).$$

Definice 7.5 *Nechť $a < b$ a nechť je funkce f omezená v intervalu $[a, b]$. Potom definujeme*

$$s(f, [a, b]) := \sup_D \; s(f, D) \qquad a \qquad S(f, [a, b]) := \inf_D \; S(f, D).$$

První číslo nazveme **dolním Riemannovým integrálem** *a druhé* **horním Riemannovým integrálem** *funkce f přes interval $[a, b]$. Supremum a infimum bereme přes všechna dělení D intervalu $[a, b]$.*

Jak zjistíme přechodem k supremu (infimu), má dolní (horní) integrál podobné vlastností jako dolní (horní) součet.

Lemma 7.6 *Nechť $a < b$ a nechť je funkce f omezená v intervalu $[a, b]$. Označíme-li $A = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $B = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ a $K = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Potom platí:*

$$A(b-a) \leq s(f,[a,b]) \leq S(f,[a,b]) \leq B(b-a),$$

$$|s(f,[a,b])| \leq K(b-a) \qquad a \qquad |S(f,[a,b])| \leq K(b-a).$$

Poznámka 7.7 *Množiny $\{s(f, D) : D$ dělení intervalu $[a, b]\}$ a $\{S(f, D) : D$ dělení intervalu $[a, b]\}$ jsou podle lemmatu 7.3 omezené a tedy podle věty o supremu a infimu příslušné supremum a infimum v definici 7.5 existují a jsou konečné.*

Definice 7.8 *Nechť $a < b$ a nechť je funkce f omezená v intervalu $[a, b]$. Rovnají-li se horní a dolní Riemannův integrál funkce f přes interval $[a, b]$, potom definujeme* **Riemannův (určitý) integrál** *funkce f přes interval $[a, b]$ předpisem*

$$\int_a^b f(x)\,dx := s(f,[a,b]) = S(f,[a,b]).$$

Říkáme také, že Riemannův integrál existuje. Je-li $a > b$, potom definujeme Riemannův integrál předpisem

$$\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx,$$

pokud druhý integrál existuje. Je-li $a = b$, pak integrál definujeme nulou. Funkci f nazveme **integrandem**, *číslo b* **horní mezí** *a číslo a* **dolní mezí** *horního (dolního) integrálu. Písmeno x nazveme* **integrační proměnnou**.

Poznámka 7.9 *Integrační proměnná nemusí být označena písmenem x, ale může být označena libovolným písmenem. Tedy například*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Příklad 7.10 *Nechť $a < b$ a $\forall x \in [a, b]$ je $f(x) = c$. Potom z příkladu 7.4 plyne*

$$c(b-a) \le s(c,[a,b]) \le s(c,[a,b]) \le c(b-a).$$

Tedy ve všech nerovnostech nastane rovnost a $\displaystyle\int_a^b c\ dx = c(b-a).$

Příklad 7.11 *Nechť $a < b$. Definujme funkci f v intervalu $[a, b]$ následovně: $f(x) = 0$ pro racionální x a $f(x) = 1$ pro iracionální x. Je-li D je libovolné dělení intervalu $[a, b]$, potom pro libovolný interval $[x_{i-1}, x_i]$, má funkce f v tomto intervalu supremum $M_i = 1$ a infimum $m_i = 0$. Tedy*

$$S(f,D) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = b - a, \qquad s(f,D) = 0.$$

Protože pro každé dělení dostaneme stejný horní (dolní) součet, platí

$$0 = s(f,[a,b]) < S(f,[a,b]) = b - a.$$

Tedy Riemannův integrál funkce f přes interval $[a, b]$ neexistuje.

Existuje-li určitý integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, můžeme v lemmatu 7.6 nahradit dolní a horní integrál určitým integrálem a obdržíme:

Lemma 7.12 *Nechť $a < b$ a nechť je funkce f omezená v intervalu $[a, b]$. Označíme-li $A = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $B = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ a $K = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Potom platí:*

$$A(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq B(b-a) \qquad a \qquad \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq K(b-a).$$

V definici 7.5 jsme definovali horní integrál omezené funkce f jako infimum horních součtů. Nyní ukážeme, že horní integrál je také limitou, ke které konvergují horní součty $S(f, D)$, jestliže čísla Δx_i příslušná dělení D konvergují k nule.

Definice 7.13 *Nechť $a < b$ a nechť D je libovolné dělení intervalu $[a, b]$ definované dělícími body $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Symbolem $v(D)$ označíme největší z čísel $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$, $(\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$. Číslo $v(D)$ nazveme* **normou dělení** *D.*

Věta 7.14 *Nechť $a < b$ a nechť f je omezená funkce v intervalu $[a, b]$. Dále nechť $D_1, D_2, \cdots, D_m, \cdots$, je posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ taková, že $\lim_{m\to\infty} v(D_m) = 0$. Potom*

$$\lim_{\mathbf{m}\to\infty} \mathbf{S}(\mathbf{f}, \mathbf{D_m}) = \mathbf{S}(\mathbf{f}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]).$$

Věta 7.15 *Nechť $a < b$. a nechť f je omezená funkce v intervalu $[a, b]$. Dále nechť $D_1, D_2, \cdots, D_m, \cdots$, je posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ taková, že je $\lim_{m\to\infty} v(D_m) = 0$. Potom*

$$\lim_{\mathbf{m}\to\infty} \mathbf{s}(\mathbf{f}, \mathbf{D_m}) = \mathbf{s}(\mathbf{f}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]).$$

Důkaz. Vzhledem k tomu, že důkazy předchozích dvou vět jsou velmi podobné, dokážeme pouze první z nich. K ověření první věty stačí, dokážeme-li, že $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tak, že nerovnosti

$$S(f, [a, b]) - \varepsilon < S(f, D_m) < S(f, [a, b]) + \varepsilon \tag{7.1}$$

jsou splněny pro každé dělení D_m intervalu $[a, b]$, které splňuje podmínku $v(D_m) < \delta$. Potom protože $\lim\limits_{m\to\infty} v(D_m) = 0$, existuje totiž takové n_0, že nerovnost $v(D_m) < \delta$ platí pro $\forall m > n_0$ a tedy také nerovnosti (7.1) platí pro $\forall m > n_0$. Ale nerovnosti (7.1) platí pro libovolné kladné ε a to je možné pouze pokud $\lim\limits_{m\to\infty} S(f, D_m) = S(f, [a, b])$.

K dokončení důkazu tedy potřebujeme dokázat nerovnosti (7.1). Protože $S(f, [a, b])$ je infimem horních součtů platí jednak zřejmě levá nerovnost v (7.1) a jednak existuje dělení D (v opačném případě by $S(f, [a, b])$ nebylo infimem) tak, že

$$S(f, D) < S(f, [a, b]) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7.2}$$

Dále je funkce f omezená a tedy $\exists K$ tak, že $|f(x)| \le K$ v intervalu $[a, b]$. Dělení D rozděluje interval $[a, b]$ na p dílků. Položme

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4Kp}. \tag{7.3}$$

Nyní vezmeme libovolné dělení D_m, pro které platí $v(D_m) < \delta$ a dokážeme, že pro něj platí nerovnosti (7.1). Zvolme dále dělení D'_m tak, že toto dělení bude obsahovat všechny dělící body obou dělení D_m a D a vyšetřeme rozdíl jejich horních součtů $|S(f, D_m) - S(f, D'_m)|$. Mohou nastat dva případy:

- Dílek dělení D_m neobsahuje dělící bod z dělení D a tedy i dělení D'_m obsahuje tentýž dílek, takže příspěvek k rozdílu horních součtů je na tomto dílku roven nule.

- Dílek dělení D_m obsahuje dělící bod z dělení D a tedy tento dílek je v dělení D'_m rozdělen na dva nebo více dílků. Příspěvek k rozdílu horních součtů je na tomto dílku nejvýše roven $2K\delta$, protože délka dílku je nejvýše δ a maximum rozdílu funkčních hodnot je $|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq K + K = 2K$. Ještě poznamenejme, že počet těchto dílků je nejvýše roven $p - 1$.

Celkem tedy máme

$$|S(f, D_m) - S(f, D'_m)| \leq (p-1)2K\delta < 2Kp\delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

nebo-li

$$S(f, D_m) < S(f, D'_m) + \frac{\varepsilon}{2} \leq S(f, D) + \frac{\varepsilon}{2} < S(f, [a, b]) + \varepsilon$$

(protože dělení D'_m je zjemněním dělení D). Tím jsme dokázali i pravou nerovnost v nerovnosti (7.1). □

Poznámka 7.16 *Význam vět 7.14 a 7.15 spočívá v tom, že chceme-li nalézt dolní (horní) integrál, nemusíme vyšetřovat všechna dělení D intervalu $[a, b]$, a sestrojit supremum dolních součtů $s(f, D)$ (infimum horních součtů $S(f, D)$), ale stačí sestrojit posloupnost dělení $D_1, \cdots, D_m, \cdots$ takovou, že $\lim_{m\to\infty} v(D_m) = 0$, a najít příslušnou limitu posloupnosti $s(f, D_1), s(f, D_2), \cdots, s(f, D_m), \cdots$, $(S(f, D_1), S(f, D_2), \cdots, S(f, D_m), \cdots.)$ Pomocí vět 7.14 a 7.15 tedy můžeme snáze počítat horní (dolní) integrály.*

Příklad 7.17 *Nechť $f(x) = x$ a spočítejme příslušný dolní a horní integrál přes interval $[0, 1]$. Nejprve sestrojme posloupnost dělení $D_1, D_2, \cdots, D_m, \cdots$*

tak, že dělení D_m rozdělí interval $[0,1]$ na m stejných dílků. Potom $v(D) = \Delta x_i = \dfrac{1}{m}$ a tedy $\lim\limits_{m\to\infty} v(D_m) = 0$. Potom podle vět 7.14 a 7.15 platí:

$$s(x,[a,b]) = \lim_{m\to\infty} s(f,D_m) \qquad a \qquad S(x,[a,b]) = \lim_{m\to\infty} S(f,D_m).$$

Spočítejme tedy $s(f,D_m)$ a $S(f,D_m)$. Supremum funkce $f(x) = x$ na intervalu $\left[\dfrac{i-1}{m}, \dfrac{i}{m}\right]$ je $M_i = \dfrac{i}{m}$ a infimum je $m_i = \dfrac{i-1}{m}$. Potom platí

$$S(f,D_m) = \sum_{i=1}^{m} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{i}{m}\frac{1}{m} = \frac{1}{m^2}\frac{m(m+1)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2m},$$

$$s(f,D_m) = \sum_{i=1}^{m} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{i-1}{m}\frac{1}{m} = \frac{1}{m^2}\frac{m(m-1)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}.$$

Potom máme

$$s(x,[a,b]) = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2m}\right) = \frac{1}{2} \quad a \quad S(x,[a,b]) = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2m}\right) = \frac{1}{2}$$

a tedy funkce f má integrál od 0 do 1 a platí $\displaystyle\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

Poznámka 7.18 *V následující větě si ukážeme, že při počítání určitého integrálu nemusíme na každém dílku $[x_{i-1}, x_i]$ hledat supremum a infimum funkce f a následně počítat příslušný horní a dolní integrál, ale stačí vzít libovolnou hodnotu funkce $f(x)$ v kterémkoliv bodě intervalu $[x_{i-1}, x_i]$. Nevýhodou této věty je, že musíme již předem vědět, že určitý integrál od a do b existuje. Otázkou, jak poznat, zda integrál existuje, se budeme zabývat později.*

Celá obrazovka
Začátek
Strana 164
Vyhledávání
◀ ▶
Zpět Vpřed
Zavřít
Ukončit

Věta 7.19 *Nechť $a < b$ a nechť f je funkce, která má určitý integrál od a do b a nechť $D_1, D_2, \cdots, D_m, \cdots$, je posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ taková, že je $\lim_{m\to\infty} v(D_m) = 0$. Dále nechť dělícími body dělení D_m jsou body*

$$a = x_{0,m} < x_{1,m} < x_{2,m} < \cdots < x_{n_m-1,m} < x_{n_m,m} = b$$

a pro každý interval $[x_{i-1,m}, x_{i,m}]$ nechť je dáno číslo $\xi_{i,m}$ tak, že $x_{i-1,m} \leq \xi_{i,m} \leq x_{i,m}$ $\forall i = 1, 2, \cdots, n_m - 1, n_m$. Potom platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n_m} f(\xi_{i,m})(x_{i,m} - x_{i-1,m}).$$

Důkaz. Z vlastností horních a dolních součtů ihned plyne

$$s(f, D_m) \leq \sum_{i=1}^{n_m} f(\xi_i)(x_{i,m} - x_{i-1,m}) \leq S(f, D_m)$$

a z vět 7.14 a 7.15 plyne

$$\int_a^b f(x)\,dx = s(f, [a, b]) = \lim_{m\to\infty} s(f, D_m) \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n_m} f(\xi_i)(x_{i,m} - x_{i-1,m})$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n_m} f(\xi_i)(x_{i,m} - x_{i-1,m}) \leq \lim_{m\to\infty} S(f, D_m) = S(f, [a, b]) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

A podle věty o limitě sevřené posloupnosti je tvrzení věty dokázáno. □

2. Vlastnosti určitého integrálu

V této části si odvodíme linearitu určitého integrálu vzhledem k integrandu, aditivitu integračních mezí a základní nerovnosti.

Věta 7.20 *Nechť $a < b$. Existují-li integrály $\int_a^b f_1(x)\,dx$ a $\int_a^b f_2(x)\,dx$, existuje i integrál $\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))\,dx$ a platí*

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Důkaz. Nechť D_m je libovolné dělení intervalu $[a,b]$, M_i' supremum funkce f_1 na intervalu $[x_{i-1},x_i]$, M_i'' supremum funkce f_2 na intervalu $[x_{i-1},x_i]$, m_i' infimum funkce f_1 na intervalu $[x_{i-1},x_i]$ a m_i'' infimum funkce f_2 na intervalu $[x_{i-1},x_i]$. Potom pro všechna x z intervalu $[x_{i-1},x_i]$ platí

$$m_i' + m_i'' \le f_1(x) + f_2(x) \le M_i' + M_i''.$$

Označíme-li symboly M_i supremum a m_i infimum funkce $f = f_1 + f_2$ na intervalu $[x_{i-1},x_i]$ a $S(f,D_m)$, $S(f_1,D_m)$, $S(f_2,D_m)$ ($s(f,D_m)$, $s(f_1,D_m)$, $s(f_2,D_m)$) příslušné horní (dolní) součty, potom máme

$$S(f,D_m) = \sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^n (M_i' + M_i'')\Delta x_i = S(f_1,D_m) + S(f_2,D_m),$$

$$s(f,D_m) = \sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i \ge \sum_{i=1}^n (m_i' + m_i'')\Delta x_i = s(f_1,D_m) + s(f_2,D_m).$$

Nyní sestrojme posloupnost dělení $D_1, \cdots, D_m \cdots$, tak, že $\lim\limits_{m\to\infty} v(D_m) = 0$. Dále přechodem k limitě, aplikací vět 7.14 a 7.15 a využitím předpokladu existence integrálů funkcí f_1 a f_2 na intervalu $[a, b]$ dostaneme

$$\int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx = s(f_1, [a, b]) + s(f_2, [a, b])$$
$$= \lim_{m\to\infty} (s(f_1, D_m) + s(f_2, D_m)) \le \lim_{m\to\infty} s(f, D_m)$$

a

$$\lim_{m\to\infty} S(f, D_m) \le \lim_{m\to\infty} (S(f_1, D_m) + S(f_2, D_m))$$
$$= S(f_1, [a, b]) + S(f_2, [a, b]) = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Nakonec zkombinujeme předchozí dvě nerovnosti a obdržíme

$$\int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx \le \lim_{m\to\infty} s(f, D_m)$$
$$\le \lim_{m\to\infty} S(f, D_m) \le \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Tedy horní integrál se rovná dolnímu a tím je věta dokázána. □

Věta 7.21 *Nechť $a < b$. Existuje-li integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ a je-li c libovolné číslo, existuje i integrál $\int_a^b cf(x)\,dx$ a platí*

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Důkaz. Nechť D_m je libovolné dělení intervalu $[a, b]$. Je-li $c \geq 0$ a je-li M_i supremum a m_i infimum funkce $f(x)$ na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$, potom je supremum funkce $cf(x)$ na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ rovno číslu cM_i a infimum rovno číslu cm_i. A pro horní a dolní součty platí:

$$cs(f, D_m) = \sum_{i=1}^{n} cm_i \Delta x_i = s(cf, D_m), \;\; S(cf, D_m) = \sum_{i=1}^{n} cM_i \Delta x_i = cS(f, D_m).$$

Nyní sestrojíme posloupnost dělení $D_1, \cdots, D_m, \cdots$ tak, že $\lim\limits_{m\to\infty} v(D_m) = 0$. Dále přechodem k limitě, aplikací vět 7.14 a 7.15 a využitím předpokladu existence integrálu $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ dostaneme

$$c\int_a^b f(x)\,dx = cs(f, [a, b]) = c\lim_{m\to\infty} s(f, D_m) = \lim_{m\to\infty} s(cf, D_m)$$

a

$$\lim_{m\to\infty} S(cf, D_m) = c\lim_{m\to\infty} S(f, D_m) = cS(f, [a, b]) = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Tedy horní integrál se rovná dolnímu a tím je věta pro $c \geq 0$ dokázána.

Podobně budeme postupovat pro $c < 0$. Potom je supremum funkce $cf(x)$ na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ rovno číslu cm_i a infimum rovno číslu cM_i. A pro horní a dolní součty platí:

$$cS(f, D_m) = \sum_{i=1}^{n} cM_i \Delta x_i = s(cf, D_m), \;\; S(cf, D_m) = \sum_{i=1}^{n} cm_i \Delta x_i = cs(f, D_m)$$

Nyní sestrojíme posloupnost dělení $D_1, \cdots, D_m, \cdots$, tak, že $\lim\limits_{m\to\infty} v(D_m) =$

0. Dále přechodem k limitě, aplikací vět 7.14 a 7.15 a využitím předpokladu existence integrálu funkce f na intervalu $[a, b]$ dostaneme

$$c \int_a^b f(x)\, dx = cS(f, [a, b]) = c \lim_{m\to\infty} S(f, D_m) = \lim_{m\to\infty} s(cf, D_m),$$

$$\lim_{m\to\infty} S(cf, D_m) = c \lim_{m\to\infty} s(f, D_m) = cs(f, [a, b]) = c \int_a^b f(x)\, dx.$$

Tedy horní integrál se rovná dolnímu a tím je věta dokázána. □

Větu 7.20 můžeme pomocí indukce snadno rozšířit na libovolný počet sčítanců. Zkombinujeme-li věty 7.20 a 7.21 dostaneme následující větu:

Věta 7.22 *Nechť $a < b$. Existují-li integrály $\int_a^b f_1(x)\, dx$, $\int_a^b f_2(x)\, dx$, $\cdots$, $\int_a^b f_n(x)\, dx$ a jsou-li c_1, c_2, $\cdots$, c_n libovolná čísla, potom platí*

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x))\, dx = c_1 \int_a^b f_1(x)\, dx + \cdots + c_n \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

Věta 7.23 *Nechť $a < b$. Existují-li integrály $\int_a^b f_1(x)\, dx$, $\int_a^b f_2(x)\, dx$ a je-li $f_1(x) \geq f_2(x)$ pro všechna x z intervalu $[a, b]$. Potom platí*

$$\int_a^b f_1(x)\, dx \geq \int_a^b f_2(x)\, dx.$$

(Speciálně pokud $f_2(x) = 0$ tak $\int_a^b f_1(x)\, dx \geq 0$.)

Důkaz. Podle věty 7.22 pro $n = 2$, $c_1 = 1$ a $c_2 = -1$ platí

$$\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Dále máme $f_1(x) \geq f_2(x)$ a tedy $f_1(x)-f_2(x) \geq 0$, potom podle lemmatu 7.12 pro $A = 0$ dostaneme

$$\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,dx \geq 0.$$

Dohromady tedy

$$\int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,dx \geq 0$$

a tím je věta dokázána. □

Věta 7.24 *Nechť $a < b < c$. Existují-li integrály $\int_a^b f(x)\,dx$ a $\int_b^c f(x)\,dx$, existuje i integrál $\int_a^c f(x)\,dx$ a platí*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Důkaz. Nechť $D'_1, D'_2, \cdots, D'_m, \cdots$, je posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ taková, že $\lim_{m\to\infty} v(D'_m) = 0$ a nechť $D''_1, D''_2, \cdots, D''_m, \cdots$, je posloupnost dělení intervalu $[b, c]$ taková, že $\lim_{m\to\infty} v(D''_m) = 0$. Nyní definujme posloupnost $D_1, D_2, \cdots, D_m, \cdots$, dělení intervalu $[a, c]$, takové, že každé dělení D_i má stejné dělící body jako dělení D_i' a D_i''. Potom platí

$$S(f, D_m) = S(f, D_m') + S(f, D_m'') \quad \text{a} \quad s(f, D_m) = s(f, D_m') + s(f, D_m'').$$

Dále přechodem k limitě, aplikací vět 7.14 a 7.15 a využitím předpokladu existence integrálů funkce f na intervalu $[a, b]$ a na intervalu $[b, c]$ dostaneme

$$\lim_{m\to\infty} s(f, D_m) = \lim_{m\to\infty} (s(f, D_m') + s(f, D_m''))$$

$$= s(f, [a, b]) + s(f, [b, c]) = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx$$

a

$$\lim_{m\to\infty} S(f, D_m) = \lim_{m\to\infty} (S(f, D_m') + S(f, D_m''))$$

$$= S(f, [a, b]) + S(f, [b, c]) = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx.$$

Tedy horní integrál se rovná dolnímu a tím je věta dokázána. □

Věta 7.25 *Nechť $a < b < c < d$. Existuje-li integrál $\int_a^d f(x)\, dx$ existuje i integrál $\int_b^c f(x)\, dx$.*

Důkaz. Nechť D_1', D_2', $\cdots$, D_m', $\cdots$, je posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ taková, že $\lim_{m\to\infty} v(D') = 0$, D_1'', D_2'', $\cdots$, D_m'', $\cdots$, je posloupnost dělení intervalu $[b, c]$ taková, že $\lim_{m\to\infty} v(D'') = 0$ a D_1''', D_2''', $\cdots$, D_m''', $\cdots$, je posloupnost dělení intervalu $[c, d]$ taková, že $\lim_{m\to\infty} v(D''') = 0$. Nyní definujme posloupnost $D_1, D_2, \cdots, D_m, \cdots$, dělení intervalu $[a,d]$, takové, že každé dělení D_i má stejné dělící body jako dělení D_i', D_i'', a D_i'''. Potom platí

$$S(f, D_m) = S(f, D_m') + S(f, D_m'') + S(f, D_m'''),$$
$$s(f, D_m) = s(f, D_m') + s(f, D_m'') + s(f, D_m''').$$

Přechodem k limitě, aplikací vět 7.14 a 7.15 a využitím předpokladu existence integrálu funkce f na intervalu $[a,d]$ dostaneme

$$\begin{aligned}\int_a^d f(x)\,dx &= \lim_{m\to\infty} s(f, D_m) = \lim_{m\to\infty} (s(f, D_m') + s(f, D_m'') + s(f, D_m''')) \\ &= s(f,[a,b]) + s(f,[b,c]) + s(f,[c,d])\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\int_a^d f(x)\,dx &= \lim_{m\to\infty} S(f, D_m) = \lim_{m\to\infty} (S(f, D_m') + S(f, D_m'') + S(f, D_m''')) \\ &= S(f,[a,b]) + S(f,[b,c]) + S(f,[c,d]).\end{aligned}$$

Odečtením předchozích dvou rovností obdržíme

$$\begin{aligned}0 = (S(f,[a,b]) - s(f,[a,b])) + (S(f,[b,c]) - s(f,[b,c])) \\ + (S(f,[c,d]) - s(f,[c,d]))\,.\end{aligned}$$

Protože horní integrál je větší nebo roven dolnímu, je také každý sčítanec větší nebo roven nule. Potom z poslední rovnosti plyne, že každý sčítanec musí být roven nule. Tedy integrál $\displaystyle\int_b^c f(x)\,dx$ existuje, protože příslušný horní integrál se rovná dolnímu a tím je věta dokázána. $\square$

3. Existence určitého integrálu

Věta 7.26 **(Vlastnosti integrálu jako funkce horní meze.)** *Nechť $a < b$ a nechť f je omezená funkce, která má určitý integrál od a do b. Označme $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, potom platí*

- *Funkce F je spojitá v intervalu $[a, b]$.*
- *Je-li funkce f spojitá v intervalu $[a, b]$, potom $F'(x) = f(x)$ v intervalu (a, b). Kromě toho má funkce F derivaci zprava v bodě a rovnou $f(a)$ a derivaci zleva v bodě b rovnou $f(b)$.*

Tvrzení platí i pro horní a dolní Riemannův integrál. V tom případě nemusíme předpokládat existenci určitého integrálu, ale stačí omezenost funkce f.

Důkaz. Funkce f je omezená, existuje tedy číslo K tak, že $|f(x)| \leq K$. V prvním případě stačí dokázat, že funkce F je spojitá v intervalu $[a, b)$ zprava a v intervalu $(a, b]$ zleva. Dokážeme pouze spojitost zprava. Je-li $\varepsilon > 0$ a $x_0 \in [a, b)$, zvolme $\delta = \min\left(b - x_0, \dfrac{\varepsilon}{K}\right)$. Nyní dokážeme, že pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, je $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$ (tím bude dokázáno, že funkce F je spojitá v bodě x_0.) Potom platí

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right| = \left|\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right| \\ \leq K(x - x_0) < K\delta \leq \varepsilon.$$

V druhém případě stačí dokázat, že funkce F má derivaci v intervalu $[a, b)$ zprava a v intervalu $(a, b]$ zleva. Tvrzení opět dokážeme pouze pro derivaci zprava. Je-li $\varepsilon > 0$ a $x_0 \in [a, b)$, potom ze spojitosti funkce f plyne, že existuje δ $(0 < \delta \leq b - x_0)$ tak, že nerovnost $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon/2$ je splněna pro všechna t z intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$. Je-li $0 < h < \delta$, potom platí:

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(t) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{7.4}$$

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\, dt. \tag{7.5}$$

Dále z věty 7.12 a nerovnosti (7.4) obdržíme

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\, dt \leq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} < f(x_0) + \varepsilon. \tag{7.6}$$

Nakonec zkombinujeme nerovnosti (7.6) s rovností (7.5) a dostaneme

$$f(x_0) - \varepsilon < \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} < f(x_0) + \varepsilon,$$

nebo-li

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \varepsilon,$$

pro každé h vyhovující nerovnostem $0 < h < \delta$. Tedy funkce F má v bodě x_0 derivaci zprava rovnou číslu $f(x_0)$. □

Věta 7.27 **(O existenci určitého integrálu.)** *Nechť $a < b$ a nechť je funkce f spojitá v intervalu $[a, b]$, potom $\int_a^b f(x)\, dx$ existuje.*

Důkaz. Protože je funkce $f(x)$ spojitá v intervalu $[a, b]$, je v tomto intervalu omezená. Pro zkrácení označme

$$F(x) = S(f, [a, x]), \qquad \text{a} \qquad G(x) = s(f, [a, x]).$$

Nyní aplikujeme větu 7.26 na funkce F a G. Podle této věty jsou obě funkce spojité v intervalu $[a, b]$ a v každém vnitřním bodě tohoto intervalu platí $F'(x) = f(x)$ a $G'(x) = f(x)$. Potom funkce $F - G$ je také spojitá v intervalu $[a, b]$ a v každém vnitřním bodě má derivaci rovnou nule, tedy funkce $F - G$ je konstantní v intervalu $[a, b]$. Dále $F(a) - G(a) = 0$, takže funkce F a G jsou totožné na intervalu $[a, b]$. Nebo-li horní Riemannův integrál se rovná dolnímu a tedy Riemannův integrál existuje. $\square$

Neurčitý integrál nebo-li primitivní funkce

1. Definice a základní vlastnosti

Definice 8.1 *Nechť $F(x)$, $f(x)$ jsou dvě funkce definované v otevřeném intervalu (a, b) (může být omezený i neomezený). Platí-li pro všechna x z intervalu (a, b) rovnice*

$$F'(x) = f(x),$$

říkáme, že funkce $F(x)$ je **primitivní funkcí** *k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b). Primitivní funkci také nazýváme neurčitým integrálem a značíme ji $\int f(x)\,dx$.*

Příklad 8.2 *Například funkce $\dfrac{x^2}{2}$ je v intervalu $(-\infty, \infty)$ primitivní funkcí*

Celá obrazovka
Začátek
Strana 176
Vyhledávání
◄ ►
Zpět Vpřed
Zavřít
Ukončit

k funkci x. Funkce $\operatorname{tg} x + 55$ je primitivní funkcí k funkci $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ v intervalu $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ a také v intervalech $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right)$, $\dots$.

V další větě se podíváme, jak je to s jednoznačností primitivní funkce.

Věta 8.3 *Jsou-li $F(x)$, $G(x)$ dvě primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b), platí v celém intervalu (a, b) rovnice*

$$G(x) = F(x) + C,$$

kde C je libovolná konstanta. Tedy dvě primitivní funkce se liší pouze o (tzv. integrační) konstantu.

Důkaz. Funkce $G(x) - F(x)$ má v intervalu (a, b) derivaci rovnou nule a tedy je podle věty 5.7 spojitá. Z toho plyne, že je konstantní v celém intervalu (a, b) nebo-li platí rovnice $G(x) - F(x) = C$. □

Abychom nemuseli stále vypisovat integrační konstantu, zavedeme následující značení: symbol $\stackrel{c}{=}$ bude značit, že $F(x)$, $G(x)$ jsou dvě funkce lišící se na zadaném intervalu pouze o konstantu.

Předchozí věta řeší otázku jednoznačnosti primitivní funkce. Zbývá zodpovědět otázku, zda-li ke každé funkci existuje primitivní funkce. Na následujícím příkladu uvidíme, že tomu tak není.

Příklad 8.4 *Definujme například funkci f takto: $f(x) = 1$ pro $x = 0$ a $f(x) = 0$ pro $x \neq 0$. Kdyby k funkci f existovala primitivní funkce, muselo by platit: $F'(x) = 1$ pro $x = 0$ a $F'(x) = 0$ pro $x \neq 0$. Potom je funkce F konstantní pro $x \neq 0$. Z existence vlastní derivace v intervalu $(-\infty, \infty)$ plyne, že funkce F je v tomto intervalu spojitá (podle věty 5.7). Potom funkce F musí být* *konstantní v celém intervalu $(-\infty, \infty)$ a její derivace je rovna nule všude v intervalu $(-\infty, \infty)$, což je ve sporu s původní definicí funkce f v bodě nula. Tedy funkce f nemá primitivní funkci v intervalu $(-\infty, \infty)$.*

Nicméně platí tato věta:

Věta 8.5 **(O existenci neurčitého integrálu.)** *Nechť f je funkce spojitá v otevřeném intervalu (a, b) (může být i neomezený), Potom pro libovolné číslo c z intervalu (a, b) je funkce $\int_c^x f(t)\,dt$ primitivní funkcí k funkci f v intervalu (a, b). (Tedy ke každé spojité funkci v intervalu (a, b) existuje v tomto intervalu primitivní funkce.)*

Důkaz. Je-li x_0 libovolné číslo z intervalu (a, b), zvolme čísla α a β z intervalu (a, b) tak, aby

$$\alpha < \min(c, x_0) \leq \max(c, x_0) < \beta.$$

Potom podle vět 7.27 a 7.25 existuje integrál $\displaystyle\int_c^x f(t)\,dt$ pro každé $x \in [\alpha, \beta]$ a jeho derivace se rovná $f(x)$ pro každé $x \in [\alpha, \beta]$. Speciálně to tedy platí pro $x = x_0$ a protože x_0 bylo zvoleno libovolně, platí tvrzení věty pro každé x z intervalu (a, b). $\square$

Bohužel tato věta nedává žádný návod, jak primitivní funkci nalézt. V této a následující kapitole odvodíme několik vět, které nám umožní převést výpočet složitých integrálů na výpočet integrálů jednodušších. Nejprve si odvodíme primitivní funkce k elementárním funkcím. Využitím základních vzorců pro derivace ihned dostaneme následující větu:

Věta 8.6 **(Základní vzorce.)** *Platí*

- $\displaystyle\int x^n\,dx \overset{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ *pro* $n \in \mathbb{R},\ n \neq -1,\ x \in (0,\infty)$,
- $\displaystyle\int x^n\,dx \overset{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \int 1\,dx \overset{c}{=} x$ *pro* $n \in \mathbb{N},\ x \in (-\infty,\infty)$,
- $\displaystyle\int x^n\,dx \overset{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ *pro* $n \in \mathbb{Z},\ n < -1, x \in (0,\infty)$ *nebo* $x \in (-\infty,0)$,
- $\displaystyle\int a^x\,dx \overset{c}{=} \frac{a^x}{\ln a}, \quad \int e^x\,dx \overset{c}{=} e^x$ *pro* $a > 0, a \neq 1,\ x \in (-\infty,\infty)$,
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx \overset{c}{=} \ln|x|$ *pro* $x \in (0,\infty)$ *nebo* $x \in (-\infty,0)$,
- $\displaystyle\int \sin x\,dx \overset{c}{=} -\cos x, \quad \int \cos x\,dx \overset{c}{=} \sin x$ *pro* $x \in (-\infty,\infty)$,
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx \overset{c}{=} \operatorname{tg} x$ *(v každém otevřeném intervalu neobsahujícím žádný bod, pro který* $\cos x = 0$*)*,
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx \overset{c}{=} -\operatorname{cotg} x$ *(v každém otevřeném intervalu neobsahujícím žádný bod, pro který* $\sin x = 0$*)*,
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{c}{=} \arcsin x \overset{c}{=} -\arccos x$ *pro* $x \in (-1,1)$,
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \overset{c}{=} \operatorname{arctg} x \overset{c}{=} -\operatorname{arccotg} x$ *pro* $x \in (-\infty,\infty)$.

Věta 8.7 *Existují-li v intervalu* (a, b) *neurčité integrály* $\int f_1(x)\,dx, \cdots,$ $\int f_n(x)\,dx$ *a jsou-li* $c_1, \cdots, c_n$ *libovolná čísla, potom existuje i integrál* $\int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n)\,dx$ *a platí*

$$\int (c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x))\,dx \stackrel{c}{=} c_1 \int f_1(x)\,dx + \cdots + c_n \int f_n(x)\,dx.$$

Důkaz. V intervalu (a, b) položme $F_1 = \int f_1(x)\,dx, \cdots, F_n = \int f_n(x)\,dx$, takže $F_1'(x) = f_1(x), \cdots, F_n'(x) = f_n(x)$. Potom podle věty o derivaci součtu je

$$(c_1 F_1(x) + \cdots + c_n F_n(x))' = (c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x))$$

a tedy funkce $c_1 F_1 + \cdots + c_n F_n$ je hledaná primitivní funkce. □

Příklad 8.8

$$\int 3\cos x - \sqrt{5}\, x^5 + \frac{2}{1+x^2}\,dx \stackrel{c}{=} 3\int \cos x\,dx - \sqrt{5}\int x^5\,dx + 2\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\stackrel{c}{=} 3\sin x - \sqrt{5}\,\frac{x^6}{6} + 2\operatorname{arctg} x$$

2. Integrace per partes

Věta 8.9 **(Integrace per partes.)** *Nechť funkce* u *a* v *mají v intervalu* (a, b) *spojité derivace potom v intervalu* (a, b) *platí*

$$\int u(x)v'(x)\,dx \stackrel{c}{=} u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

Důkaz. Podle věty o derivaci součinu v intervalu platí (a,b) $(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$. Protože funkce u a v mají v intervalu (a,b) spojité derivace, jsou spojité i funkce $u(x)v'(x)$ a $u'(x)v(x)$ a tedy podle věty 8.5 k nim existují primitivní funkce. Nakonec použijeme větu 8.7 a dostaneme

$$u(x)v(x) \stackrel{c}{=} \int (u(x)v'(x) + u'(x)v(x))\,dx \stackrel{c}{=} \int u(x)v'(x)\,dx + \int u'(x)v(x)\,dx.$$

□

Předchozí věta nám poskytuje důležitý návod k výpočtu neurčitých integrálů. Jak se používá, si objasníme na několika příkladech.

Příklad 8.10 *Vypočtěme* $\int xe^x\,dx$. *V per partes položme*

$$\begin{aligned} u(x) &= x & v'(x) &= e^x \\ u'(x) &= 1 & v(x) &= e^x. \end{aligned}$$

Funkce x *a* e^x *mají spojité derivace v intervalu* $(-\infty,\infty)$, *proto v tomto intervalu platí*

$$\int xe^x\,dx \stackrel{c}{=} xe^x - \int e^x\,dx \stackrel{c}{=} xe^x - e^x \stackrel{c}{=} e^x(x-1).$$

Příklad 8.11 *Vypočtěme* $\int x^2 \sin x\,dx$. *V per partes položme*

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 & v'(x) &= \sin x \\ u'(x) &= 2x & v(x) &= -\cos x. \end{aligned}$$

Funkce x^2 *a* $-\cos x$ *mají spojité derivace v intervalu* $(-\infty, \infty)$, *proto v tomto intervalu platí*

$$\int x^2 \sin x \, dx \stackrel{c}{=} -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx.$$

K výpočtu integrálu napravo opět použijeme per partes. Položme

$$\begin{aligned} u(x) &= x & v'(x) &= \cos x \\ u'(x) &= 1 & v(x) &= \sin x. \end{aligned}$$

Funkce x *a* $\sin x$ *mají spojité derivace v intervalu* $(-\infty, \infty)$, *proto v tomto intervalu platí*

$$\int x \cos x \, dx \stackrel{c}{=} x \sin x - \int \sin x \, dx \stackrel{c}{=} x \sin x + \cos x.$$

Celkem tedy dostaneme

$$\int x^2 \sin x \, dx \stackrel{c}{=} -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx \stackrel{c}{=} -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x.$$

Příklad 8.12 *Vypočtěme* $\int \ln x \, dx$. *V per partes položme*

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln x & v'(x) &= 1 \\ u'(x) &= \tfrac{1}{x} & v(x) &= x. \end{aligned}$$

Funkce x *a* $\ln x$ *mají spojité derivace v intervalu* $(0, \infty)$, *proto v tomto intervalu platí*

$$\int \ln x \, dx \stackrel{c}{=} x \ln x - \int \frac{1}{x} x \, dx \stackrel{c}{=} x \ln x - x \stackrel{c}{=} x(\ln x - 1).$$

Příklad 8.13 *Vypočtěme* $I_n = \int x^n e^x \, dx$ $(n \in \mathbb{Z}, n \geq 0)$. *Pro* $n > 0$ *položme v per partes*

$$\begin{aligned} u(x) &= x^n & v'(x) &= e^x \\ u'(x) &= nx^{n-1} & v(x) &= e^x. \end{aligned}$$

Funkce x^n *a* e^x *mají spojité derivace v intervalu* $(-\infty, \infty)$, *proto v tomto intervalu platí*

$$I_n = \int x^n e^x \, dx \stackrel{c}{=} x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx \stackrel{c}{=} x^n e^x - nI_{n-1}. \tag{8.1}$$

Dostali jsme tedy rekurentní vzorec, který pro $n > 0$ *umožňuje vyjádřit* I_n *pomocí* I_{n-1}, I_{n-1} *pomocí* I_{n-2}, $\cdots$ *a nakonec* I_1 *pomocí* $I_0 = \int e^x \, dx \stackrel{c}{=} e^x$.

Vypočtěme například $I_2 = \int x^2 e^x \, dx$. *Dosazením do vzorce (8.1) postupně dostaneme* $I_2 \stackrel{c}{=} x^2 e^x - 2I_1$, $I_1 \stackrel{c}{=} xe^x - I_0$. *Zpětným dosazením obdržíme* $I_1 \stackrel{c}{=} xe^x - e^x$ *a nakonec* $I_2 \stackrel{c}{=} x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x \stackrel{c}{=} e^x(x^2 - 2x + 2)$.

Příklad 8.14 *Vypočtěme* $K_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx$ $(n \in \mathbb{N})$. *Podle věty 8.6 je* $K_1 = \int \frac{1}{1+x^2} \, dx \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg} x$, *pro* $x \in (-\infty, \infty)$ *a nyní hledáme rekurentní formuli podobnou té z příkladu 8.13. Pro* $n > 1$ *položme v per partes*

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{(1+x^2)^n} & v'(x) &= 1 \\ u'(x) &= \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}} & v(x) &= x. \end{aligned}$$

Funkce $\dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ *a* x *mají spojité derivace v intervalu* $(-\infty,\infty)$, *proto v tomto intervalu platí*

$$K_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx \stackrel{c}{=} \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx$$

nyní k čitateli v nově vzniklém integrálu přičteme a odečteme jedničku a poté integrand rozdělíme na dva zlomky

$$\begin{aligned}
&\stackrel{c}{=} \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{(1+x^2)-1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx \\
&\stackrel{c}{=} \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^{n+1}} - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx \\
&\stackrel{c}{=} \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nK_n - 2nK_{n+1};
\end{aligned}$$

tedy $K_n \stackrel{c}{=} \dfrac{x}{(1+x^2)^n} + 2nK_n - 2nK_{n+1}$ *a odtud dostaneme rekurentní vzorec*

$$K_{n+1} \stackrel{c}{=} \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}K_n. \tag{8.2}$$

Vypočtěme například $K_3 = \displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx$. *Dosazením do rekurentního vzorce (8.2) postupně dostaneme (pro* $n=2$*)* $K_3 \stackrel{c}{=} \dfrac{x}{4(1+x^2)^2} + \dfrac{3}{4}K_2$ *a (pro* $n=1$*)* $K_2 \stackrel{c}{=} \dfrac{x}{2(1+x^2)} + \dfrac{1}{2}K_1$. *Zpětným dosazením obdržíme* $K_2 \stackrel{c}{=}$

$\dfrac{x}{2(1+x^2)} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$ *a nakonec*

$$K_3 \stackrel{c}{=} \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x.$$

Příklad 8.15 *Vypočtěme* $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$. *V per partes položme*

$$\begin{array}{ll} u(x) = \ln x & v'(x) = \frac{1}{x} \\ u'(x) = \frac{1}{x} & v(x) = \ln x. \end{array}$$

Funkce $\ln x$ *má spojitou derivaci v intervalu* $(0, \infty)$, *proto v tomto intervalu platí*

$$\int \ln x \, \frac{1}{x}\, dx \stackrel{c}{=} \ln^2 x - \int \frac{1}{x}\, \ln x \, dx. \tag{8.3}$$

Protože integrand je spojitá funkce, existuje podle věty 8.5 primitivní funkce. Můžeme tedy k oběma stranám rovnice (8.3) přičíst $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ *a dostaneme*

$$2\int \frac{\ln x}{x}\,dx \stackrel{c}{=} \ln^2 x \qquad \textit{nebo-li} \qquad \int \frac{\ln x}{x}\,dx \stackrel{c}{=} \frac{\ln^2 x}{2}.$$

Z těchto příkladů je vidět, jak se integrace per partes používá. Tuto metodu můžeme použít při počítání integrálu $\int f(x)\,dx$ zejména tehdy, podaří-li se nám vhodným způsobem převést funkci f na tvar $f = uv'$ tak, aby integrál $\int u'(x)v(x)\,dx$ byl jednodušší než zadaný integrál. Někdy je třeba použít per partes vícekrát (viz. příklad 8.11) a přitom občas dospějeme k rekurentním vzorcům (viz. příklady 8.13 a 8.14). V tomto případě nevadí, vyjádříme-li naopak jednodušší integrál složitějším, protože rekurentní vzorec mám umožní vypočítat zadaný integrál zpětným dosazováním, jak jsme viděli v již zmiňovaném příkladu 8.13. V některých případech můžeme napravo dostat stejný integrál jako nalevo – dostaneme tedy rovnici, kde neznámou je zadaný integrál – a pokud tento integrál existuje, stačí tuto rovnici vyřešit (viz. příklad 8.15). Na závěr této části si ukážeme ještě jeden podobný příklad.

Příklad 8.16 *Vypočtěme* $\int \sin x\, e^x\, dx$. *V per partes poprvé položme*

$$\begin{aligned} u(x) &= \sin x & \qquad v'(x) &= e^x \\ u'(x) &= \cos x & \qquad v(x) &= e^x. \end{aligned}$$

Funkce $\sin x$ *a* e^x *mají spojité derivace v intervalu* $(-\infty, \infty)$, *proto v tomto intervalu platí*

$$\int \sin x\, e^x\, dx \stackrel{c}{=} \sin x\, e^x - \int \cos x\, e^x\, dx. \tag{8.4}$$

A podruhé v per partes položme

$$\begin{aligned} u(x) &= e^x & \qquad v'(x) &= \sin x \\ u'(x) &= e^x & \qquad v(x) &= -\cos x. \end{aligned}$$

Funkce $\cos x$ *a* e^x *mají spojité derivace v intervalu* $(-\infty, \infty)$, *proto v tomto intervalu platí*

$$\int \sin x\, e^x\, dx \stackrel{c}{=} -\cos x\, e^x + \int \cos x\, e^x\, dx. \tag{8.5}$$

Oba integrandy jsou spojité funkce, takže k nim podle věty 8.5 existují primitivní funkce. Sečtením rovnic (8.4) a (8.5) dostaneme hledaný integrál a jejich odečtením vypočteme integrál $\int \cos x\, e^x\, dx$:

$$\int \sin x\, e^x\, dx \stackrel{c}{=} \frac{\sin x\, e^x - \cos x\, e^x}{2}, \qquad \int \cos x\, e^x\, dx \stackrel{c}{=} \frac{\sin x\, e^x + \cos x\, e^x}{2}.$$

3. Substituce

Věta 8.17 **(O substituci.)** *Nechť f je funkce spojitá v intervalu (a, b), funkce φ nechť má v intervalu (α, β) vlastní derivaci φ' a pro každé t z intervalu (α, β) nechť $\varphi(t) \in (a, b)$. Dosadíme-li $x = \varphi(t)$, platí v intervalu (α, β) rovnice*

$$\int f(x)\, dx \stackrel{c}{=} \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt.$$

Důkaz. Podle věty 8.5 existuje primitivní funkce F k funkci f v intervalu (a, b). φ má v intervalu (α, β) vlastní derivaci a funkce F má vlastní derivaci $F'(x) = f(x)$ v intervalu (a, b). Dále pro každé t z intervalu (α, β) platí $x = \varphi(t) \in (a, b)$. Potom podle věty o derivaci složené funkce má funkce $F(\varphi(t))$ pro každé t z intervalu (α, β) derivaci a platí

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Tedy funkce $F(\varphi)$ je primitivní funkcí k funkci $f(\varphi)\varphi'$ v intervalu (α, β). □

Větu o substituci můžeme použít dvojím způsobem:

- Máme-li vypočíst integrál $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt$ a jsou-li splněny předpoklady věty o substituci, můžeme výpočet tohoto integrálu převést na výpočet integrálu $\int f(x)\,dx$ pomocí substituce $\varphi(t) = x$ ($\varphi'(t)\,dt = dx$). Umíme-li nalézt primitivní funkci F k funkci f, je zadaný integrál vypočten. Tento postup můžeme stručně naznačit takto:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \overset{c}{=} \int f(x)\,dx \overset{c}{=} F(x) \overset{c}{=} F(\varphi(t)).$$

- Máme-li vypočíst integrál $\int f(x)\,dx$ v intervalu (a, b), snažíme se pomocí substituce $x = \varphi(t)$ převést tento integrál na jednodušší integrál $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$. Definujme nyní funkci ψ v intervalu (a, b) tak, aby pro každé x tohoto intervalu platila rovnice $\varphi(\psi(x)) = x$. (Tedy pokud je funkce φ je rostoucí nebo klesající v intervalu (α, β), potom je funkce ψ inverzní funkcí k funkci φ.) Označíme-li symbolem $G(t)$ primitivní funkci k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, můžeme tento postup schématicky znázornit takto:

$$\int f(x)\,dx \overset{c}{=} \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \overset{c}{=} G(t) \overset{c}{=} G(\psi(x)).$$

Nyní si ukážeme tři příklady, které budou ilustrovat použití věty o substituci prvním způsobem.

Příklad 8.18 *Vypočtěme* $\int \sin^3 t \cos t\,dt$. *Vidíme, že* $\cos t\,dt$ *je diferenciálem funkce* $\sin t$, *proto zavedeme substituci* $x = \sin t$. *Potom* $dx = \cos t\,dt$ *a předpoklady věty o substituci jsou splněny na intervalu* $(-\infty, \infty)$ *a tedy na tomto intervalu platí*

$$\int \sin^3 t \cos t\,dt \overset{c}{=} \int x^3\,dx \overset{c}{=} \frac{x^4}{4} \overset{c}{=} \frac{\sin^4 t}{4}.$$

Příklad 8.19 *Vypočtěme* $\int f(ax+b)\,dx$ *pro* $a \neq 0$*, známe-li primitivní funkci* F *k funkci* f*. Vidíme, že* dx *je po vynásobení číslem* a *roven diferenciálu funkce* $ax+b$*, proto zavedeme substituci* $y = ax+b$*. Potom* $dy = a\,dx$ *a předpoklady věty o substituci jsou splněny na otevřeném intervalu, ve kterém je funkce* f *spojitá a v tomto intervalu platí*

$$\int f(ax+b)\,dx \overset{c}{=} \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,a\,dx \overset{c}{=} \frac{1}{a}\int f(y)\,dy \overset{c}{=} \frac{F(y)}{a} \overset{c}{=} \frac{F(ax+b)}{a}.$$

Příklad 8.20 *Vypočtěme* $\int \left(1+x^2\right)^n x\,dx$ *pro* $n \neq -1$*. Vidíme, že* $x\,dx$ *je po vynásobení dvěma diferenciálem funkce* $1+x^2$*, proto zavedeme substituci* $y = 1+x^2$*. Potom* $dy = 2x\,dx$ *a předpoklady věty o substituci jsou splněny na intervalu* $(-\infty, \infty)$ *a tedy na tomto intervalu pro* $n \neq -1$ *platí*

$$\int \left(1+x^2\right)^n x\,dx \overset{c}{=} \frac{1}{2}\int y^n\,dy \overset{c}{=} \frac{1}{2}\frac{y^{n+1}}{n+1} \overset{c}{=} \frac{\left(1+x^2\right)^{n+1}}{2n+2}.$$

Nakonec této části si nejprve uvedeme jeden příklad na použití věty o substituci druhým způsobem a v příkladu 8.22 si ještě ukážeme jeden užitečný obrat.

Příklad 8.21 *Vypočtěme* $\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$*. Zaveďme substituci* $y = \frac{x}{2}$ $(x = 2y)$*. Potom* $dx = 2\,dy$ *a předpoklady věty o substituci jsou splněny na intervalu* $(-\infty, \infty)$ *a tedy na tomto intervalu platí*

$$\int \frac{1}{x^2+4}\,dx \overset{c}{=} \int \frac{2}{(2y)^2+4}\,dy \overset{c}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2+1}\,dy \overset{c}{=} \frac{1}{2}\operatorname{arctg} y \overset{c}{=} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}.$$

Příklad 8.22 *Vypočtěme* $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$. *Zaveďme substituci* $y = f(x)$. *Potom* $dy = f'(x)\,dx$ *a předpoklady věty o substituci jsou splněny v otevřeném intervalu, ve kterém* f' *existuje a zároveň je v tomto intervalu* $f(x) \neq 0$. *V takovém intervalu tedy platí*

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx \overset{c}{=} \int \frac{1}{y}\,dy \overset{c}{=} \ln|y| \overset{c}{=} \ln|f(x)|.$$

Například:

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx \overset{c}{=} \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx \overset{c}{=} \frac{1}{2}\ln|x^2+1| \quad \textit{platí v intervalu } (-\infty,\infty),$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx \overset{c}{=} \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx \overset{c}{=} -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx \overset{c}{=} -\ln|\cos x|$$

platí například v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Souvislost určitého a neurčitého integrálu

Věta 8.23 (O souvislosti primitivní funkce s určitým integrálem.) *Nechť* $a < b$ *a nechť existuje integrál* $\int_a^b f(x)\,dx$. *Je-li* F *spojitá primitivní funkce k funkci* f *v intervalu* (a,b), *potom platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Důkaz. Označme $D_1, \cdots, D_m, \cdots$, posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ takovou, že každé dělení D_m dělí interval $[a,b]$ na m stejných dílků. Dělícími body dělení D_m jsou tedy body $a = x_{0,m} < x_{1,m} < \cdots < x_{m-1,m} < x_{m,m} = b$, kde

$$x_{i,m} = a + \frac{i(b-a)}{m} \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

tedy $\Delta x_{i,m} = x_{i,m} - x_{i-1,m} = \dfrac{b-a}{m}$, $v(D_m) = \dfrac{b-a}{m}$ a $\lim\limits_{m\to\infty} v(D_m) = 0$.

Protože F je spojitá funkce v intervalu $[x_{i-1,m}, x_{i,m}]$ a má v intervalu $(x_{i-1,m}, x_{i,m})$ derivaci f, existuje podle věty o střední hodnotě číslo $\xi_{i,m} \in (x_{i-1,m}, x_{i,m})$ tak, že pro $i = 1, 2, \cdots, m$ platí

$$F(x_{i,m}) - F(x_{i-1,m}) = (x_{i,m} - x_{i-1,m})F'(\xi_{i,m}) = \Delta x_{i,m} f(\xi_{i,m}).$$

Sečteme-li tyto rovnice pro $i = 1, 2, \cdots, m$, dostaneme

$$F(b) - F(a) = F(x_{m,m}) - F(x_{0,m}) = (F(x_{m,m}) - F(x_{m-1,m})) \tag{8.6}$$

$$+(F(x_{m-1,m}) - F(x_{m-2,m})) + \cdots + (F(x_{1,m}) - F(x_{0,m})) = \sum_{i=1}^{m} \Delta x_{i,m} f(\xi_{i,m}).$$

Vzhledem k tomu, že $\lim\limits_{m\to\infty} v(D_m) = 0$ a $\xi_{i,m} \in (x_{i-1,m}, x_{i,m})$, jsou tedy splněny předpoklady věty 7.19, takže platí

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_{i,m}) \Delta x_{i,m} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Levá strana rovnice (8.6) nezávisí na m a tedy

$$F(b) - F(a) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_{i,m}) \Delta x_{i,m} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

Poznámka 8.24 *Pro $a > b$, bylo definováno* $\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$, *a podle věty 8.23 dostaneme* $-\int_b^a f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. *Tedy opět máme* $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ *a věta 8.23 platí i pro $a > b$. Rozdíl* $\mathbf{F(b) - F(a)}$ *budeme krátce značit symbolem* $[\mathbf{F(x)}]_\mathbf{a}^\mathbf{b}$.

Věta 8.23 nám tedy dává jednoduchý návod pro výpočet určitého integrálu pomocí primitivní funkce. Kombinací věty 8.23 s per partes a s větou o substituci dostaneme následující dvě věty:

Věta 8.25 *Nechť funkce u a v mají v intervalu (a, b) spojité derivace potom v intervalu (a, b) platí* $\int_\mathbf{a}^\mathbf{b} \mathbf{u(x)v'(x)\,dx} = [\mathbf{u(x)v(x)}]_\mathbf{a}^\mathbf{b} - \int_\mathbf{a}^\mathbf{b} \mathbf{u'(x)v(x)\,dx}$.

Věta 8.26 *Nechť f je funkce spojitá v intervalu (a, b), funkce φ nechť má v intervalu (α, β) spojitou derivaci φ' a pro každé t z intervalu $[\alpha, \beta]$ nechť $\varphi(t) \in [a, b]$. Položíme-li $a = \varphi(\alpha)$ a $b = \varphi(\beta)$, platí vztah*

$$\int_\mathbf{a}^\mathbf{b} \mathbf{f(x)\,dx} = \int_\alpha^\beta \mathbf{f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt}.$$

Příklad 8.27 *Vypočtěme* $\int_0^\pi -2x^2 \sin(2x)\,dx$. *Ve větě 8.25 položme*

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 & v'(x) &= -2\sin(2x) \\ u'(x) &= 2x & v(x) &= \cos(2x). \end{aligned}$$

Funkce x^2 *a* $\cos x$ *mají spojité derivace v intervalu* $(-\infty, \infty)$, *proto v tomto intervalu platí*

$$\int_0^\pi -2x^2\sin(2x)\,dx = \left[x^2\cos(2x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2x\cos(2x)\,dx = \pi^2 - \int_0^\pi 2x\cos(2x)\,dx.$$

K výpočtu integrálu napravo opět použijeme větu 8.25. Položme

$$\begin{aligned} u(x) &= x \quad & v'(x) &= 2\cos(2x) \\ u'(x) &= 1 \quad & v(x) &= \sin(2x). \end{aligned}$$

Funkce x, $\sin x$ *mají spojité derivace v intervalu* $(-\infty, \infty)$, *proto v tomto intervalu platí*

$$\int_0^\pi 2x\cos(2x)\,dx = [x\sin(2x)]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(2x)\,dx = 0 + \left[\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^\pi = 0.$$

Celkem tedy dostaneme

$$\int_0^\pi -2x^2\sin(2x)\,dx = \pi^2 - \int_0^\pi 2x\cos(2x)\,dx = \pi^2 - 0 = \pi^2.$$

Příklad 8.28 *Vypočtěme* $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$.

Použijeme-li substituci $x^2+1 = \varphi(x) = t$, *potom roste-li* x *od* 1 *do* 2, *roste i* t *od* 2 *do* 5 (*tedy* $\varphi(1) = 2$ *a* $\varphi(2) = 5$). *Dále je* $2x\,dx = dt$ *a můžeme tedy použít větu 8.26*

$$\int_1^2 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\int_2^5 \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}} = \left[\sqrt{t}\right]_2^5 = \sqrt{5} - \sqrt{2}.$$

Jak **nesmíme** používat větu 8.26, ukážeme na následujících dvou příkladech.

Příklad 8.29 *Integrál* $\int_0^4 \sqrt{x^2-1}\,dx$ *nelze počítat pomocí substituce* $x = \sin z$, *protože pro žádný interval* $\alpha \le z \le \beta$ *nebude* $x = \sin z$ *probíhat interval* $[1,4]$. *Daný integrál lze řešit například pomocí substituce* $\sqrt{x^2-1} = z - x$.

Příklad 8.30 *Integrál* $\int_0^{\pi} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+k^2\operatorname{tg}^2 x}\,dx$ *(pro* $k > 1$*) nelze integrovat pomocí substituce* $\operatorname{tg} x = z$, *protože funkce* $\operatorname{tg} x$ *je v intervalu* $[0,\pi]$ *nespojitá v bodě* $x = \frac{\pi}{2}$. *Později uvidíme, že tento problém lze obejít rozdělením tohoto integrálu na dva – první budeme integrovat od* 0 *do* $\frac{\pi}{2}$ *a druhý od* $\frac{\pi}{2}$ *do* π.

Integrace vybraných funkcí

1. Integrace racionálních funkcí

Začneme tím, že uvedeme několik pojmů a poznatků z algebry.

Definice 9.1 *Nechť n je celé nezáporné číslo a $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$, potom* **(reálný) polynom** *definujeme předpisem*

$$Q(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 x^0,$$

Říkáme, že polynom Q je **n-tého stupně**, *je-li x^n nejvyšší mocnina, která je v polynomu Q násobena koeficientem $a_n \neq 0$.*

Definice 9.2 *Nechť P a Q jsou dva polynomy a Q není identicky roven nule, potom* **racionální funkci** *definujeme předpisem $R(x) := \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.*

V této kapitole se naučíme integrovat racionální funkce. Nejprve je s pomocí následujících třech vět převedeme na součet jednodušších funkcí, které již umíme integrovat.

Věta 9.3 **(Rozklad reálného polynomu.)** *Nechť Q je reálný polynom. Potom pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí rovnice*

$$Q(x) = a_n(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+p_1x-q_1)^{s_1}\cdots(x^2+p_lx-q_l)^{s_l},$$

kde $r_1, \cdots, r_k, s_1, \cdots, s_l$ jsou celá kladná čísla. Polynomy

$$x-\alpha_1,\ x-\alpha_2, \cdots, x-\alpha_k,\ x^2+p_1x-q_1, \cdots, x^2+p_lx-q_l$$

jsou reálné, navzájem různé a pro $i = 1, 2, \cdots, l$ platí $\dfrac{p_i^2}{4} - q_i < 0$. (Tedy polynomy druhého stupně nemají reálné kořeny a nelze je rozložit na součin dvou reálných polynomů prvního stupně.)

Příklad 9.4 $x^7 + 2x^5 + x^3 = x^3(x^4 + 2x^2 + 1) = x^3(x^2 + 1)^2.$

Věta 9.5 **(Dělení polynomů.)** *Nechť stupeň polynomu P je větší nebo roven stupni polynomu Q. Není-li polynom Q identicky roven nule, potom existuje právě jeden polynom P_1 tak, že polynom P_2 definovaný předpisem*

$$P_2(x) := P(x) - P_1(x)Q(x)$$

má nižší stupeň než polynom Q. Polynomy P_1 a P_2 spočítáme dělením polynomu P polynomem Q. Tedy P_1 je podíl a P_2 zbytek, nebo-li platí rovnost

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}.$$

Příklad 9.6 *Spočtěme podíl* $\dfrac{x^3+2x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

Vezmeme člen s největší mocninou v čitateli a vydělíme ho členem s největší mocninou ve jmenovateli $\left(x^3/x^2 = x\right)$. *Tento podíl vynásobíme jmenovatelem* (x^2-x+1) *a součin* (x^3-x^2+x) *odečteme od čitatele – tedy* $(x^3+2x^2+x+1)-(x^3-x^2+x) = 3x^2+1$, *nebo-li*

$$\frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2-x+1} = x + \frac{3x^2+1}{x^2-x+1}.$$

Snížili jsme tedy stupeň polynomu v čitateli. Takto budeme pokračovat dále dokud bude stupeň polynomu v čitateli větší nebo roven stupni polynomu ve jmenovateli. Zpět k příkladu. Opět vezmeme člen s největší mocninou v čitateli a vydělíme ho členem s největší mocninou ve jmenovateli $\left(3x^2/x^2 = 3\right)$. *Tento podíl vynásobíme jmenovatelem* (x^2-x+1) *a výsledek* $(3x^2-3x+3)$ *odečteme od čitatele – tedy* $(3x^2+1)-(3x^2-3x+3) = 3x-2$. *Celkem máme*

$$\frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2-x+1} = x + \frac{3x^2+1}{x^2-x+1} = x+3+\frac{3x-2}{x^2-x+1}.$$

Tento postup můžeme přehledně zapsat pomocí schématu:

$$\begin{array}{rrrrl}
(+x^3 & +2x^2 & +\ x & +1) & : (x^2-x+1) = x+3+\dfrac{3x-2}{x^2-x+1} \\
-x^3 & +\ x^2 & -\ x & & \\
\hline
 & 3x^2 & & +1 & \\
 & -3x^2 & +3x & -3 & \\
\hline
 & & 3x & -2 & \quad (\textit{zbytek})
\end{array}$$

Stačí tedy, budeme-li umět rozložit na součet jednodušších funkcí racionální funkce, jejichž čitatel má nižší stupeň než jmenovatel. Následující věta zajišťuje existenci tohoto rozkladu.

Věta 9.7 **(O rozkladu na parciální zlomky.)** *Nechť*

$Q(x) = a_n(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+p_1x-q_1)^{s_1}\cdots(x^2+p_lx-q_l)^{s_l}$,

kde $r_1, \cdots, r_k, s_1, \cdots, s_l \in \mathbb{N}$; $a_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_k, p_1, \cdots, p_l, q_1, \cdots, q_l \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. *Polynomy*

$$x-\alpha_1,\ x-\alpha_2, \cdots, x-\alpha_k,\ x^2+p_1x-q_1, \cdots, x^2+p_lx-q_l$$

jsou reálné, navzájem různé a pro $i = 1, 2, \cdots, l$ *platí* $\frac{p_i^2}{4} - q_i < 0$. *Dále nechť* P *je reálný polynom, jehož stupeň je nižší než stupeň polynomu* Q. *Potom existují reálná čísla* $A_{r_1}^{r_1}, A_{r_1}^{r_1-1}, \cdots, A_{r_1}^1, A_{r_2}^{r_2}, A_{r_2}^{r_2-1}, \cdots, A_{r_2}^1, \cdots, A_{r_k}^{r_k}, A_{r_k}^{r_k-1}, \cdots, A_{r_k}^1, \cdots, M_{s_1}^{s_1}, N_{s_1}^{s_1}, M_{s_1}^{s_1-1}, N_{s_1}^{s_1-1}, \cdots, M_{s_1}^1, N_{s_1}^1, \cdots, M_{s_l}^{s_l}, N_{s_l}^{s_l}, M_{s_l}^{s_l-1}, N_{s_l}^{s_l-1}, \cdots, M_{s_l}^1, N_{s_l}^1$ *tak, že pro všechna* x *jež nejsou kořeny polynomu* Q *platí rovnice*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{r_1}^{r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}} + \frac{A_{r_1}^{r_1-1}}{(x-\alpha_1)^{r_1-1}} + \cdots + \frac{A_{r_1}^1}{x-\alpha_1} + \cdots$$

$$+\frac{A_{r_k}^{r_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}} + \frac{A_{r_k}^{r_k-1}}{(x-\alpha_k)^{r_k-1}} + \cdots + \frac{A_{r_k}^1}{x-\alpha_k}$$

$$+\frac{M_{s_1}^{s_1}x+N_{s_1}^{s_1}}{(x^2+p_1x-q_1)^{s_l}} + \frac{M_{s_1}^{s_1-1}x+N_{s_1}^{s_1-1}}{(x^2+p_1x-q_1)^{s_l-1}} + \cdots + \frac{M_{s_1}^1x+N_{s_1}^1}{x^2+p_1x-q_1} + \cdots$$

$$+\frac{M_{s_l}^{s_l}x+N_{s_l}^{s_l}}{(x^2+p_lx-q_l)^{s_l}} + \frac{M_{s_l}^{s_l-1}x+N_{s_l}^{s_l-1}}{(x^2+p_lx-q_l)^{s_l-1}} + \cdots + \frac{M_{s_l}^1x+N_{s_l}^1}{x^2+p_lx-q_l}.$$

Příklad 9.8 *Rozložme funkci* $\dfrac{5x^6 - x^5 + 24x^2 - 9x + 9}{x^3(x^2+3)^2}$ *na parciální zlomky.*

Polynom $x^2 + 3$ nemá reálné kořeny a stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele, takže rozklad parciální zlomky má tento tvar

$$\frac{5x^6 - x^5 + 24x^2 - 9x + 9}{x^3(x^2+3)^2} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{Dx+E}{(x^2+3)^2} + \frac{Fx+G}{x^2+3}$$

Tuto rovnost vynásobíme jmenovatelem $x^3(x^2+3)^2$ a dostaneme

$$\begin{aligned} 5x^6 - x^5 + 24x^2 - 9x + 9 &= A(x^2+3)^2 + Bx(x^2+3)^2 + Cx^2(x^2+3)^2 \\ &+ (Dx+E)x^3 + (Fx+G)(x^2+3)x^3. \qquad (9.1) \end{aligned}$$

Neznámé koeficienty A, B, C, D, E, F a G určíme kombinací **dosazovací metody** *(postupně dosazujeme reálné kořeny jmenovatele a v případě, že je některý reálný kořen n-násobný, dosazujeme postupně do všech derivaci až do řádu $n-1$) a* **metody neurčitých koeficientů** *(porovnáváním koeficientů u stejných mocnin). Nejprve spočteme koeficienty A, B a C dosazovací metodou. Nula je trojnásobným kořenem jmenovatele, takže jejím dosazením do rovnice (9.1) obdržíme*

$$9 = 9A \qquad \textit{nebo-li} \qquad A = 1.$$

Potom spočteme derivaci obou stran rovnice (9.1) v bodě nula

$$-9 = 9B \qquad \textit{nebo-li} \qquad B = -1$$

a nakonec spočteme druhou derivaci obou stran rovnice (9.1) v bodě nula

$$48 = 12A + 18C \qquad \textit{tedy} \qquad C = 2.$$

Ostatní koeficienty určíme metodou neurčitých koeficientů. Nejprve dosadíme vypočtené koeficienty A, B a C do rovnice (9.1)

$$\begin{aligned}5x^6-x^5+24x^2-9x+9 &= (x^2+3)^2-x(x^2+3)^2+2x^2(x^2+3)^2\\ &\quad+(Dx+E)x^3+(Fx+G)(x^2+3)x^3\\ &= x^4+6x^2+9-(x^5+6x^3+9x)+2x^6+12x^4+18x^2\\ &\quad+(Dx+E)x^3+(Fx+G)(x^2+3)x^3.\end{aligned}$$

Všechny členy převedeme na levou stranu

$$\begin{aligned}3x^6-13x^4+6x^3 &= Dx^4+Ex^3+(Fx^4+Gx^3)(x^2+3)\\ &= Dx^4+Ex^3+Fx^6+3Fx^4+Gx^5+3Gx^3\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad (3-F)x^6-Gx^5+(D+3F+13)x^4+(6-E-3G)x^3=0.$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin dostaneme následující rovnice:

$$3=F, \qquad 0=G, \qquad -13=D+3F, \qquad 6=E+3G.$$

$$\textit{Tedy} \quad F=3, \quad G=0, \quad D=-22, \quad E=6.$$

Celkem tedy máme

$$\frac{5x^6-x^5+24x^2-9x+9}{x^3(x^2+3)^2}=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+\frac{-22x+6}{(x^2+3)^2}+\frac{3x}{x^2+3}.$$

Chceme-li integrovat racionální funkci, tak nejprve ověříme, zda-li je stupeň polynomu v čitateli menší než stupeň polynomu ve jmenovateli. Pokud ano, tak ji rozložíme na parciální zlomky. V případě, že je stupeň polynomu ve jmenovateli menší nebo roven stupni polynomu v čitateli, tak vydělíme čitatele jmenovatelem a výslednou racionální funkci opět rozložíme na parciální zlomky. Po rozkladu na parciální zlomky mohou vzniknout tři typy funkcí, jednak je to polynom, ten integrovat umíme (věta 8.6) a jednak jsou to integrály ve tvaru

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^n}\,dx, \qquad \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx \qquad n \in \mathbb{N},$$

kde $\frac{p^2}{4} - q < 0$. Dále podle věty 8.6 platí

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^n}\,dx \overset{c}{=} -\frac{A}{n-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} \qquad \text{pro } n > 1,$$

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^n}\,dx \overset{c}{=} A\ln|x-\alpha| \qquad \text{pro } n = 1,$$

v každém intervalu neobsahujícím bod α. Zbývá tedy spočítat třetí integrál. Postup jeho výpočtu si ukážeme v následujícím příkladu.

Příklad 9.9 *Spočtěme* $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx$*, kde* $\frac{p^2}{4} - q < 0$ *a* $n \in \mathbb{N}$.

Derivace funkce x^2+px+q *je* $2x+p$*. To využijeme k rozdělení zadaného integrálu na dva tak, aby jeden obsahoval násobek* $2x+p$ *a druhý neobsahoval lineární člen. Platí* $Mx+N = \frac{M(2x+p)}{2} + N - \frac{Mp}{2}$ *a tedy máme*

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx + \int \frac{(2N-Mp)dx}{2(x^2+px+q)^n}. \tag{9.2}$$

První integrál spočteme substitucí $x^2+px+q = t$*, potom* $(2x+p)dx = dt$ *a*

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \int \frac{dt}{t^n} \overset{c}{=} \frac{-1}{(n-1)t^{n-1}} \overset{c}{=} \frac{-1}{(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}}.$$

Druhý integrál v (9.2) převedeme na integrál $\displaystyle\int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt$ *(viz. příklad 8.14) doplněním prvních dvou členů v* x^2+px+q *na čtverec*

$$x^2+px+q=\left(x^2+2\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}\right)-\frac{p^2}{4}+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

Potom volíme substituci $y=x+\dfrac{p}{2}$ *a tedy* $dy=dx$

$$\frac{2N-Mp}{2}\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}\overset{c}{=}\frac{2N-Mp}{2}\int\frac{dy}{\left(y^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n}.$$

Zvolíme-li substituci $t\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}=y$, *je* $dt\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}=dy$ *(podle předpokladu je* $q+\dfrac{p^2}{4}>0$*) a ve jmenovateli dostaneme*

$$\left(y^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n=\left(\left(q-\frac{p^2}{4}\right)t^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n=\left(q-\frac{p^2}{4}\right)^n\left(t^2+1\right)^n.$$

$$\frac{2N-Mp}{2}\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}\overset{c}{=}\frac{2N-Mp}{2}\int\frac{dy}{\left(y^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n}$$

$$\overset{c}{=}\frac{2N-Mp}{2}\int\frac{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\,dt}{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)^n(t^2+1)^n}\overset{c}{=}\frac{2N-Mp}{2\left(q-\frac{p^2}{4}\right)^{n-\frac{1}{2}}}\int\frac{dt}{(t^2+1)^n}.$$

Tento integrál můžeme spočítat podle vzoru v příkladu 8.14 a tedy umíme spočítat i integrál (9.2).

Umíme tedy vypočítat integrál libovolné reálné racionální funkce, pokud ji ovšem dokážeme rozložit na parciální zlomky. Problém je hlavně rozklad polynomu ve jmenovateli na součin kvadratických a lineárních členů. Výsledek platí v každém intervalu neobsahujícím žádný kořen polynomu ve jmenovateli. Ukážeme si to na konkrétním příkladu.

Příklad 9.10 *Spočtěme integrál* $\displaystyle\int \frac{5x^6 - x^5 + 24x^2 - 9x + 9}{x^3(x^2+3)^2}\,dx.$

V příkladu 9.8 jsme našli rozklad integrandu na parciální zlomky. Takže

$$\int \frac{5x^6 - x^5 + 24x^2 - 9x + 9}{x^3(x^2+3)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x^3}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{-22x+6}{(x^2+3)^2}\,dx + \int \frac{3x}{x^2+3}\,dx. \qquad (9.3)$$

Nejobtížnější je výpočet integrálu ze čtvrtého sčítance. Nejprve ho rozložíme na součet dvou jednodušších integrálů tak, aby čitatel prvního integrálu byl násobkem derivace funkce x^2+3 *a druhý čitatel obsahoval pouze konstantu*

$$\int \frac{-22x+6}{(x^2+3)^2}\,dx = -11\int \frac{2x}{(x^2+3)^2}\,dx + 6\int \frac{dx}{(x^2+3)^2}. \qquad (9.4)$$

První integrál vypočteme pomocí substituce $z = x^2+3$ $(dz = 2x\,dx)$ *a druhý pomocí substituce* $x = t\sqrt{3}$ $(dx = dt\sqrt{3})$ *převedeme na rekurentní vzorec (8.2)*

$$-11\int \frac{2x}{(x^2+3)^2}\,dx \overset{c}{=} -11\int \frac{dz}{z^2} \overset{c}{=} \frac{11}{z} \overset{c}{=} \frac{11}{x^2+3}.$$

$$6\int \frac{dx}{(x^2+3)^2} \overset{c}{=} 6\int \frac{\sqrt{3}\,dt}{(3t^2+3)^2} \overset{c}{=} \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

Podle rekurentního vzorce (8.2) máme $\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dx \overset{c}{=} \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t$ *a po dosazení do rovnosti (9.4) dostaneme*

$$\int \frac{-22x+6}{(x^2+3)^2}\,dx \overset{c}{=} \frac{11}{x^2+3} + \frac{x}{x^2+3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\,x}{3}. \tag{9.5}$$

Integrál pátého sčítance z (9.3) vypočteme podobně jako předchozí integrál pomocí substituce $z = x^2+3$ $(dz = 2x\,dx)$, *obdržíme*

$$\int \frac{3x}{x^2+3}\,dx \overset{c}{=} \frac{3}{2}\int \frac{dz}{z}\,dz \overset{c}{=} \frac{3}{2}\ln|z| \overset{c}{=} \frac{3}{2}\ln(x^2+3).$$

Integrály první tří sčítanců z (9.3) není třeba podrobně rozebírat. Dále dosadíme výsledek předchozí integrace a výsledek z (9.5). Celkem máme

$$\int \frac{5x^6 - x^5 + 24x^2 - 9x + 9}{x^3(x^2+3)^2}\,dx \overset{c}{=} 2\ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$$

$$+\frac{11}{x^2+3} + \frac{x}{x^2+3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\,x}{3} + \frac{3}{2}\ln(x^2+3),$$

na každém intervalu, který neobsahuje nulu.

2. Integrace dalších vybraných funkcí

V této části bude symbol $R(u,v)$ značit racionální funkci proměnných u a v.

Integrál typu $$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{s}}\right)\,dx,$$

kde $s \in \mathbb{N}$, $s > 1$, lze převést substitucí

$$\mathbf{\frac{ax+b}{cx+d} = t^s.} \tag{9.6}$$

na integrál racionální funkce proměnné t.

Příklad 9.11 *Spočtěme integrál* $\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x}\,dx.$

Použijeme substituci (9.6) $\sqrt{2x+3} = t$, *nebo-li* $2x+3 = t^2$, $x = \frac{t^2-3}{2}$ *a* $dx = t\,dt$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x}\,dx = \int_{\sqrt{-2+3}}^{\sqrt{2+3}} \frac{t+\frac{t^2-3}{2}}{t-\frac{t^2-3}{2}} t\,dt = \int_{1}^{\sqrt{5}} \frac{2t^2+t^3-3t}{2t-t^2+3}\,dt$$

a po rozkladu na parciální zlomky dostaneme

$$= \int_{1}^{\sqrt{5}} \left(-t-4-\frac{9}{t-3}+\frac{1}{t+1}\right) dt = \left[-\frac{t^2}{2}-4t-9\ln|t-3|+\ln|t+1|\right]_1^{\sqrt{5}}$$

$$= -\frac{5}{2} - 4\sqrt{5} - 9\ln(3-\sqrt{5}) + \ln(\sqrt{5}+1) + \frac{1}{2} + 4 + 9\ln 2 - \ln 2$$

$$= 2 - 4\sqrt{5} - 9\ln(3-\sqrt{5}) + \ln(\sqrt{5}+1) + 8\ln 2.$$

Integrál typu $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx,$

kde $a > 0$ a polynom ax^2+bx+c má dva různé kořeny (jinak bychom mohli odmocnit a dostali bychom racionální funkci). Tyto integrály počítáme pomocí tzv. **Eulerovy substituce**

$$\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}} = \pm\sqrt{\mathbf{a}}\mathbf{x}+\mathbf{t}. \tag{9.7}$$

Znaménko v substituci volíme tak, abychom si co nejvíce usnadnili práci.

Příklad 9.12 *Spočtěme integrál* $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x-1}}$.

Použijeme substituci (9.7) $\sqrt{x^2+x-1} = -x+t$, *po umocnění dostaneme* $x^2+x-1 = x^2-2xt+t^2$ *nebo-li* $x+2xt = t^2+1$. *Potom*

$$x = \frac{t^2+1}{1+2t}, \qquad dx = \frac{2t(1+2t)-(t^2+1)2}{(1+2t)^2} = \frac{2t^2+2t-2}{(1+2t)^2}dt$$

$$a \qquad \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x-1}} \overset{c}{=} \int \frac{2t^2+2t-2}{t(1+2t)^2}dt.$$

Po rozkladu na parciální zlomky dostaneme

$$\overset{c}{=} \int \frac{-2}{t} + \frac{5}{1+2t} + \frac{5}{(1+2t)^2} \overset{c}{=} -2\ln|t| + \frac{5\ln|1+2t|}{2} - \frac{5}{2(1+2t)}$$

$$\overset{c}{=} -2\ln\left|x+\sqrt{x^2+x-1}\right| + \frac{5}{2}\ln\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x-1}\right| - \frac{5}{2(1+2x+2\sqrt{x^2+x-1})}.$$

Ještě určíme obor platnosti. Kořeny polynomu pod odmocninou jsou $x_{1,2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ *a tedy odmocnina má smysl pro* $x \geq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ *a pro* $x \leq \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. *A protože argumenty logaritmů nemění znaménko na definičním oboru odmocniny, tvoří obor platnosti intervaly* $\left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$ *a* $\left(-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]$.

Integrál typu $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx,$

kde $a<0$ a polynom ax^2+bx+c má dva různé reálné kořeny α a β splňující nerovnost $\alpha<\beta$ (v opačném případě by neexistovala reálná odmocnina). Tedy definiční obor odmocniny je $[\alpha,\beta]$ a platí

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta) = -a(x-\alpha)(\beta-x),$$

kde všichni tři činitelé jsou kladná čísla. Potom

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a(x-\alpha)(\beta-x)}$$
$$= \sqrt{-a\,(x-\alpha)^2\,\frac{\beta-x}{x-\alpha}} = \sqrt{-a}\,(x-\alpha)\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}$$

a zavedeme tzv. **Eulerovu substituci**

$$\sqrt{\frac{\beta-\mathbf{x}}{\mathbf{x}-\alpha}} = \mathbf{t}. \tag{9.8}$$

Příklad 9.13 *Spočtěme integrál* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$, *pro* $x\in(1,3)$.

Protože

$$-x^2+4x-3 = -1(x-1)(x-3) = (x-1)(3-x),$$

je na intervalu $(1,3)$ $\;x-1>0$ *a* $\;3-x>0$. *Můžeme tedy psát*

$$\sqrt{-x^2+4x-3} = \sqrt{(x-1)(3-x)} = (x-1)\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}.$$

Použijeme substituci (9.8)

$$\sqrt{\frac{3-x}{x-1}} = t, \qquad \frac{3-x}{x-1} = t^2.$$

Po vynásobení poslední rovnice výrazem $(x-1)$ *vyjádříme* x

$$x = \frac{3+t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{-4t\,dt}{(1+t^2)^2}.$$

Potom

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}} = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}} = \int \frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,\frac{dt}{\left(\frac{3+t^2}{1+t^2}-1\right)t}$$

$$= \int \frac{-4}{1+t^2}\,\frac{dt}{(3+t^2-1-t^2)} = -2\int \frac{dt}{1+t^2} \overset{c}{=} -2\,\mathrm{arctg}\, t \overset{c}{=} -2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}.$$

Integrál typu $\displaystyle\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{px^2+rx+s}}$,

kde P_n je polynom n-tého stupně. Potom na intervalu, kde je $px^2+rx+s>0$, můžeme použít tzv. **Ostrogradského vzorce:**

$$\int \frac{\mathbf{P_n(x)\,dx}}{\sqrt{\mathbf{px^2+rx+s}}} \overset{c}{=} \mathbf{Q_{n-1}(x)}\sqrt{\mathbf{px^2+rx+s}} + \int \frac{\mathbf{k\,dx}}{\sqrt{\mathbf{px^2+rx+s}}}, \qquad (9.9)$$

kde Q_{n-1} je polynom $(n-1)$-ního stupně a k je konstanta. Polynom Q_{n-1} a konstantu k určíme ze vztahu

$$\mathbf{P_n(x) = Q'_{n-1}(x)(px^2+rx+s) + \frac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2px+r) + k} \qquad (9.10)$$

metodou neurčitých koeficientů. Ostrogradského vzorec dostaneme, vydělíme-li rovnici (9.10) výrazem $\sqrt{px^2+rx+s}$ a následně ji zintegrujeme.

Příklad 9.14 *Spočtěme integrál* $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, *pro* $|x|<1$.

Dosadíme-li $n=4$, $P_4(x)=x^4$, $Q_3=ax^3+bx^2+cx+d$, $p=-1$, $r=0$ *a* $s=1$ *do vztahu (9.10), máme*

$$x^4=(3ax^2+2bx+c)(1-x^2)-(ax^3+bx^2+cx+d)x+k$$

a porovnáním koeficientů u stejných mocnin dostaneme

$$c+k=0,\quad 2b-d=0,\quad 3a-c-c=0,\quad -2b-b=0,\quad -3a-a=1$$

a tedy

$$a=-\frac{1}{4},\qquad b=0,\qquad c=-\frac{3}{8}\qquad d=0,\qquad k=\frac{3}{8}.$$

Dosazením $Q_3=-\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{8}x=-\frac{1}{8}(2x^3+3)$ *a* $k=\frac{3}{8}$ *do Ostrogradského vzorce (9.9) obdržíme*

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\overset{c}{=}-\frac{1}{8}(2x^3+3)\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\overset{c}{=}-\frac{1}{8}(2x^3+3)\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{8}\arcsin x.$$

Integrál typu $\int R(\cos x,\sin x)\,dx.$

Zde k cíli vždy vede substituce

$$\operatorname{tg}\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}}=\mathbf{t}\qquad \text{pro } \mathbf{x}\in(-\pi,\pi). \tag{9.11}$$

Užitím základních vztahů mezi trigonometrickými funkcemi dostaneme

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}},\qquad \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{1+t^2},$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\frac{x}{2}=\operatorname{arctg}t,\qquad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Dohromady tedy máme vzorce

$$\sin\mathbf{x}=\frac{\mathbf{2t}}{\mathbf{1+t^2}},\qquad \cos\mathbf{x}=\frac{\mathbf{1-t^2}}{\mathbf{1+t^2}},\qquad \mathbf{dx}=\frac{\mathbf{2\,dt}}{\mathbf{1+t^2}}.\tag{9.12}$$

Příklad 9.15 *Spočtěme integrál* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,dx.$

Použitím substituce (9.11) a vztahů (9.12) máme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,dx=\int_{\operatorname{tg}0}^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}\frac{1-\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2\,dt}{1+t^2}=\int_0^1\frac{1+t^2-2t}{1+t^2+1-t^2}\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$=\int_0^1\frac{1+t^2-2t}{1+t^2}\,dt=\int_0^1 1-\frac{2t}{1+t^2}\,dt=\left[t-\ln(1+t^2)\right]_0^1=1-\ln 2.$$

Substituce (9.11) sice vždy vede k racionalizaci funkce $R(\cos x,\sin x)$, ale vzniklá racionální funkce bývá většinou značně složitá. Proto v některých speciálních případech bývá výhodnější použít jiné substituce. Jde o tyto případy:

- Je-li $\mathbf{R}(\cos\mathbf{x},\sin\mathbf{x}) = -\mathbf{R}(\cos\mathbf{x},-\sin\mathbf{x})$, volíme substituci $\cos x = t$.
- Je-li $\mathbf{R}(\cos\mathbf{x},\sin\mathbf{x}) = -\mathbf{R}(-\cos\mathbf{x},\sin\mathbf{x})$, volíme substituci $\sin x = t$.
- Je-li $\mathbf{R}(\cos\mathbf{x},\sin\mathbf{x}) = \mathbf{R}(-\cos\mathbf{x},-\sin\mathbf{x})$, volíme substituci $\operatorname{tg} x = t$ pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Kapitola 10

Dodatky a aplikace

1. Nevlastní integrály

Dosud jsme určitý integrál definovali pouze pro omezené funkce na omezeném intervalu $[a, b]$. Tuto definici nyní rozšíříme i na neomezené intervaly a pro neomezené funkce.

Je-li $a < b$ a existuje-li určitý integrál funkce f na intervalu $[a, b]$, potom je podle věty 7.26 integrál $F(y) = \int_a^y f(x)\,dx$ spojitou funkcí proměnné y v intervalu $[a, b]$ a platí $F(b) = \lim_{y\to b^-} F(y)$, nebo-li

$$\lim_{y\to b^-} \int_a^y f(x)\,dx = \lim_{y\to b^-} (F(y) - F(a)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Může se však stát, že limita vlevo existuje, i když určitý integrál vpravo neexistuje. V takovém případě rozšíříme definici určitého integrálu právě limitou vlevo. Podobně budeme postupovat i v případě dolní meze a v případě, že některá z těchto mezí není omezená.

Definice 10.1 *Nechť* $a < b$ *a nechť funkce* f *má pro* $\forall y \in [a, b)$ *Riemannův integrál* $\int_a^y f(x)\,dx$. *Existuje-li vlastní limita* $\lim_{y \to b^-} \int_a^y f(x)\,dx$, *nazveme tuto limitu* **zobecněným Riemannovým integrálem** *funkce* f *od* a *do* b.

Definice 10.2 *Nechť* $a < b$ *a nechť funkce* f *má pro* $\forall y \in (a, b]$ *Riemannův integrál* $\int_y^b f(x)\,dx$. *Existuje-li vlastní limita* $\lim_{y \to a^+} \int_y^b f(x)\,dx$, *nazveme tuto limitu* **zobecněným Riemannovým integrálem** *funkce* f *od* a *do* b.

Definice 10.3 *Nechť je dáno číslo* a *a nechť funkce* f *má pro* $\forall y \geq a$ *Riemannův integrál* $\int_a^y f(x)\,dx$. *Existuje-li vlastní limita* $\lim_{y \to \infty} \int_a^y f(x)\,dx$, *nazveme tuto limitu* **zobecněným Riemannovým integrálem** *funkce* f *od* a *do* ∞.

Definice 10.4 *Nechť je dáno číslo* a *a nechť funkce* f *má pro* $\forall y \leq a$ *Riemannův integrál* $\int_y^a f(x)\,dx$. *Existuje-li vlastní limita* $\lim_{y \to -\infty} \int_y^a f(x)\,dx$, *nazveme tuto limitu* **zobecněným Riemannovým integrálem** *funkce* f *od* $-\infty$ *do* a.

Příklad 10.5 *Spočítejme integrál* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Funkce $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ *není omezená v bodě* $x = 1$, *takže nemá Riemannův integrál od* 0 *do* 1. *Nicméně pro* $\forall y \in [0,1)$ *Riemannův integrál existuje a platí*

$$\int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-y} + 2.$$

A protože $\lim\limits_{y\to 1^-} \sqrt{1-y} = 0$, *existuje i zobecněný Riemannův integrál*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{y\to 1^-} \left(-2\sqrt{1-y} + 2\right) = 2.$$

Pokud bod b, ve kterém není integrand omezený, leží uvnitř intervalu $[a,c]$ (přes který integrujeme), nabízí se následující myšlenka: Rozdělíme interval $[a,c]$ na dva intervaly $[a,b]$ a $[b,c]$ a na obou těchto intervalech spočteme zobecněný Riemannův integrál. V případě, že oba integrály existují, potom existuje i zobecněný Riemannův integrál na intervalu $[a,c]$ a rovná se jejich součtu. Stejným způsobem můžeme postupovat i v případě, že bodů, v nichž není integrand omezený, je více.

Příklad 10.6 *Spočítejme integrál* $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Funkce $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ *není omezená v bodě* $x = 0$, *takže nemá Riemannův integrál od* -1 *do* 1. *Nicméně pro* $\forall y \in [-1,0)$ *Riemannův integrál existuje a platí*

$$\int_{-1}^{y} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \left[3\sqrt[3]{x}\right]_{-1}^{y} = 3\sqrt[3]{y} + 3$$

a také pro $\forall y \in (0,1]$ *existuje Riemannův integrál a platí*

$$\int_{y}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \left[3\sqrt[3]{x}\right]_{y}^{1} = 3 - 3\sqrt[3]{y}.$$

A protože $\lim\limits_{y\to 0^-} \sqrt[3]{y} = \lim\limits_{y\to 0^+} \sqrt[3]{y} = 0$, *existuje i zobecněný Riemannův integrál*

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{y\to 0^-} (3\sqrt[3]{y} + 3) + \lim_{y\to 0^+} (3 - 3\sqrt[3]{y}) = 6.$$

Příklad 10.7 *Spočítejme integrál* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

Interval $(-\infty,\infty)$ *není omezený, takže Riemannův integrál neexistuje. Nicméně pro* $0 \le y < \infty$ *Riemannův integrál existuje a platí*

$$\int_{0}^{y} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{3}\int_{0}^{y} \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4}dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[2\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right]_{0}^{y} = \frac{1}{6}\left(2\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg}\frac{y}{2}\right)$$

a také pro $-\infty < y \le 0$ *Riemannův integrál existuje a platí*

$$\int_{y}^{0} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{6}\left[2\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right]_{y}^{0} = \frac{1}{6}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{2} - 2\operatorname{arctg} y\right).$$

A protože $\lim\limits_{y\to\infty}\left(2\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg}\frac{y}{2}\right) = \lim\limits_{y\to-\infty}\left(-2\operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg}\frac{y}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, *existuje i zobecněný Riemannův integrál*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \int_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} + \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$$
$$= \frac{1}{6}\lim_{y\to\infty}\left(2\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg}\frac{y}{2}\right) + \frac{1}{6}\lim_{y\to-\infty}\left(-2\operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg}\frac{y}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Příklad 10.8 *Spočítejme integrál* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$.

Funkce $\dfrac{1}{x}$ *není omezená v bodě* $x = 0$, *takže nemá Riemannův integrál od* 0 *do* 1. *Dále pro* $\forall y \in (0,1]$ *Riemannův integrál existuje a platí*

$$\int_y^1 \frac{dx}{x} = -\ln y.$$

Ale $\lim\limits_{y\to 0^+} -\ln y = \infty$, *neexistuje tedy ani zobecněný Riemannův integrál.*

2. Obsah rovinných obrazců

Zavedení určitého integrálu bylo motivováno problémem výpočtu obsahu plochy, ohraničené osou x, přímkami $x = a$ a $x = b$ $(a < b)$ a nezápornou omezenou funkcí f a tento problém nás přivedl k zavedení (zobecněného) Riemannova integrálu funkce f přes interval $[a,b]$. Označíme-li příslušný **obsah** symbolem $S(a,b,f)$, potom požadujeme, aby byly splněny tyto požadavky

- $S(a,b,f) \geq 0$ **pro libovolný interval** $[a,b]$ **a libovolnou nezápornou omezenou funkcí** f **na intervalu** $[a,b]$,

- **je-li** $a < c < b$, **je** $S(a,b,f) = S(a,c,f) + S(c,b,f)$ **pro libovolnou nezápornou omezenou funkcí** f **na intervalu** $[a,b]$,
- **je-li** $a \le c < d \le b$, **je** $S(c,d,g) \le S(a,b,f)$ **pro libovolné nezáporné omezené funkce** f **a** g **splňující nerovnost** $g(x) \le f(x)$ **pro všechna** $x \in [c,d]$,
- $S(a,b,f) = (b-a)c$ **pro libovolný interval** $[a,b]$ **a libovolnou nezápornou konstantní funkcí** $f(x) = c$ **na intervalu** $[a,b]$.

Věta 10.9 **(Obsah plochy pod grafem nezáporné funkce.)** *Obsah* $S(a,b,f)$ *obrazce ohraničeného osou* x, *přímkami* $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ *a nezápornou spojitou funkcí* f *na intervalu* $[a,b]$ *je roven* $S(a,b,f) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Důkaz. Snadno si rozmyslíme, že integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ splňuje všechny čtyři podmínky kladené na obsah plochy. Dále označme $D_1, \cdots, D_m, \cdots$, posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ takovou, že každé dělení D_m dělí interval $[a,b]$ na m stejných dílků. Dělícími body dělení D_m jsou tedy body $a = x_{0,m} < x_{1,m} < \cdots < x_{m-1,m} < x_{m,m} = b$, kde

$$x_{i,m} = a + \frac{i(b-a)}{m} \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

tedy $\Delta x_{i,m} = x_{i,m} - x_{i-1,m} = \dfrac{b-a}{m}$, $v(D_m) = \dfrac{b-a}{m}$ a $\lim\limits_{m\to\infty} v(D_m) = 0$. Potom pro každé dělení platí

$$s(D_m) \le S(a,b,f) \le S(D_m).$$

Vzhledem k tomu, že funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$, existuje určitý integrál funkce f od a do b a rovná se dolnímu a hornímu Riemannovu integrálu a tedy podle vět 7.14 a 7.15 platí:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} s(f, D_m) \le S(a, b, f) \le \lim_{m\to\infty} S(f, D_m) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

Podobně bychom mohli odvodit větu:

Věta 10.10 **(Obsah plochy nad grafem nekladné funkce.)** *Obsah $S(a, b, f)$ obrazce ohraničeného osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ a nekladnou spojitou funkcí f na intervalu $[a, b]$ je roven*

$$S(a, b, f) = \int_a^b -f(x)\,dx.$$

Ostatní případy dostaneme vhodnou kombinací předchozích dvou vět. Ukážeme si to na několika příkladech.

Příklad 10.11 *Spočítejme obsah kruhu.*

Kružnice je popsána rovnicí $x^2 + y^2 = R^2$, kde $R > 0$ je poloměr kružnice. Explicitní vyjádření křivky pro horní polovinu kružnice je $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ pro $x \in [-R, R]$. Tedy obsah horní poloviny kruhu je roven

$$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx.$$

Explicitní vyjádření křivky pro dolní polovinu kružnice je $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ pro $x \in [-R, R]$. Zde je dolní hranice tvořena zápornou funkcí, takže obsah nad *ní je roven*

$$\int_{-R}^{R} -\left(-\sqrt{R^2 - x^2}\right)\, dx.$$

Sečtením těchto dvou integrálů dostaneme obsah celého kruhu. K výpočtu vzniklého integrálu využijeme substituci $x = R\sin t$ $(dx = R\cos t)$.

$$S = 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\, dx = 2R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}\cos t\, dt = 2R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\, dt.$$

Poslední integrál spočítáme pomocí per-partes tak, že budeme funkci $\cos t$ *integrovat i derivovat*

$$= 2R^2\left([\sin t\cos t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\, dt\right) = 2R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos^2 t\, dt$$

$$= 2\pi R^2 - 2R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\, dt.$$

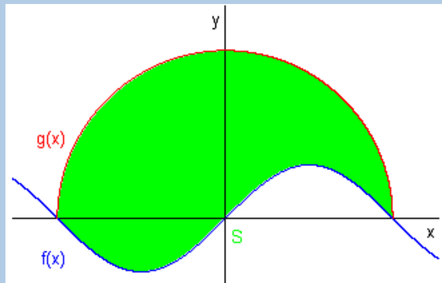
Z toho plyne, že $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{2}$ *a tedy* $S = \pi R^2$.

Příklad 10.12 *Spočítejme obsah plochy ohraničené grafy funkcí* $\sin x$ *a osou* x *na intervalu* $[0, 2\pi]$.

Obsah zadané plochy je součtem dvou ploch. První leží pod grafem funkce $\sin x$ *na intervalu* $[0,\pi]$ *a druhá leží nad grafem funkce* $\sin x$ *na intervalu* $[\pi, 2\pi]$.

$$S = \int_0^{\pi}\sin x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\pi} + [\cos x]_{\pi}^{2\pi} = 4.$$

Příklad 10.13 *Spočítejme obsah plochy ohraničené grafy funkcí* $f(x) = \sin x$ *a* $g(x) = \sqrt{\pi^2 - x^2}$.



Funkce $\sqrt{\pi^2 - x^2}$ *je na celém intervalu* $[-\pi, \pi]$ *nezáporná, zatímco funkce* $\sin x$ *je nekladná na intervalu* $[-\pi, 0]$ *a nezáporná na intervalu* $[0, \pi]$. *Obsah zadané plochy na intervalu* $[-\pi, 0]$ *bude tedy součtem obsahů plochy ležící pod grafem funkce* $\sqrt{\pi^2 - x^2}$ *a plochy ležící nad grafem funkce* $\sin x$. *A na intervalu* $[0, \pi]$ *bude rozdílem obsahů plochy ležící pod grafem funkce* $\sqrt{\pi^2 - x^2}$ *a plochy ležící pod grafem funkce* $\sin x$. *Takže platí*

$$S = \int_{-\pi}^{0} \sqrt{\pi^2 - x^2}\, dx + \int_{-\pi}^{0} -\sin x\, dx + \int_{0}^{\pi} \sqrt{\pi^2 - x^2}\, dx - \int_{0}^{\pi} \sin x\, dx$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\pi^2 - x^2}\, dx - \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx.$$

První integrál představuje obsah poloviny kruhu o poloměru π *(příklad 10.11) a ve druhém integrujeme lichou funkci na intervalu, který je symetrický podle* *nuly, takže tento integrál je roven nule. To můžeme odvodit například pomocí substituce* $x = -y$ $(dx = -dy)$

$$\int_{-\pi}^{0} \sin x\,dx = -\int_{\pi}^{0} \sin(-y)\,dy = \int_{0}^{\pi} \sin(-y)\,dy = -\int_{0}^{\pi} \sin y\,dy.$$

Potom

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = \int_{0}^{\pi} \sin x\,dx + \int_{-\pi}^{0} \sin x\,dx = \int_{0}^{\pi} \sin x\,dx - \int_{0}^{\pi} \sin y\,dy = 0.$$

Celkem tedy máme $S = \dfrac{\pi^3}{2}$.

Jestliže je graf nezáporné spojité funkce f na intervalu $[a, b]$ vyjádřený parametrickými rovnicemi: $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$ na intervalu $[c, d]$, kde funkce $\varphi(t)$ má spojitou derivaci různou od nuly na intervalu (c, d), potom substitucí $x = \varphi(t)$, $f(\varphi(t)) = \psi(t)$ ve větě 10.9 dostaneme vzorec

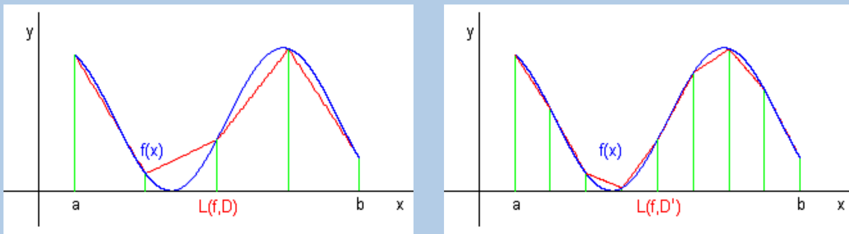
$$\mathbf{S(a, b, f)} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)\,dx} = \int_{\mathbf{c}}^{\mathbf{d}} \psi(\mathbf{t})\varphi'(\mathbf{t})\,\mathbf{dt}.$$

3. Délka křivky

Nechť f je spojitá funkce. V této části budeme křivkou C rozumět množinu všech bodů $[x, y]$, vyhovujících podmínkám $a \le x \le b$, $y = f(x)$. Naším cílem bude definovat vhodným způsobem délku této křivky. Rozdělme interval $[a, b]$ pomocí dělení D_n na n dílků dělícími body $a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n = b$ a sestrojme body

$$[x_0, f(x_0)] = P_0,\ [x_1, f(x_1)] = P_1,\ \ldots\ [x_n, f(x_n)] = P_n.$$

Délku úseček spojující body P_i a P_{i+1} pro $i = 0, \ldots, n-1$ umíme spočítat. Pro připomenutí délka úsečky je rovna $\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$. Sečteme-li nyní délky těchto úseček, dostaneme **délku lomené čáry** procházející body P_i pro $i = 0, \ldots, n$. Tuto délku označíme $L(f, D_n)$.



Obrázek 10.1: Odvození délky křivky.

Vezmeme-li nyní dvě dělení D a D' tak, že dělení D' je zjemněním dělení D. Potom platí $L(f, D) \leq L(f, D')$.

Definice 10.14 **Délku křivky** *C definujeme jako supremum $L(f, D)$ přes všechna dělení intervalu $[a, b]$. Budeme ji značit symbolem $L(a, b, f)$.*

Věta 10.15 **(Výpočet délky křivky.)** *Nechť funkce f má vlastní derivaci v intervalu (a, b). Dále nechť existuje (zobecněný) Riemannův integrál $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$. Potom křivka C definovaná množinou všech bodů $[x, y]$, vyhovujících podmínkám $a \leq x \leq b$, $y = f(x)$ má konečnou délku danou předpisem*

$$L(a, b, f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Důkaz. Potřebujeme dokázat, že $\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ je supremum všech čísel $L(f,D)$. To znamená, že

- pro každé dělení D intervalu $[a,b]$ platí $L(f,D) \le \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$,
- $\forall \varepsilon > 0$ existuje dělení D tak, že $\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx - \varepsilon < L(f,D)$.

Vezmeme libovolné dělení D intervalu $[a,b]$ a pro každé $m \in \mathbb{N}$ sestrojíme dělení D_m tak, že každý částečný interval dělení D rozdělíme na 2^m stejných dílků. Potom každé dělení D, D_1, D_2, … je zjemněním předchozího dělení a platí

$$L(f,D) \le L(f,D_1) \le L(f,D_2) \le L(f,D_3) \le \ \dots \tag{10.1}$$

Jsou-li dělícími body dělení D_m body $a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n = b$, potom délka úsečky l_i spojující body $[x_{i-1}, f(x_{i-1})]$ a $[x_i, f(x_i)]$ je

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Protože f je spojitá funkce v intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ a má v intervalu (x_{i-1}, x_i) derivaci f', existuje podle věty o střední hodnotě číslo $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tak, že pro $i = 1, 2, \cdots, n$ platí

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1}) f'(\xi_i) = \Delta x_i f'(\xi_i).$$

Tedy

$$\begin{aligned} l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta x_i f'(\xi_i))^2} \\ &= \Delta x_i \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}. \end{aligned}$$

Sečteme-li délky úseček pro $i = 1, 2, \cdots, n$, dostaneme

$$L(f, D_m) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}.$$

Protože $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $\lim\limits_{m\to\infty} v(D_m) = 0$ a podle předpokladu existuje Riemannův integrál $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$, platí podle věty 7.19

$$\lim_{m\to\infty} L(f, D_m) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Podle (10.1) je $L(f, D) \le L(f, D_m)$ pro každé $m \in \mathbb{N}$ a protože limita zachovává nerovnosti platí $L(f, D) \le \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$. Tedy tento integrál je horní závorou. Dále víme, že $\lim\limits_{m\to\infty} L(f, D_m) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$. Potom $\forall \varepsilon > 0\ \exists D_m$ tak, že $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx - \varepsilon < L(f, D_m)$ a tedy tento integrál je nejmenší horní závorou a tedy supremem všech čísel $L(f, D)$. $\square$

Příklad 10.16 *Spočítejme obvod kružnice.*

Kružnice je popsána rovnicí $x^2 + y^2 = R^2$, kde $R > 0$ je poloměr kružnice. Explicitní vyjádření křivky pro horní polovinu kružnice je $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ pro $x \in [-R, R]$. Tedy obvod horní poloviny kružnice je roven

$$\int_{-R}^{R} \sqrt{1 + \left(\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)'\right)^2}\, dx = \int_{-R}^{R} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = R \int_{-R}^{R} \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx$$

(pokud tento integrál existuje). Explicitní vyjádření křivky pro dolní polovinu kružnice je $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ pro $x \in [-R, R]$. Tedy obvod dolní poloviny kružnice je opět roven $\int_{-R}^{R} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = R \int_{-R}^{R} \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx$ (pokud tento integrál existuje). Součtem předchozích dvou integrálů dostaneme obvod kružnice. Vzhledem k tomu, že integrand není omezený v krajních bodech, Riemannův integrál neexistuje. Zkusíme tedy spočítat zobecněný Riemannův integrál. Po substituci $x = Ry$ obdržíme

$$
\begin{aligned}
L = 2R \int_{-1}^{1} \frac{R}{R\sqrt{1 - y^2}}\, dy &= 2R \left(\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\, dy + \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\, dy \right) \\
&= 2R \left(\lim_{z \to 1^-} \int_{0}^{z} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\, dy + \lim_{z \to -1^+} \int_{z}^{0} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\, dy \right) \\
&= 2R \left(\lim_{z \to 1^-} [\arcsin y]_0^z + \lim_{z \to -1^+} [\arcsin y]_z^0 \right) \\
&= 2R \left(\lim_{z \to 1^-} \arcsin z - \lim_{z \to -1^+} \arcsin z \right) = 2R \left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} \right) = 2\pi R.
\end{aligned}
$$

4. Přibližný výpočet určitého integrálu

Jestliže primitivní funkci nelze vyjádřit elementárními funkcemi, nebo je-li hledání primitivní funkce příliš obtížné, využíváme k výpočtu určitých integrálů tzv. **kvadraturní vzorce.** V případě, že je integrovaná funkce daná tabulkou, tak nám ani nezbývá nic jiného, než spočítat přibližnou hodnotu určitého integrálu pomocí kvadraturního vzorce. Kvadraturním vzorcem budeme rozumět aproximaci určitého integrálu

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{konečným součtem} \qquad \mathbf{I_{n+1}(f)} = \sum_{\mathbf{i=0}}^{\mathbf{n}} \mathbf{H_i f(a_i)}.$$

Čísla a_i, o kterých předpokládáme, že leží v intervalu $[a, b]$, nazýváme **uzly kvadraturního vzorce** a čísla H_i nazýváme **váhami** nebo **koeficienty.** Váhy a uzly se volí tak, aby nezávisely na integrované funkci a aby splňovaly některé další požadavky, zejména, aby **chyba kvadraturního vzorce**, definovaná předpisem

$$\mathbf{E_{n+1}(f) := I(f) - I_{n+1}(f)}$$

měla vhodné vlastnosti. Obvykle se vyžaduje, aby kvadraturní vzorec integroval některou třídu funkcí přesně (nejčastěji polynomy). **Řádem kvadraturního vzorce** budeme rozumět celé číslo m, pro něž platí

$$\mathbf{E_{n+1}(x^k) = 0} \qquad \text{pro} \quad \mathbf{k = 0, \ldots, m},$$

ale $E_{n+1}(x^{m+1}) \neq 0$. Dva nejjednodušší kvadraturní vzorce tvoří dolní a horní součty. Nicméně tyto kvadraturní vzorce integrují přesně pouze konstantní funkce – jsou tedy pouze řádu nula a proto se v praxi většinou nepoužívají. Uvedeme si ještě dva další jednoduché kvadraturní vzorce.

Lichoběžníkové pravidlo vznikne tak, že interval $[a, b]$ rozdělíme na n stejných dílků a funkci f na každém dílku nahradíme lineární funkcí (úsečkou)

$$y = \frac{f(a_i) - f(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}}(x - a_{i-1}) + f(a_{i-1}).$$

Tedy v bodech a_i a a_{i-1} se funkce f a úsečka y protínají. Následně zintegrujeme úsečku y („lichoběžník“) na intervalu $[a_i, a_{i-1}]$ přesně a obdržíme

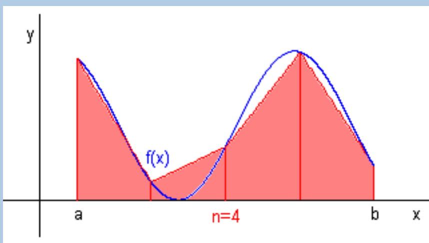
$$(a_i - a_{i-1})\frac{f(a_i)+f(a_{i-1})}{2} = \frac{(b-a)}{n}\frac{f(a_i)+f(a_{i-1})}{2}.$$

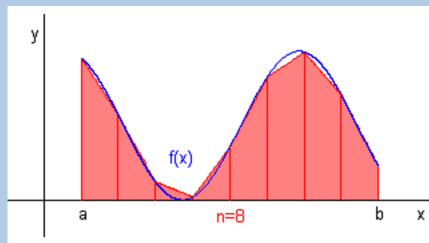
Nakonec sečteme obdržené integrály přes všechny dílky a dostaneme

$$\int_a^b \mathbf{f(x)\,dx = h\left(\frac{f(a_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a_i) + \frac{f(a_n)}{2}\right) + E(f)}, \quad \text{kde}$$

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad a_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, n, \quad E(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(c), \quad c \in (a,b).$$

Z konstrukce lichoběžníkového pravidla je ihned vidět, že je-li funkce f line-

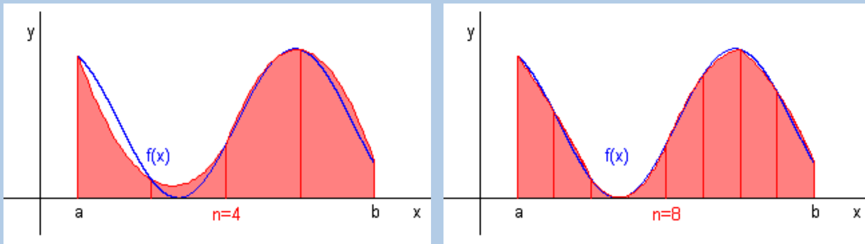




ární nebo konstantní, potom použitím lichoběžníkového pravidla dostaneme přesný výsledek. A tedy lichoběžníkové pravidlo je řádu jedna.

Při odvozování **Simpsonova pravidla** postupujeme podobně jako u lichoběžníkového pravidla. Nejprve interval $[a,b]$ rozdělíme na n (musí být sudé) stejných dílků a funkci f nahradíme na každém intervalu $[a_{2i}, a_{2i+2}]$ kvadratickou funkcí. My si však ukážeme jednodušší způsob odvození. Určitý integrál totiž nezávisí na posunutí, posuneme-li zároveň funkci i integrační meze. Takže stačí odvodit kvadraturní vzorec na referenčním intervalu $[-h,h]$

a tento vzorec aplikovat na funkci f na každém intervalu $[a_{2i}, a_{2i+2}]$. Potře-



bujeme tedy najít kvadratickou funkci $y = ax^2 + bx + c$ tak, aby se v bodech h, 0 a $-h$ protínala s funkcí f. Takže musí platit $f(-h) = ah^2 - bh + c$, $f(0) = a0^2 - b0 + c$, $f(h) = ah^2 + bh + c$. Snadno najdeme řešení:

$$y = \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{2h^2}x^2 + \frac{f(h) - f(-h)}{2h}x + f(0)$$

a jeho integrováním od $-h$ do h dostaneme hledanou kvadraturní formuli:

$$\frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{2h^2}\frac{2h^3}{3} + 2hf(0) = \frac{h}{3}(f(h) + 4f(0) + f(-h)).$$

Jejím přenesením na obecný interval $[a_{2i}, a_{2i+2}]$ o délce $2h$ tedy obdržíme

$$\frac{h}{3}(f(a_{2i}) + 4f(a_{2i+1}) + f(a_{2i+2})).$$

Sečteme-li tyto vzorce přes všechny intervaly $[a_{2i}, a_{2i+2}]$, dostaneme Simpsonovo pravidlo

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(a_0) + 4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} f(a_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{\frac{m-2}{2}} f(a_{2i}) + f(a_m)\right) + E(f),}$$

$$\text{kde} \qquad h = \frac{b-a}{m}, \quad a_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, m \text{ (sudé)},$$

$$E(f) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(IV)}(c), \quad c \in (a, b).$$

Z konstrukce Simpsonova pravidla je ihned vidět, že je-li funkce f kvadratická, lineární nebo konstantní, potom Simpsonovo pravidlo integruje tyto funkce přesně. A tedy Simpsonovo pravidlo je minimálně druhého řádu. Ve skutečnosti z chyby kvadraturního vzorce plyne, že Simpsonovo pravidlo počítá přesně i integrál z kubické funkce (její čtvrtá derivace je nula, takže i příslušná chyba $E(f) = 0$) a tedy Simpsonovo pravidlo je třetího řádu. Chyby obou dříve zmíněných kvadraturních vzorců lze odvodit s použitím Taylorovy věty, kterou si uvedeme později.

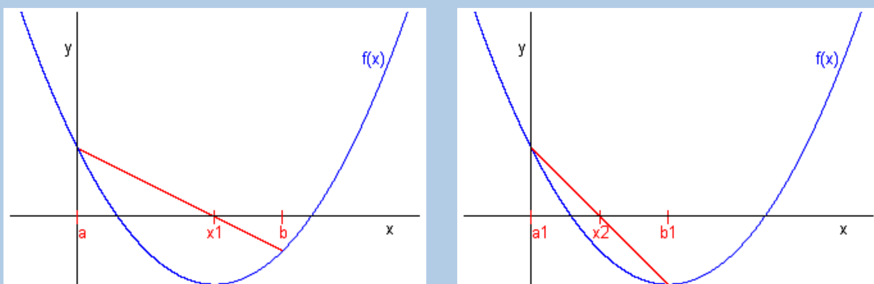
Číslo h, vyskytující se v obou právě uvedených vzorcích, budeme nazývat **integračním krokem**. Oba kvadraturní vzorce patří do skupiny **složených kvadraturních vzorců.** Tyto vzorce vzniknou tak, že se nejprve zadaný interval rozdělí na n dílků a na každém dílku se použije jednoduchý kvadraturní vzorec a výsledky se následně sečtou. Příslušné **jednoduché kvadraturní vzorce** obdržíme, dosadíme-li do lichoběžníkového pravidla $n = 1$ a do Simpsonova pravidla $n = 2$.

5. Přibližné řešení nelineárních rovnic

V této části si uvedeme dvě metody výpočtu řešení nelineární rovnice $f(x) = 0$. **Iterační metody** pro řešení rovnice $f(x) = 0$ jsou metody, které generují posloupnost čísel, která konverguje k jejímu řešení. Tyto metody můžeme rozdělit na dvě skupiny. Tu první tvoří **vždy konvergentní** metody. To jsou metody, které konvergují pro libovolnou spojitou funkci f a pro každou volbu počátečního přiblížení. Nevýhodou těchto metod je, že většinou konvergují „pomalu“. Druhou skupinu tvoří metody, které **konvergují většinou „rychleji“**, ale předpoklady pro konvergenci jsou náročnější a rovněž výpočetní složitost je větší. Obvykle postupujeme tak, že na začátku uděláme několik iterací vždy konvergentní metodou a poté pokračujeme rychleji konvergující metodou. Zástupcem vždy konvergentních metod je například metoda **regula falsi** a pravděpodobně nejužívanějším zástupcem druhé skupiny je **Newtonova metoda (metoda tečen)**.

Algoritmus metody regula falsi

Myšlenka metody: Body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ proložíme přímku a nalezneme průsečík x_1 této přímky s osou x. Je-li $f(x_1)f(a) \le 0$ proložíme v dalším kroku přímku body $[a, f(a)]$ a $[x_1, f(x_1)]$, v opačném případě proložíme přímku body $[x_1, f(x_1)]$ a $[b, f(b)]$. Opět najdeme průsečík x_2 této přímky s osou x a takto pokračujeme dále dokud $|f(x_n)|$ je větší než zvolené $\varepsilon > 0$.



Obrázek 10.2: Metoda regula falsi.

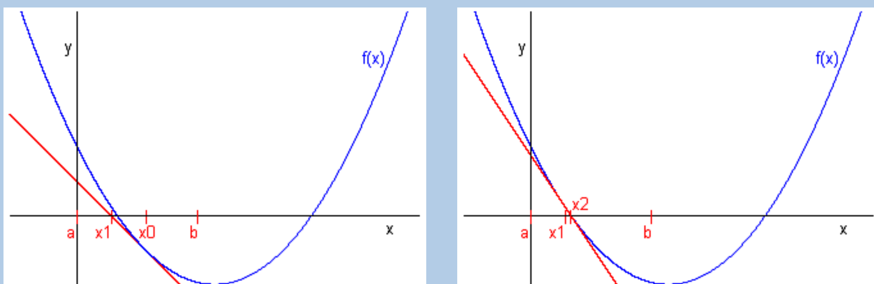
Vstup: spojitá funkce f v intervalu $[a, b]$; body a, b tak, aby $f(a)f(b) < 0$ a požadovaná přesnost $\varepsilon > 0$.

Položím $a_0 := a$, $b_0 := b$, $n := 0$ a dokud je $|f(x_n)| > \varepsilon$, provádím cyklus:

- $x_{n+1} := \dfrac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$,
- je-li $f(x_{n+1})f(a_n) \leq 0$, potom $a_{n+1} := a_n$, $b_{n+1} := x_{n+1}$,
  jinak $a_{n+1} := x_{n+1}$, $b_{n+1} := b_n$,
- $n := n + 1$.

Newtonova metoda

Myšlenka metody: Zvolíme počáteční přiblížení $x_0 \in (a, b)$ a sestrojíme tečnu k funkci f v bodě x_0. Průsečík tečny s osou x vezmeme jako další přiblížení. V tomto bodě opět sestrojí sestrojíme tečnu k funkci f a opět najdeme průsečík tečny s osou x. Takto pokračujeme dále dokud $|f(x_n)|$ je větší než zvolené $\varepsilon > 0$.



Obrázek 10.3: Newtonova metoda.

Odvození: Předpokládejme, že funkce f má spojitou druhou derivaci v intervalu $[a, b]$ a bod $x_0 \in (a, b)$ je počátečním přiblížením. Dále předpokládejme, že bod $c \in (a, b)$ je řešením rovnice $f(c) = 0$. Položíme $h = c - x_0$ a přírůstek v bodě x_0 nahradíme diferenciálem, potom máme

$$0 - f(x_0) = f(c) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) \approx hf'(x_0).$$

Je-li $f'(x_0) \neq 0$ můžeme z této „rovnice“ přibližně spočítat $h \approx \dfrac{-f(x_0)}{f'(x_0)}$ a potom i nové přiblížení

$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Je-li $f'(x_1) \neq 0$, můžeme spočítat $x_2 := x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ a takto budeme pokračovat dále dokud nedosáhneme požadované přesnosti. Tím jsme odvodili Newtonovu metodu. Ještě upozorněme, že pokud by platilo $f(x_i) = 0$, dostali bychom $h = 0$.

Algoritmus Newtonovy metody

Vstup: funkce f, která má spojitou druhou derivaci v intervalu $[a, b]$, jež v tomto intervalu nemění znaménko a první derivaci různou od nuly v intervalu $[a, b]$; body a, b tak, aby $f(a)f(b) < 0$; počáteční přiblížení $x_0 \in [a, b]$ splňující podmínku $f(x_0)f''(x_0) > 0$ a požadovaná přesnost $\varepsilon > 0$.

Položím $n = 0$ a dokud je $|f(x_n)| > \varepsilon$, provádím cyklus

- $x_{n+1} := x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$,
- $n := n + 1$.

Kapitola 11

Nekonečné řady

1. Základní pojmy

Nekonečnou řadou budeme rozumět symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, definovaný předpisem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := a_1 + a_2 + a_3 + \dots .$$

$a_n \in \mathbb{R}$ budeme nazývat **n-tým členem řady**. Řada je určena jednoznačně posloupností svých členů $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ke každé řadě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, můžeme sestrojit **posloupnost částečných součtů** $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovanou takto:

$$s_1 := a_1, \quad s_2 := s_1 + a_2, \quad s_3 := s_2 + a_3, \quad \dots$$

Číslo $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ budeme nazývat **n-tým částečným součtem** řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Částečné součty využijeme v definici konvergentní a divergentní řady.

Definice 11.1 *Je-li posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, tj. existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, říkáme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je* **konvergentní** *a číslo s nazýváme jejím* **součtem**. *Je-li posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergentní, říkáme také o řadě $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, že je* **divergentní**. *V případě divergence mohou nastat tyto případy:*

- *je-li $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, říkáme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje k ∞,*
- *je-li $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$, říkáme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje k $-\infty$,*
- *jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, říkáme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ osciluje.*

Zápis $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a$ bude znamenat, že řada je konvergentní a má součet a.

Příklad 11.2 *Řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n$ nazýváme* **geometrickou řadou** *a číslo q* **kvo-**

cientem *geometrické řady. Její n-tý částečný součet spočítáme pomocí vzorce*

$$1 - q^n = (1-q)(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1}).$$

Potom pro $q \neq 1$ dostaneme

$$s_n = aq\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{aq}{1-q} - q^{n+1}\frac{a}{1-q}.$$

Pro $|q| < 1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{aq}{1-q}$. Geometrická řada je tedy pro $|q| < 1$ konvergentní a má součet $\dfrac{aq}{1-q}$.

Příklad 11.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ *diverguje k ∞, protože $s_n = n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.*

Příklad 11.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} -1$ *diverguje k $-\infty$, protože $s_n = -n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} -n = -\infty$.*

Příklad 11.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ *osciluje, protože částečné součty tvoří posloupnost*

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots.$$

Tato posloupnost nemá limitu, protože obsahuje dvě vybrané posloupnosti $\{1\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{0\}_{n=1}^{\infty}$, které mají různé limity.

V další části se budeme věnovat vlastnostem nekonečných řad.

2. Vlastnosti nekonečných řad

Věta 11.6 **(O aritmetice nekonečných řad.)** *Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ *a* $C, D, E \in \mathbb{R}$, *potom platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n = Ca, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(Da_n + Eb_n) = Da + Eb.$$

Důkaz. Klademe-li $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $t_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, mají poslední dvě řady n-té částečné součty Cs_n a $Ds_n + Et_n$. Potom podle věty o aritmetice limit posloupností je

$$\lim_{n\to\infty} Cs_n = Cs \qquad \lim_{n\to\infty}(Ds_n + Et_n) = Da + Eb.$$

□

Věta 11.7 *Nechť* $k \in \mathbb{N}$. *Potom řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ *buď obě konvergují nebo obě divergují k* ∞ *nebo obě divergují k* $-\infty$ *nebo obě oscilují. Jestliže konvergují, platí rovnice*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n.$$

Důkaz. Klademe-li $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $t_n = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+n}$, potom platí $t_n = s_{n+k} - a_1 - a_2 - \ldots - a_k$. Nyní může nastat právě jedna ze čtyř možností:

- $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n+k} = s$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = s - a_1 - a_2 - \ldots - a_k$,

- $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n+k} = \infty$, potom i $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n+k} = -\infty$, potom i $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = -\infty$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n+k}$ neexistuje, potom neexistuje ani $\lim\limits_{n\to\infty} t_n$.

$\square$

Věta 11.8 *Je-li* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = b$ *a* $a_n \le b_n$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$. *Potom je i* $a \le b$. *Je-li navíc alespoň v jednom případě* $a_n < b_n$, *je dokonce* $a < b$.

Důkaz. Klademe-li $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $t_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, platí $s_n \le t_n$ a tedy i $a = \lim\limits_{n\to\infty} s_n \le \lim\limits_{n\to\infty} t_n = b$. Je-li navíc alespoň v jednom případě $a_n < b_n$, je podle věty o aritmetice řad

$$b - a = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) > 0.$$

A tedy $b > a$. $\square$

Věta 11.9 **(Nutná podmínka konvergence řady.)** *Je-li řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní, je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz. Klademe-li $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, existuje vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$. Ale $a_n = s_n - s_{n-1}$ a tedy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = a - a = 0.$$

$\square$

Příklad 11.10 *V příkladu 11.2 jsme dokázali konvergenci geometrické řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ *pro* $|q| < 1$. *Je-li* $q \geq 1$, *je* $q^n \geq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. *Potom*

$$s_n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n \geq n$$

a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n = \infty\right)$. *Je-li* $q \leq -1$, *je* $|q^n| \geq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *a tedy limita n-tého členu není rovna nule, takže řada nemůže konvergovat. Dále podle příkladu 11.2 je* $s_n = q\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, *potom* $s_{2n} \geq 0$ *a* $s_{2n+1} \leq 0$, *takže limita částečných součtů nemůže být ani* $\pm\infty$ *a tedy geometrická řada s kvocientem* $q \leq -1$ *osciluje.*

Příklad 11.11 **Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, nemusí být řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní!** *Ukážeme si to na příkladu řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, *která splňuje podmínku* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. *Nyní se podíváme na částečné součty této řady. Protože* $s_n = s_{n-1} + \dfrac{1}{n}$ *je posloupnost* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *neklesající a má tedy podle věty o limitě neklesající posloupnosti buď vlastní limitu (je-li omezená) nebo limitu* ∞ *(není-li omezená). Vyšetřeme vybranou posloupnost* $\{s_{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$, *která má stejnou limitu! Nyní*

$$s_{2^1} = s_2 = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}, \qquad s_{2^2} = s_4 = s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} = \frac{2}{2},$$

$$s_{2^3} = s_8 = s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{2}{2} + 4\frac{1}{8} = \frac{3}{2}, \qquad \ldots$$

Pomocí matematické indukce dostaneme $s_{2^n} \geq \frac{n}{2}$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2^n} = \infty$.

Tedy řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverguje, ačkoliv* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Vidíte, že rozhodování o konvergenci řady tímto způsobem není jednoduché, a proto si odvodíme několik kritérií, která nám rozhodování usnadní.

3. Kritéria konvergence

Je-li $\mathbf{a_n \geq 0\ \forall n}$, potom řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme **řadou s nezápornými členy**.

Posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ řad s nezápornými členy je neklesající ($s_n = s_{n-1} + a_n \geq s_{n-1}$) a z věty o limitě neklesající posloupnosti plyne následující věta.

Věta 11.12 *Nechť* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Je-li posloupnost částečných součtů* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *shora omezená, je řada konvergentní a její součet je roven* $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} s_n$*. Není-li posloupnost částečných součtů shora omezená, diverguje řada k* ∞.

U řad s nezápornými členy je tedy rozhodování o konvergenci podstatně zjednodušeno. Stačí zjistit, zda-li je posloupnost částečných součtů shora omezená nebo není. To vede k následujícímu kritériu:

Celá obrazovka
Začátek
Strana 239
Vyhledávání
◄ ►
Zpět Vpřed
Zavřít
Ukončit

Věta 11.13 **(Srovnávací kritérium.)** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy. Dále nechť existuje přirozené číslo* k *tak, že* $\forall\ n \geq k$ *je* $a_n \leq b_n$. *Potom platí:*

1. *Je-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentní, je konvergentní i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
2. *Je-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní, je divergentní i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz. 1. Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, jsou podle věty 11.12 její částečné součty $b_k + b_{k+1} + b_{k+2} + \ldots$ shora omezené. Protože $a_n \leq b_n$, musí být shora omezené i částečné součty $a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots$. Tedy řada $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ konverguje a podle věty 11.7 konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 2. Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní. Potom kdyby řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergovala, konvergovala by podle prvního tvrzení i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, což je spor. Tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní. □

Příklad 11.14 *Je-li* $\alpha < 1$, *potom je řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *podle předchozí věty di-*

vergentní, protože $\dfrac{1}{n^\alpha} \geq \dfrac{1}{n}$ *a řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ *je divergentní.*

Srovnávací kritérium má značný význam, protože slouží k odvození dalších užitečných kritérií pro posouzení konvergence řady. Porovnáním řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ s geometrickou řadou dostaneme Cauchyho (odmocninové) kritérium.

Věta 11.15 **(Cauchyho kritérium.)** *Nechť* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Potom platí*

- *Existuje-li číslo* $q < 1$ *a přirozené číslo* k *tak, že pro všechna* $n \geq k$ *je* $\sqrt[n]{a_n} < q$, *je řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*
- *Platí-li nerovnost* $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ *pro nekonečně mnoho hodnot* n *je řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

Důkaz. Nerovnost $\sqrt[n]{a_n} < q$ je ekvivalentní s nerovností $a_n < q^n$. A protože je geometrická řada s kvocientem $|q| < 1$ konvergentní, plyne ze srovnávacího kritéria konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Platí-li nerovnost $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, je $a_n \geq 1$ pro nekonečně mnoho hodnot n, tedy i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq 1$. Z nutné podmínky konvergence plyne divergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

Pohodlnější než aplikace Cauchyho kritéria je ve většině případů využití následujícího limitního Cauchyho (odmocninového) kritéria.

Věta 11.16 **(Limitní Cauchyho kritérium.)** *Nechť* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Potom platí: je-li* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, *je řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní; je-li* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, *je řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

Důkaz. Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r < 1$. Můžeme tedy volit číslo q tak, že $r < q < 1$. Potom existuje přirozené číslo k tak, že pro $n \geq k$ je $\sqrt[n]{a_n} < q$ a tedy řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje podle Cauchyova kritéria. Obdobně je-li $r > 1$, existuje přirozené číslo k tak, že pro $n \geq k$ je $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ a potom opět z nutné podmínky konvergence plyne divergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

Poznámka 11.17 *Limitní Cauchyho kritérium selže v případě, že* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *neexistuje nebo je rovna jedné.*

Příklad 11.18 *Vyšetřeme konvergenci řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\left(2 + \frac{67}{n}\right)^n}$.

Použijeme limitní Cauchyho kritérium. Spočítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\left(2+\frac{67}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{1}}{2+\frac{67}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Protože limita je menší než jedna, je zadaná řada konvergentní.

Nyní se podíváme na další pomocné srovnávací kritérium.

Věta 11.19 *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s kladnými členy* ($a_n, b_n > 0\ \forall n$)*.* *Dále nechť* $\exists k \in \mathbb{N}$ *tak, že* $\forall n \geq k$ *je* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$*. Potom platí:*

- *Je-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentní, je konvergentní i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*
- *Je-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní, je divergentní i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

Důkaz. Je-li $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, potom

$$\frac{a_n}{a_k} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}} \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdots \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{b_n}{b_k}.$$

tedy $a_n \leq \frac{a_k}{b_k} b_n$ pro $n > k$. Konverguje-li nyní řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje podle věty o aritmetice nekonečných řad i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} b_n$ a tedy podle srovnávacího kritéria konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Je-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, nemůže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergovat. Kdyby totiž řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergovala, konvergovala by podle prvního tvrzení věty i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, což je spor. $\square$

K odvození podílového kritéria využijeme předchozí větu aplikovanou na konvergentní geometrickou řadu s kvocientem $q \in (0,1)$ $\left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{q^{n+1}}{q^n} = q\right)$ a na divergentní řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{1} = 1\right)$.

Věta 11.20 **(Podílové kritérium.)** *Nechť* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

- *Existuje-li číslo* $q < 1$ *a přirozené číslo* k *tak, že pro všechna* $n \geq k$ *je* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < q$, *je řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*
- *Platí-li nerovnost* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ *pro nekonečně mnoho hodnot* n *je řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

Podobně jako jsme odvodili limitní Cauchyho kritérium, můžeme odvodit i pohodlnější limitní podílové kritérium.

Věta 11.21 **(Limitní podílové kritérium.)** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy. Potom platí: je-li* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *je řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní; je-li* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, *je řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

Poznámka 11.22 *Stejně jako v případě limitního Cauchyho kritéria i limitní podílové kritérium selže v případě, že* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *neexistuje nebo je rovna jedné.*

Příklad 11.23 *Vyšetřeme konvergenci řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$ *pro* $x > 0$. *Spočteme podíl* $(n+1)$*-ního a* n*-tého členu*

$$\frac{(1\cdot 2\cdot \ldots n\cdot (n+1))^2 x^{n+1}}{1\cdot 2\cdot \ldots 2n\cdot (2n+1)\cdot (2n+2)} \frac{1\cdot 2\cdot \ldots 2n}{(1\cdot 2\cdot \ldots n)^2 x^n}$$
$$= \frac{(n+1)^2 x}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{x(n+1)}{4(n+1/2)}.$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{x(n+1)}{4(n+1/2)} = \frac{x}{4}$ *a tedy limitní podílové kritérium dává konvergenci pro* $0 < x < 4$, *divergenci pro* $x > 4$ *a pro* $x = 4$ *nelze rozhodnout. Ale pro* $x = 4$ *je výraz* $\frac{x(n+1)}{4(n+1/2)}$ *větší než jedna, takže z podílového kritéria plyne divergence.*

Řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, kde a_n jsou kladná čísla nazveme **alternující řadou**. Pro alternující řady platí následující jednoduché kritérium konvergence.

Věta 11.24 (Leibnizovo kritérium.) *Nechť $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1} > 0$. Potom je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konvergentní, právě když $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Pro součet s této řady platí: $a_1 - a_2 \leq s \leq a_1$.*

Důkaz. Není-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, nemůže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konvergovat (viz. nutná podmínka konvergence). Zbývá tedy dokázat, že je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konverguje. Značí-li s_n n-tý částečný součet řady, potom vzhledem k tomu, že $a_{2n} \geq a_{2n+1} \geq a_{2n+2}$ dostaneme

$$s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq s_{2n} \geq \ldots \geq s_2 = a_1 - a_2,$$

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leq s_{2n-1} \leq \ldots \leq s_1 = a_1.$$

Posloupnost $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající a shora omezená, protože

$$s_{2n+2} = s_{2n+1} - a_{2n+2} \leq s_{2n+1} \leq s_1 = a_1,$$

existuje tedy vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = s$. Navíc

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n} = s + 0 = s.$$

Podle definice limity ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existují $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n > n_1$ je $|s_{2n} - s| < \varepsilon$ a pro $n > n_2$ je $|s_{2n-1} - s| < \varepsilon$. Zvolíme-li

$n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, potom přirozené číslo $m \geq n_0$ je buď liché nebo sudé. Každopádně v obou případech platí nerovnost $|s_m - s| < \varepsilon$ pro všechna přirozená čísla $m \geq n_0$. Tedy ke každému $\varepsilon > 0$ jsme dokázali najít n_0 tak, že pro všechna přirozená čísla $m \geq n_0$ je $|s_m - s| < \varepsilon$ a to znamená, že posloupnost částečných součtů má limitu s. Dále z předchozího plyne, že posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená shora číslem a_1 a zdola číslem $a_1 - a_2$. $\square$

Příklad 11.25 *Limita* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$*, proto alternující řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ *konverguje.*

Nakonec ještě uvedeme jedno užitečné kritérium pro posouzení konvergence nezáporné řady.

Věta 11.26 **(Integrální kritérium.)** *Nechť* $k \in \mathbb{N}$ *a funkce* f *je spojitá, nerostoucí a nezáporná na intervalu* $[k, \infty)$*. Potom je řada* $\sum\limits_{n=k}^{\infty} f(n)$ *konvergentní, právě když* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_k^n f(x)\,dx < \infty$.

Důkaz. Protože funkce f je spojitá, existuje pro každé $m \in \mathbb{N}$, $m \geq k$ Riemannův integrál $F(m) := \int_k^m f(x)\,dx$. Dále pro $k \leq l \leq m$ platí

$$F(m) = \int_k^m f(x)\,dx = \int_k^l f(x)\,dx + \int_l^m f(x)\,dx = F(l) + \int_l^m f(x)\,dx \geq F(l),$$

protože f je nezáporná. Tedy posloupnost $\{F(m)\}_{m=1}^{\infty}$ je neklesající a podle věty o limitě neklesající posloupnosti má vlastní limitu nebo nevlastní limitu

∞. Vzhledem k tomu, že funkce f je spojitá, nerostoucí a nezáporná, platí následující odhady

$$f(m+1) = (m+1-m)f(m+1) \le \int_m^{m+1} f(x)\,dx \le (m+1-m)f(m) = f(m).$$

Nyní sečteme tyto nerovnosti od k do $n \in \mathbb{N}$ a obdržíme

$$\sum_{m=k+1}^{n+1} f(m) \le \sum_{m=k}^{n} \int_m^{m+1} f(x)\,dx = \int_{m=k}^{n+1} f(x)\,dx \le \sum_{m=k}^{n} f(m).$$

nebo-li

$$\sum_{m=k}^{n+1} f(m) - f(k) \le F(n+1) \le \sum_{m=k}^{n} f(m).$$

Nakonec na tyto nerovnosti aplikujeme limitu $n \to \infty$ a dostaneme:

$$\sum_{n=k}^{\infty} f(n) - f(k) \le \lim_{n\to\infty} \int_k^n f(x)\,dx \le \sum_{n=k}^{\infty} f(n).$$

Tedy řada $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$ je konvergentní, právě když $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_k^n f(x)\,dx < \infty$. □

Příklad 11.27 *Vyšetřeme konvergenci řady* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ *pro* $\alpha > 0$.

Funkce $f(x) = x^{-\alpha}$ *je spojitá, nerostoucí a nezáporná v intervalu* $[1,\infty)$, *můžeme tedy aplikovat integrální kritérium. Pro* $\alpha \ne 1$ *dostaneme*

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n x^{-\alpha}\,dx = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{n\to\infty} (n^{1-\alpha} - 1).$$

Poslední limita je rovna $\dfrac{-1}{1-\alpha}$ *pro* $\alpha > 1$ *a pro* $0 < \alpha < 1$ *je tato limita rovna* ∞. *Pro* $\alpha = 1$ *máme*

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n x^{-1}\,dx = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ *je tedy konvergentní pro* $\alpha > 1$ *a divergentní pro* $\alpha \le 1$ *(pro* $\alpha \le 0$ *je* $\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} > 0$ *a není splněna nutná podmínka pro konvergenci řady).*

Na závěr této kapitoly se seznámíme s pojmem absolutní konvergence.

4. Absolutní konvergence

Definice 11.28 *Řekneme, že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je* **absolutně konvergentní**, *jestliže konverguje řada* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Věta 11.29 **Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.**

Důkaz. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ je řada s nezápornými členy a pro všechna n

platí $a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ je konvergentní podle věty o aritmetice nekonečných řad, potom podle srovnávacího kritéria je konvergentní i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$. Opětovným použitím věty o aritmetice nekonečných řad dostaneme konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Platí totiž

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

□

Poznámka 11.30 **Konvergentní řada nemusí být absolutně konvergentní!** *Řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *je podle příkladu 11.25 konvergentní, zatímco řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *je podle příkladu 11.11 divergentní. Tedy řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *není absolutně konvergentní.*

Cauchyho kritérium, limitní Cauchyho kritérium, podílové kritérium a limitní podílové kritérium můžeme použít i na řady s libovolnými (kladnými i zápornými) členy k posouzení jejich absolutní konvergence. Tato kritéria pak dostaneme v následujícím tvaru:

Věta 11.31 *Existuje-li číslo $q < 1$ a přirozené číslo k tak, že pro všechna $n \geq k$ je $\sqrt[n]{|a_n|} < q$, je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní. Platí-li nerovnost $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ pro nekonečně mnoho hodnot n je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.*

Věta 11.32 *Existuje-li číslo $q < 1$ a přirozené číslo k tak, že pro všechna $n \geq k$ je $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$, je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní. Platí-li nerovnost $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ pro nekonečně mnoho hodnot n je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.*

Věta 11.33 *Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ nebo $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní; je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ nebo $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.*

Poznámka 11.34 *Předchozí tři věty dovolují rozhodnout o absolutní konvergenci nebo o divergenci řady.* **Pro vyšetřování (neabsolutní) konvergence je použít nelze! Pokud vyšetřujeme funkční řadu (n-tý člen závisí například na proměnné x), potom můžeme postupovat tak,**

že nejprve podle jedné z předchozích vět posoudíme absolutní konvergenci řady. Obvykle takto najdeme otevřený interval absolutní konvergence (a tedy i konvergence) a následně zvlášť posoudíme konvergenci v krajních bodech. *Ukážeme si tento postup na následujícím příkladu.*

Příklad 11.35 *Vyšetřeme konvergenci řady funkční řady* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Pro $x = 0$ *řada absolutně konverguje. Pro* $x \neq 0$ *spočteme limitu absolutní hodnoty podílu* $(n+1)$*-ního a* n*-tého členu (aplikujeme podílové kritérium pro absolutní konvergenci):*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1} n}{(n+1)x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)} |x| = |x|.$$

Potom pro $|x| < 1$ *je řada* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ *absolutně konvergentní a pro* $|x| > 1$ *je řada divergentní. Pro* $x = 1$ *dostaneme divergentní řadu* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *a pro* $x = -1$ *dostaneme (neabsolutně) konvergentní řadu* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Kapitola 12

Funkce více proměnných

1. Úvod do metrických prostorů

Pokud nebude řečeno jinak n bude v této i v dalších kapitolách označovat přirozené číslo větší než jedna. Prostorem $\mathbb{R}^n$ budeme rozumět množinu uspořádaných n-tic reálných čísel a budeme je značit

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n], \qquad \text{kde } x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Operace násobení reálným číslem $a \in \mathbb{R}$ a sčítání dvou prvků $x, y \in \mathbb{R}^n$ definujeme (po složkách) následovně:

$$a \cdot x = a \cdot [x_1, x_2, \dots, x_n] := [ax_1, ax_2, \dots, ax_n],$$

$$x + y = [x_1, x_2, \dots, x_n] + [y_1, y_2, \dots, y_n] := [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n].$$

Abychom mohli vyšetřovat spojitost a limity funkcí více proměnných potřebujeme v tomto prostoru vhodně měřit vzdálenost dvou bodů. Z toho důvodu zavedeme pojem metriky, který je zobecněním pojmu vzdálenost.

Definice 12.1 *Nechť M je množina. Funkci $\varrho : M \times M \to \mathbb{R}$ nazveme* **metrikou**, *jestliže splňuje následující podmínky:*

- $\forall x \in M$ *je* $\varrho(x,x) = 0$,
- $\forall x, y \in M, x \neq y$ *je* $\varrho(x,y) = \varrho(y,x) > 0$,
- $\forall x, y, z \in M,$ *platí* $\varrho(x,y) \leq \varrho(x,z) + \varrho(z,y)$.

Dvojici (M, ϱ) nazýváme **metrickým prostorem**.

Na každé množině lze zavést několik různých metrik. Např. v $\mathbb{R}^n$ je nejužívanější metrikou **euklidovská metrika**

$$\varrho_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sqrt{(\mathbf{x_1}-\mathbf{y_1})^2 + (\mathbf{x_2}-\mathbf{y_2})^2 + \ldots + (\mathbf{x_n}-\mathbf{y_n})^2}$$

a metriky

$$\varrho_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} |\mathbf{x_i}-\mathbf{y_i}|,$$

$$\varrho_{\mathbf{max}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \max\left(|\mathbf{x_1}-\mathbf{y_1}|, |\mathbf{x_2}-\mathbf{y_2}|, \ldots, |\mathbf{x_n}-\mathbf{y_n}|\right).$$

Pro $n = 1$ všechny tři metriky splývají.

Jestliže pro libovolné dva body z množiny M platí, že tyto body jsou „blízko“ sebe v jedné i v druhé metrice, budeme říkat, že tyto metriky jsou navzájem ekvivalentní.

Definice 12.2 *Nechť M je množina, τ, ω metriky definované na množině M. Existují-li kladná reálná čísla a, b taková, že $\forall x, y \in M$ platí nerovnosti*

$$a\tau(x,y) \leq \omega(x,y) \leq b\tau(x,y),$$

nazveme metriky τ a ω **ekvivalentními**.

Příklad 12.3 *Dokážeme například, že metriky ϱ_1 a ϱ_{max} jsou ekvivalentní. Platí totiž následující nerovnosti:*

$$\varrho_{max}(x,y) = \max\left(|x_1-y_1|, |x_2-y_2|, \dots, |x_n-y_n|\right) \le \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \varrho_1(x,y)$$
$$\le n \max\left(|x_1-y_1|, |x_2-y_2|, \dots, |x_n-y_n|\right) = n\varrho_{max}(x,y).$$

Poznámka 12.4 *V lineární algebře se místo pojmu metrika používá pojem* **norma** *a platí:*

$$||\mathbf{x}-\mathbf{y}||_2 = \varrho_2(\mathbf{x},\mathbf{y}), \quad ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||_1 = \varrho_1(\mathbf{x},\mathbf{y}), \quad ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||_{\max} = \varrho_{\max}(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Je-li M množina a ϱ metrika, $a \in M$, $A \subset M$, $B \subset M$. Zavedeme dále následující značení:

$$\varrho(a,A) := \inf_{x\in A} \varrho(a,x), \qquad d(a,A) := \sup_{x\in A} \varrho(a,x)$$

pro **dolní a horní vzdálenost bodu a od množiny A**.

$$\varrho(A,B) := \inf_{x\in A, y\in B} \varrho(x,y), \qquad d(A,B) := \sup_{x\in A, y\in B} \varrho(x,y)$$

pro **dolní a horní vzdálenost množin A, B**. Horní vzdálenost se nejčastěji používá pro případ $A = B$, potom

$$d(A,A) = \sup_{x,y\in A} \varrho(x,y)$$

je **průměr množiny A**. Je-li $d(A,A) < \infty$, potom říkáme, že množina A je **omezená**.

2. Otevřené a uzavřené množiny

Definice 12.5 *Nechť M je množina, ϱ metrika na množině M, $A \subset M$. Množinu všech bodů $x \in M$, které mají vzdálenost $\varrho(x, A)$ rovnou nule, nazveme* **uzávěrem množiny** *A v množině M a označíme ji $\overline{A}$ nebo přesněji $\overline{A}^M$.*

Poznámka 12.6 *Uvedeme několik zřejmých vlastností uzávěru množiny. Při použití stejného značení jako v předchozí definici obdržíme:*

$$A \subset \overline{A}^M \subset \overline{M}^M = M, \qquad \overline{\{a\}}^M = \{a\}.$$

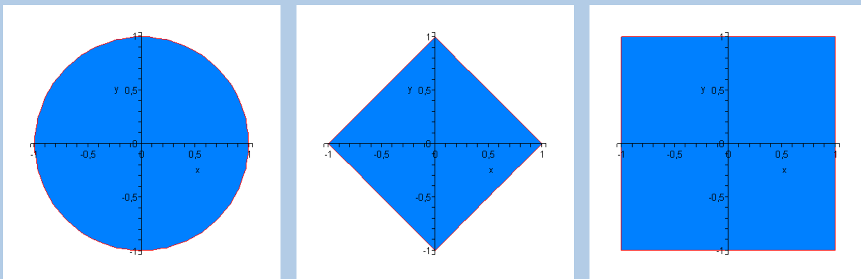
Definice 12.7 *Nechť M je množina, ϱ metrika na množině M, $A \subset M$.* **Množinu A nazveme uzavřenou** *v množině M, jestliže $\overline{A}^M = A$.*

Definice 12.8 *Nechť M je množina, ϱ metrika na množině M, $m \in M$. Pro každé $\varepsilon > 0$ nazveme množinu všech bodů $x \in M$, pro která je $\varrho(x, m) < \varepsilon$* **(epsilonovým) okolím bodu** *m a budeme je značit $U_\varepsilon(m)$. Množinu všech bodů $x \in M$, pro která je $0 < \varrho(x, m) < \varepsilon$ nazýváme* **prstencovým okolím bodu m** *a budeme je značit $P_\varepsilon(m)$.*

Poznámka 12.9 *$\forall \varepsilon > 0$ budeme epsilonovým okolím nevlastního bodu $[\infty, \infty]$ rozumět množinu $\left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right) \times \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$. Analogicky definujeme i okolí ostatních nevlastních bodů v $\mathbb{R}^2$ a rovněž okolí nevlastních bodů v prostorech vyšších dimenzí. Množinu $\mathbb{R}^n$ spolu s nevlastními body budeme označovat $(\mathbb{R}^*)^n$.*

Příklad 12.10 *Ukážeme si, jak vypadají jednotková okolí bodu $[0,0]$ v jednotlivých metrikách v prostoru $\mathbb{R}^2$. Postupně dostaneme*

- *pro* $\varrho_2([x,y],[0,0]) \le 1: \ \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} \le 1,$
- *pro* $\varrho_1([x,y],[0,0]) \le 1: \ |x-0|+|y-0| \le 1,$
- *pro* $\varrho_{max}([x,y],[0,0]) \le 1: \ |x-0| \le 1$ *a zároveň* $|y-0| \le 1.$



$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} \le 1$ $\quad |x-0|+|y-0| \le 1$ $\quad |x-0| \le 1$ a $|y-0| \le 1$

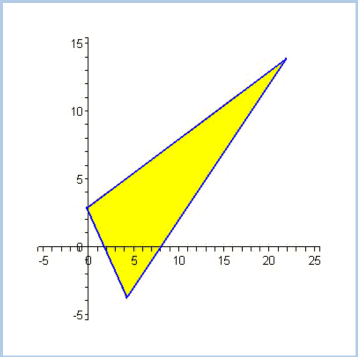
Obrázek 12.1: Okolí bodu $[0,0]$ v různých metrikách.

Definice 12.11 *Nechť M je množina, ϱ metrika na množině M, $A \subset M$. Říkáme, že* **bod a je vnitřním bodem množiny A**, *jestliže existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $U_\varepsilon(a) \subset A$. Množinu všech vnitřních bodů množiny $A \subset M$ nazýváme* **vnitřkem množiny A** *a značíme ji A^o.*

Definice 12.12 *Nechť M je množina, ϱ metrika na množině M, $A \subset M$.* **Množinu A nazveme otevřenou**, *jestliže $A = A^o$.*

Definice 12.13 *Nechť M je množina, ϱ metrika na množině M, $A \subset M$. Množinu $H(A)$ nazveme* **hranicí množiny** *A, jestliže $H(A) = \overline{A} \cap \overline{M - A}$.*

Příklad 12.14 *Nakonec si některé výše definované pojmy ukážeme názorně. Definujme množinu $M = \{[x, y] :\ 2y - x < 6,\ 3x + 2y > 5,\ x - y < 8\}$. Potom na obrázku máme $M = M^o$ a $H(M)$, takže množina M je otevřená. Dále je $\overline{M} = M^o \cup H(M)$.*



Obrázek 12.2: Vnitřek a hranice množiny M.

Definujme-li množinu $N = \{[x, y] :\ 2y - x \leq 6,\ 3x + 2y \geq 5,\ x - y \leq 8\}$. Potom $\overline{N} = N = \overline{M} = M^o \cup H(M)$ a množina N je tedy uzavřená.

Definujme-li množinu $O = \{[x, y] :\ 2y - x < 6,\ 3x + 2y \geq 5,\ x - y \leq 8\}$. Potom $\overline{O} \supset O$ a $O^o \subset O$, takže množina O není ani otevřená ani uzavřená.

Množiny M, N, O jsou omezené, protože jejich průměr je menší než 100 (množiny leží uvnitř kružnice se středem v počátku a poloměrem 50).

3. Pojem funkce více proměnných

Reálná funkce jedné proměnné je zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Zobecněním tohoto pojmu je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, které se nazývá funkce více proměnných. V této části se naučíme určovat definiční obor funkcí více proměnných. Začneme následující neformální definicí.

Definice 12.15 *Říkáme, že na neprázdné množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je definována* **(reálná) funkce více proměnných***, je-li dán předpis, který každému $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \in M$ přiřazuje právě jedno reálné číslo y* **(závisle proměnnou nebo také funkční hodnotu)***. Značíme ji $y = f(x)$.* **Nezávisle proměnnou** *x nazýváme také* **argumentem funkce***. Množinu M nazýváme* **definičním oborem funkce (značíme $D(f)$)***. Množinu $R(f)$ všech čísel $f(x)$ takových, že $x \in M$, nazýváme* **oborem hodnot** *dané funkce.*

Funkce více proměnných je tedy určena jednoznačně svým definičním oborem $D(f)$ a předpisem funkce f. Pokud je předpis dán vzorcem a není zadán definiční obor funkce, pak definičním oborem budeme rozumět množinu $\forall x \in \mathbb{R}^n$, pro něž má tento vzorec smysl. Pro funkci dvou proměnných je grafem funkce množina bodů v třírozměrném prostoru (obvykle plocha).

Definice 12.16 **Grafem funkce** *f n proměnných definované na množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$ rozumíme množinu*

$$\{[x, y] = [x_1, x_2, \ldots, x_n, y] \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in M, y = f(x)\}.$$

Pro získání názorné představy o tvaru a průběhu této plochy, nám mohou pomoci řezy rovinami rovnoběžnými s rovinou tvořenou osami x a y.

Definice 12.17 *Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$ a funkce f je funkce dvou proměnných definovaná na M. Množinu*

$$f_c := \{[x, y] \in M : f(x, y) = c\}$$

nazýváme **vrstevnicí funkce f na úrovni c.**

Pojem vrstevnice bychom mohli zavést i pro funkce tří a více proměnných, ale v těchto případech bychom ztratili názorný „geografický“ význam. Chápeme-li graf funkce dvou proměnných jako reliéf krajiny, pak vrstevnice funkce na úrovni c je množina všech bodů s nadmořskou výškou rovnou c. Tedy pojem vrstevnice je totožný s geografickým významem tohoto slova. Nyní se podíváme, jak se určuje definiční obor.

Příklad 12.18 *Určeme definiční obor funkce*

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{(-x^2 - y^2 + 6x)(x^2 + y^2 - 6y)}}{2}.$$

Výraz pod odmocninou musí být nezáporný a jiné omezení nemáme. Tedy

$$(-x^2 - y^2 + 6x)(x^2 + y^2 - 6y) \geq 0.$$

To nastane právě tehdy, když buď

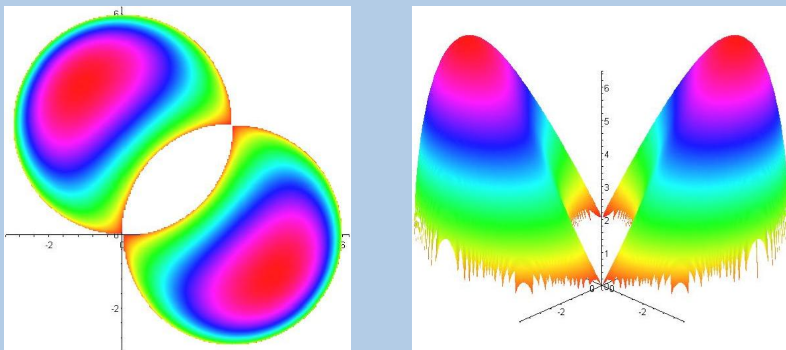
$$-x^2 - y^2 + 6x \geq 0 \qquad a \qquad x^2 + y^2 - 6y \geq 0. \tag{12.1}$$

nebo

$$-x^2 - y^2 + 6x \leq 0 \qquad a \qquad x^2 + y^2 - 6y \leq 0. \tag{12.2}$$

Rovnice $-x^2 - y^2 + 6x = 0$ nebo-li $(x - 3)^2 + y^2 = 9$ je rovnice kružnice se středem v bodě $[3, 0]$ a poloměrem 3. Rovnice $x^2 + y^2 - 6y = 0$ nebo-li $x^2 + (y - 3)^2 = 9$ je rovnice kružnice se středem v bodě $[0, 3]$ a poloměrem 3.

Body $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ vyhovující podmínkám (12.1) musí ležet uvnitř první kružnice a zároveň vně druhé včetně hranice této oblasti a body $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ vyhovující podmínkám (12.2) musí ležet uvnitř druhé kružnice a zároveň vně první včetně hranice této oblasti. Definiční obor tedy tvoří množina všech bodů $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, které leží uvnitř právě jedné kružnice nebo na hranici této oblasti. Je to uzavřená množina v $\mathbb{R}^2$. Na grafu funkce f můžeme podle změn v barevných odstínech přibližně sledovat vrstevnice funkce f (viz. obrázek 12.3).



Obrázek 12.3: Definiční obor (aneb pohled shora) a funkce f.

4. Limita funkce

V definici limity vystupují funkční hodnoty funkce v prstencovém okolí bodu (budeme mu říkat **limitní bod**). Proto je možné limitu funkce vyšetřovat pouze v bodech, v jejichž okolí je funkce definována (nejedná se tedy o tzv.

izolované body). Z toho důvodu, budeme ve všech kapitolách, ve kterých se vyskytne limita funkce, předpokládat, že libovolné prstencové okolí limitního bodu obsahuje alespoň jeden bod definičního oboru funkce. Začneme univerzální definicí limity platnou pro funkce jedné či více proměnných, pro vlastní či nevlastní limitu a rovněž pro vlastní i nevlastní limitní body.

Definice 12.19 *Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $c \in (\mathbb{R}^*)^n$* **limitu** *$A \in \mathbb{R}^*$, jestliže $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že pro každý bod $x \in P_\delta(c) \cap D(f)$ platí $f(x) \in U_\varepsilon(A)$. Píšeme $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$. Limita se nazývá* **vlastní,** *jestliže $A \in \mathbb{R}$, v opačném případě se nazývá* **nevlastní.**

Aby byla lépe vidět souvislost pojmu limity pro funkce jedné proměnné a předchozí obecnou definicí, přeformulujeme tuto definici pro vlastní limitu funkce dvou proměnných v metrice ϱ_{max}.

Definice 12.20 *Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $c = [c_1, c_2]$* **(vlastní) limitu** *$A \in \mathbb{R}$, jestliže $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že nerovnost*

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

je splněna pro všechny body $x = [x_1, x_2]$, pro něž je $0 < |x_1 - c_1| < \delta$ a zároveň $0 < |x_2 - c_2| < \delta$. Existuje-li limita funkce f v bodě c, budeme ji značit symbolem $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$.

Hlavní rozdíl mezi limitou funkce jedné proměnné a limitou funkce dvou a více proměnných spočívá v „dimenzi“ okolí limitního bodu. U funkce jedné proměnné se k tomuto bodu můžeme blížit jen po jedné přímce. Stačí tedy spočítat limitu zleva a limitu zprava a pokud se rovnají, máme spočtenou limitu. Zatímco u funkce více proměnných je těchto možností nekonečně mnoho.

Můžeme se totiž k limitnímu bodu blížit po přímkách, po parabolách či jiných obecných křivkách. **Existence limity v daném bodě tedy znamená, že limita nezávisí na cestě, po které se k danému bodu blížíme.** Naopak podobně jako v jednorozměrném případě, dostaneme-li různé hodnoty limity pro různé cesty, znamená to, že limita v daném bodě nemůže existovat.

Protože definice limity funkce více proměnných pomocí je analogií definice limity funkce jedné proměnné, jsou i důkazy vět o limitách funkcí více proměnných analogické příslušným větám pro funkce jedné proměnné. Ukážeme si to pouze u věty o jednoznačnosti limity funkce. Důkazy ostatních analogických vět z tohoto důvodu provádět nebudeme. Většinu vět budeme formulovat pouze pro funkce dvou proměnných. Zobecnění pro funkce více než dvou proměnných je zřejmé.

Věta 12.21 **(O jednoznačnosti limity funkce.)** *Funkce* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $c \in \mathbb{R}^2$ *nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Dokážeme sporem. Předpokládejme, že funkce f má dvě různé limity $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Zvolme $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$. A protože číslo a je limitou funkce f, existuje $\delta_1 > 0$ tak, že pro $\forall x = [x_1, x_2] : 0 < |x_1 - c_1| < \delta_1,\ 0 < |x_2 - c_2| < \delta_1$ platí

$$|f(x) - a| < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon. \tag{12.3}$$

Zároveň i číslo b je limitou funkce f a tedy podle definice limity $\exists \delta_2 > 0$ tak, že pro $\forall x = [x_1, x_2] : 0 < |x_1 - c_1| < \delta_2,\ 0 < |x_2 - c_2| < \delta_2$ platí

$$|f(x) - b| < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon. \tag{12.4}$$

Zvolme dále $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, potom pro $\forall x = [x_1, x_2] : 0 < |x_1 - c_1| < \delta,\ 0 <$

$|x_2 - c_2| < \delta$ platí (12.3) i (12.4), takže

$$b - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad b - \varepsilon < a + \varepsilon,$$

tedy $b - a < 2\varepsilon$, což je spor s předpokladem $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$. $\square$

Příklad 12.22 *Spočtěme* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{2x+2y}{x-y-2}$.
Zavedeme substituci $y = k(x-1) - 1$, $k \in \mathbb{R}$ *(rovnice přímek procházejících bodem* $[1,-1]$*). Blížíme se tedy k bodu* $[1,-1]$ *po přímkách s parametrem* k*.*

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x + 2(k(x-1)-1)}{x - (k(x-1)-1) - 2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(2+2k)}{(x-1)(1-k)} = \frac{2+2k}{1-k}.$$

Výsledek závisí na parametru k *(na cestě) a tedy zadaná limita neexistuje.*

Následující dvě věty jsou analogií příslušných vět pro funkce jedné proměnné. Třetí věta je nutná podmínka existence limity, která v některých případech umožní dokázat neexistenci limity výpočtem dvou jednodušších limit. Její důkaz je důsledkem věty o jednoznačnosti limity.

Věta 12.23 **(O aritmetice limit funkcí.)** *Nechť* $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^2$ *a dále nechť* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to c} g(x) = B$ *a* $A, B \in \mathbb{R}$*. Potom platí*

$$\lim_{x\to c} |f(x)| = |A|, \qquad \lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = A + B,$$

$$\lim_{x\to c} (f(x) - g(x)) = A - B, \qquad \lim_{x\to c} (f(x)g(x)) = AB.$$

Je-li navíc $B \neq 0$*, pak je* $$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Věta 12.24 (O limitě sevřené funkce.) *Nechť funkce* $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^2$, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} h(x) = A \in \mathbb{R}$, *dále nechť existuje kladné číslo* δ *tak, že pro všechna* $x \in P_\delta(c)$ *platí* $f(x) \le g(x) \le h(x)$. *Potom platí* $\lim\limits_{x\to c} g(x) = A$.

Věta 12.25 (Nutná podmínka existence limity.) *Existují-li limity* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y_0)$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0, y)$ *a jsou různé, pak* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ *neexistuje.*

Příklad 12.26 *Spočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Zkusíme využít předchozí větu: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1, \qquad \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0 - y^2}{0 + y^2} = -1.$

Limity jsou různé a tedy zadaná limita neexistuje.

Poznámka 12.27 **V případě, že se limity $\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0, y)$ a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y_0)$ rovnají, tak limita $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ se buď rovná stejnému číslu nebo neexistuje!**

Poznámka 12.28 *Většinu dříve vyslovených vět týkajících se vlastních limit funkcí dvou proměnných lze stejným způsobem jako u limit funkcí jedné proměnné rozšířit i na nevlastní limity. Bez omezení lze pro nevlastní limity vyslovit větu o jednoznačnosti limity funkce, nutnou podmínku existence limity a větu o limitě sevřené funkce. Pouze v případě věty o aritmetice limit je třeba doplnit předpoklad* „**pokud pravá strana existuje**“*, abychom se vyvarovali případů, kdy některá z operací s nekonečny není definována.*

Poznámka 12.29 *Počítání limit funkcí dvou a více proměnných je ve většině případů obtížnější než v případě funkcí jedné proměnné, protože k počítání limit typu* $\frac{0}{0}$ *a* $\frac{\infty}{\infty}$ *nemáme k dispozici žádnou analogii l'Hospitalova pravidla. Při výpočtu limit tohoto typu využíváme různé úpravy výrazů. Nejčastěji používané úpravy jsou ukázány v následujících příkladech.*

5. Technika počítání limit

Příklad 12.30

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x^2+y^2+1} = \frac{0+0}{0^2+0^2+1} = 0.$$

V tomto případě můžeme souřadnice limitního bodu dosadit do příslušného výrazu (aniž bychom dostali neurčitý výraz) a tedy hodnota limity zadané funkce je rovna funkční hodnotě v tomto bodě.

Příklad 12.31 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$.

Limitu nelze počítat přímo podle věty o aritmetice limit funkcí, protože bychom dostali neurčitý výraz $0/0$*. Ale protože oba mnohočleny mají společného dělitele* $x+y$*, můžeme jej vykrátit:*

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x^3+y^3}{x^2-y^2} = \lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x+y)(x-y)} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x^2-xy+y^2}{x-y} = \frac{(-1)^2-(-1)1+1^2}{-1-1} = -\frac{3}{2}.$$

Příklad 12.32 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$.

Stejně jako v předchozím příkladu nelze přímo použít větu o aritmetice limit funkcí, protože bychom opět dostali neurčitý výraz $0/0$. Ale v tomto případě můžeme naopak zlomek rozšířit výrazem $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ a následně zkrátíme $x-y$.

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$$

Příklad 12.33 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{(x+y)^3}$.

Jedná se o limitu typu $1/0$ a vidíme, že funkce $(x+y)^3$ nabývá na libovolném prstencovém okolí limitního bodu kladné i záporné hodnoty. Zkusíme se tedy blížit po křivkách $y=kx^2-x$, $k\neq 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{(x+kx^2-x)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{k^3x^6} = \frac{\infty}{\operatorname{sgn} k}.$$

Výsledek závisí na parametru k (na cestě) a tedy zadaná limita neexistuje.

Příklad 12.34 *Vypočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-1}{x^2+y^2}$.

Opět se jedná o limitu typu $-1/0$, ale funkce x^2+y^2 nabývá v libovolném prstencovém okolí limitního bodu pouze kladné hodnoty a tedy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-1}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x-1) \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = -1\cdot\infty = -\infty.$$

Zkusíme ještě ověřit, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{x^2+y^2} = \infty$. *Ke každému* $K > 0$ *chceme najít* $\delta > 0$ *tak, aby nerovnost* $\dfrac{1}{x^2+y^2} \geq K$ *platila* $\forall [x, y] \in P_\delta([0, 0])$. *Pro* $0 < |x - 0| < \delta$ *a* $0 < |y - 0| < \delta$ *dostaneme*

$$\frac{1}{x^2+y^2} > \frac{1}{2\delta^2} \qquad \text{a můžeme volit} \qquad \delta = \frac{1}{\sqrt{2K}}.$$

Funkce $\dfrac{1}{x^2+y^2}$ *tedy není shora omezená a* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{x^2+y^2} = \infty$.

Příklad 12.35 *Spočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{\sin(x+y)}{x}$.
Nejprve si uvědomme, že pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$ *platí nerovnosti:*

$$\frac{-1}{|x|} \leq \frac{\sin(x+y)}{x} \leq \frac{1}{|x|}.$$

Dále $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{-1}{|x|} = \lim\limits_{z\to 0^+} -|z| = 0$ *a* $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{1}{|x|} = \lim\limits_{z\to 0^+} |z| = 0$. *Tedy podle věty o limitě sevřené funkce i* $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{\sin(x+y)}{x} = 0$.

Řekli jsme si, že existence limity v daném bodě znamená, že limita nezávisí na cestě, po které se k danému bodu blížíme. Naopak, dostaneme-li různé hodnoty limity pro různé cesty, znamená to, že limita v daném bodě neexistuje. Jednou z možností, kterou můžeme využít při počítání limity funkce dvou proměnných ve vlastním bodě $[x_0, y_0]$, je transformace do **polárních**

souřadnic:

$$x - x_0 = r\cos\varphi, \qquad y - y_0 = r\sin\varphi, \qquad r \geq 0.$$

Jestliže následně limita závisí na úhlu φ, znamená to, že závisí na cestě, po které se k danému bodu blížíme, a proto funkce nemá v tomto bodě limitu.

Příklad 12.36 *Spočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.
Transformací do polárních souřadnic dostáváme

$$\lim_{r\to 0+} \frac{2r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \lim_{r\to 0+} \frac{r^2\sin(2\varphi)}{r^2} = \sin(2\varphi).$$

Protože výsledek závisí na úhlu φ, výše uvedená limita neexistuje.

Ještě připomeňme, že **pokud limita** po transformaci do polárních souřadnic **vyjde nezávisle na úhlu φ, je to pouze nutná podmínka pro existenci limity**, protože pokud bychom se k limitnímu bodu blížili např. po parabolách, mohli bychom obdržet odlišný výsledek (viz. následující příklad).

Příklad 12.37 *Spočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.
Transformací do polárních souřadnic dostáváme

$$\lim_{r\to 0+} \frac{r^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^2(r^2\cos^4\varphi + \sin^2\varphi)} = \lim_{r\to 0+} \frac{r\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^2\cos^4\varphi + \sin^2\varphi} = 0,$$

ale zadaná limita neexistuje, protože když se budeme blížit po obecné parabole $y = kx^2$, dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2kx^2}{x^4+k^2x^4} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Výsledek závisí na konstantě k a tedy limita neexistuje.

Na závěr této části uvedeme ještě jednu užitečnou větu, která v případech, kdy provádíme transformaci do polárních souřadnic, umožňuje rozhodnout o existenci limity.

Věta 12.38 *Funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ limitu rovnu A, jestliže existuje nezáporná funkce $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ taková, že $\lim\limits_{r\to 0^+} g(r) = 0$ a*

$$|f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) - A| < g(r)$$

pro každé $\varphi \in [0, 2\pi]$ a dostatečně malá $r > 0$.

Důkaz. Protože $\lim\limits_{r\to 0^+} g(r) = 0$, existuje ke každému $\varepsilon > 0$ $\delta > 0$ tak, že pro $0 < r < \delta$ je $|g(r)| = g(r) < \varepsilon$. Následně

$$|f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) - A| < g(r) < \varepsilon$$

a tedy $\forall [x, y] \in P_\delta([x_0, y_0])$ je $|f(x, y) - A| < \varepsilon$, což je definice limity. $\square$

Příklad 12.39 *Spočtěme* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^2 + (y-1)^2 y}{x^2 + (y-1)^2}$.
Transformací do polárních souřadnic: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi + 1$ dostáváme

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi(r\sin\varphi + 1)}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \lim_{r\to 0^+} \frac{\cos^2\varphi + r\sin^3\varphi + \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} =$$

$$\lim_{r\to 0^+} (r\sin^3\varphi + 1) = 1.$$

Dále platí:

$$|(r\sin^3\varphi + 1) - 1| = |r\sin^3\varphi| \le r \qquad a\ navíc \qquad \lim_{r\to 0^+} r = 0.$$

Můžeme tedy aplikovat předchozí větu pro $A = 1$ a $g(r) = r$ a zadaná limita je rovna 1.

Poznámka 12.40 *Podobně jako při výpočtu limity funkce dvou proměnných používáme transformaci do polárních souřadnic, můžeme při výpočtu limity funkce tří proměnných využít transformaci do sférických souřadnic:*

$$x - x_0 = r\cos\varphi\sin\psi, \qquad y - y_0 = r\sin\varphi\sin\psi, \qquad z - z_0 = r\cos\psi.$$

6. Spojitost

Definice 12.41 *Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je v bodě $c \in \mathbb{R}^n$* **spojitá**, *jestliže $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že pro každý bod $x \in U_\delta(c) \cap D(f)$ platí $f(x) \in U_\varepsilon(f(c))$.*

Opět jako v případě definice limity přeformulujeme předchozí obecnou definici pro funkce dvou proměnných v metrice ϱ_{max}.

Definice 12.42 *Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je v bodě $c = [c_1, c_2]$* **spojitá**, *jestliže $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že nerovnost*

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

je splněna $\forall x = [x_1, x_2]$, pro něž je $|x_1 - c_1| < \delta$ a $|x_2 - c_2| < \delta$.

Protože definice spojitosti funkce více proměnných je analogií definice spojitosti funkce jedné proměnné, jsou i důkazy vět o spojitých funkcích více proměnných analogické příslušným větám pro funkce jedné proměnné. Z toho důvodu důkazy těchto vět nebudeme provádět.

Věta 12.43 **(O limitě spojité funkce.)** *Funkce f je v bodě $c = [c_1, c_2]$ spojitá tehdy a jen tehdy, je-li*

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

Věta 12.44 (O spojitosti absolutní hodnoty, součtu, rozdílu, součinu a podílu.) *Předpokládejme, že funkce* f, g *jsou spojité v bodě* $c = [c_1, c_2]$. *Potom také funkce* $|f|$, $f + g$, $f - g$, fg *jsou spojité v bodě* c. *Je-li navíc* $g(c) \neq 0$, *pak je v bodě* c *spojitá i funkce* $\dfrac{f}{g}$.

Věta 12.45 (O spojitosti složené funkce.) *Předpokládejme, že funkce* f, g *jsou spojité v bodě* $c = [c_1, c_2]$ *a funkce* h *je spojitá v bodě* $[f(c), g(c)]$. *Potom i složená funkce* $h(f(x, y), g(x, y))$ *je spojitá v bodě* c.

Příklad 12.46 *Definujme funkci* g *a zkoumejme její spojitost v bodě* $[0, 0]$.

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^4} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

Použijeme větu o limitě spojité funkce, ale nejprve se podíváme, jakou dostaneme limitu, když se budeme blížit k limitnímu bodu po přímce $y = kx$

$$\lim_{x \to 0} \frac{kx^4}{x^4 + k^4 x^4} = \frac{k}{1 + k^4}.$$

Limita zadané funkce v bodě $[0, 0]$ *neexistuje, protože její hodnota závisí na směrnici přímky. Funkce* g *tedy není spojitá v bodě* $[0, 0]$.

Příklad 12.47 *Najděte body, v nichž není funkce* $\dfrac{x^3 + xy + y^3}{x^2 + y^2 - 1}$ *spojitá.*

Funkce x^3, x, y^3, y, x^2, y^2, *a* 1 *jsou spojité v celé rovině a podle věty o spojitosti součtu, rozdílu a součinu jsou spojité i funkce* $x^3 + xy + y^3$ *a* $x^2 + y^2 - 1$.

Nakonec podle věty o spojitosti podílu je podíl dvou spojitých funkcí spojitá funkce, právě když je jmenovatel různý od nuly. Jmenovatel je roven nule, když $x^2 + y^2 = 1$. Body, v nichž funkce není spojitá tvoří tedy kružnici se středem v počátku a s poloměrem 1.

Abychom mohli dokázat analogii obecných vět o spojitých funkcích jedné proměnné, budeme nejprve potřebovat dvě pomocné věty o limitách posloupností a větu o spojitosti metriky.

Věta 12.48 (O spojitosti metriky.) *Nechť M je množina a $\varrho : M \times M \to \mathbb{R}$ je metrika. ϱ je spojitá funkce.*

Důkaz. Nechť $a, b, c, d \in M$, potom z definice metriky plyne

$$\varrho(a,d) \leq \varrho(a,b) + \varrho(b,d) \leq \varrho(a,b) + \varrho(b,c) + \varrho(c,d),$$

nebo-li

$$\varrho(a,d) - \varrho(b,c) \leq \varrho(a,b) + \varrho(c,d).$$

Záměnou a s b a c s d dostaneme

$$\varrho(b,c) - \varrho(a,d) \leq \varrho(b,a) + \varrho(d,c).$$

Z posledních dvou nerovností plyne

$$|\varrho(a,d) - \varrho(b,c)| \leq \varrho(a,b) + \varrho(c,d). \tag{12.5}$$

K dokončení důkazu stačí, dokážeme-li, že limita je rovna funkční hodnotě. Vezmeme tedy libovolně $x, y \in M$ a dvě posloupnosti z M tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ a $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Potom využitím nerovnosti (12.5) dostaneme

$$|\varrho(x_n, y_m) - \varrho(x,y)| \leq \varrho(x_n, x) + \varrho(y, y_m).$$

Protože $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ a $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, tak ke každému $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existují n_0 a m_0 tak, že pro všechna $n > n_0$ a všechna $m > m_0$ platí: $\varrho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ a $\varrho(y, y_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ a tedy $|\varrho(x_n, y_m) - \varrho(x, y)| \le \varepsilon$. □

Věta 12.49 **(O limitě vybrané posloupnosti $\mathbb{R}$.)** *Z každé omezené posloupnosti reálných čísel lze vybrat posloupnost, která má vlastní limitu.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená. Existují tedy konečná čísla $A, B \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $A \le a_n \le B$.

Nyní použijeme metodu půlení intervalu. Položíme $C := \frac{A+B}{2}$, protože posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nekonečná, musí alespoň jeden z intervalů $[A, C]$ nebo $[C, B]$ obsahovat nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Definuji $[A_1, B_1] := [A, C]$, obsahuje-li interval $[A, C]$ nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a v případě, že interval $[C, B]$ obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, položíme $[A_1, B_1] := [C, B]$.

Dále zvolíme $C_1 := \frac{A_1 + B_1}{2}$ a opět definuji $[A_2, B_2] := [A_1, C_1]$, obsahuje-li interval $[A_1, C_1]$ nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo v případě, že naopak interval $[C_1, B_1]$ obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, zvolíme $[A_2, B_2] := [C_1, B_1]$. Takto pokračujeme dál a dostaneme posloupnost intervalů $[A_i, B_i]$ s těmito vlastnostmi:

1. $A \le A_1 \le A_2 \le \ldots \le B_2 \le B_1 \le B$,
2. $B_n - A_n = \frac{A_{n-1} + B_{n-1}}{2} = \frac{A+B}{2^n}$,
3. $\forall i \in \mathbb{N}$ interval $[A_i, B_i]$ obsahuje nekonečně mnoho členů $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Protože posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní a omezená, existuje podle věty 3.29 vlastní $\lim_{n\to\infty} A_n = a$. Z bodu 2. plyne $B_n = \dfrac{A+B}{2^n} + A_n$ a tedy také

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{A+B}{2^n} + A_n \right) = a.$$

Je-li tedy $\varepsilon > 0$, existuje n tak, že

$$a - \varepsilon < A_n < B_n < a + \varepsilon.$$

To znamená, že v intervalu $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ leží nekonečně mnoho členů $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Nyní zkonstruujeme vybranou posloupnost, která bude mít limitu a. Budeme postupovat takto: k_1 bude nejmenší index, pro nějž bude platit $|a_{k_1} - a| < 1$, k_2 bude nejmenší index, pro nějž bude platit $|a_{k_2} - a| < 1/2$. Takto pokračuji a konstruuji posloupnost indexů $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $|a_{k_n} - a| < 1/n$. Dostáváme tedy vybranou posloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, která má limitu a. □

Věta 12.50 **(O limitě vybrané posloupnosti v $\mathbb{R}^n$.)** *Z každé omezené posloupnosti bodů z $\mathbb{R}^n$ lze vybrat posloupnost, která má vlastní limitu v $\mathbb{R}^n$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\{[x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i]\}_{i=1}^{\infty}$ je omezená posloupnost. Podle předchozí věty z ní vybereme posloupnost tak, aby první souřadnice $\{x_1^i\}_{i=1}^{\infty}$ tvořily konvergentní posloupnost. Dostaneme tedy vybranou posloupnost $\{[x_1^{k_i}, x_2^{k_i}, \dots, x_n^{k_i}]\}_{i=1}^{\infty}$, jejíž první souřadnice mají limitu. Z této vybrané posloupnosti opět vybereme podle předchozí věty posloupnost tak, aby i druhé souřadnice tvořily konvergentní posloupnost. Po n krocích dostaneme takovou vybranou posloupnost $\{[x_1^{l_i}, x_2^{l_i}, \dots, x_n^{l_i}]\}_{i=1}^{\infty}$, že pro $j = 1, \dots, n$ existuje vlastní limita posloupnosti $\lim_{i\to\infty} x_j^{l_i}$. □

Nyní již můžeme formulovat a dokázat slíbené věty.

Věta 12.51 **(O nabývání minima a maxima.)** *Nechť funkce f je spojitá v každém bodě uzavřené a omezené množiny $M \subset \mathbb{R}^n$. Potom nabývá na M své nejmenší a největší hodnoty.*

Důkaz. Nejprve dokážeme, že množina $f(M)$ je uzavřená a omezená. Vezmeme libovolnou posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in f(M)$, potom existují $x_n \in \mathbb{R}^n$ tak, že $y_n = f(x_n)$. Protože $M \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená a omezená množina, existuje podle předchozí věty vybraná posloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x \in M$. A ze spojitosti funkce f plyne

$$\lim_{n\to\infty} y_{k_n} = \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x) \in f(M).$$

A protože předchozí úvaha platí pro každou posloupnost z $f(M)$, lze z každé posloupnosti obsažené v $f(M)$ vybrat posloupnost, která má limitu v $f(M)$. Z toho nyní odvodíme, že množina $f(M)$ je uzavřená a omezená.

Nejprve dokážeme, že $f(M)$ je uzavřená. Vezmeme-li libovolné $y \in \overline{f(M)}$, potom $\varrho(y, f(M)) = 0$ a tedy ke každému přirozenému n existuje bod $y_n \in f(M)$ tak, že $\varrho(y, y_n) < \dfrac{1}{n}$. Posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ má tedy limitu rovnu y a z první části důkazu víme, že $y \in f(M)$. A protože y bylo libovolné, platí $f(M) = \overline{f(M)}$, takže $f(M)$ je uzavřená množina.

Předpokládejme, že $f(M)$ není omezená. Zvolme bod y_0, potom ke každému přirozenému n existuje bod $y_n \in f(M)$ tak, že $\varrho(y_0, y_n) > n$. Ale z první části důkazu víme, že z posloupnosti $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ lze vybrat posloupnost $\{y_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, která má limitu $y \in f(M)$. Ze spojitosti metriky plyne

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(y_{k_n}, y_0) = \varrho(y, y_0).$$

Ale zároveň máme $\varrho(y_{k_n}, y_0) > k_n \geq n$ a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(y_{k_n}, y_0) = \infty$, což je spor s tím, že se tato limita rovná $\varrho(y, y_0)$. Takže $f(M)$ je omezená.

Podle věty o supremu existuje číslo $G = \sup_{x\in M} f(x)$ $(G \in \mathbb{R})$ tak, že $f(x) \le G$. Nyní potřebujeme dokázat, že existuje bod $x_0 \in M$ tak, že $f(x_0) = G$. Z definice suprema plyne, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ existuje bod $x_n \in M$ tak, že $f(x_n) \ge G - \dfrac{1}{n}$. Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, takže podle předchozí věty existuje vybraná posloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, která má limitu $x \in M$ (protože množina M je uzavřená). A ze spojitosti funkce f plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x) \in f(M).$$

Dále limitním přechodem z nerovnosti $f(x_{k_n}) \ge G - \dfrac{1}{k_n}$ dostaneme nerovnost $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x) \ge G$. Zároveň z definice suprema plyne $f(x) \le G$ a tedy $f(x) = G$.

Pro infimum by se postupovalo podobně. □

Definice 12.52 *Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Jestliže $A \cap \overline{B} = B \cap \overline{A} = \emptyset$, říkáme, že* **množiny A, B jsou oddělené**. *Neprázdnou množinu A nazýváme* **souvislou**, *jestliže A není sjednocením dvou neprázdných oddělených množin.*

Věta 12.53 (O nabývání hodnot.) *Nechť funkce f je spojitá na uzavřené, omezené a souvislé množině $M \subset \mathbb{R}^n$. Potom funkce f nabývá v množině M všech hodnot ležících mezi čísly $i := \inf\limits_{x\in M} f(x)$ a $s := \sup\limits_{x\in M} f(x)$ (množina $f(M)$ je souvislá). (Tedy je-li d libovolné číslo ležící mezi čísly i a s, potom existuje alespoň jeden bod $c \in M$ tak, že $f(c) = d$.)*

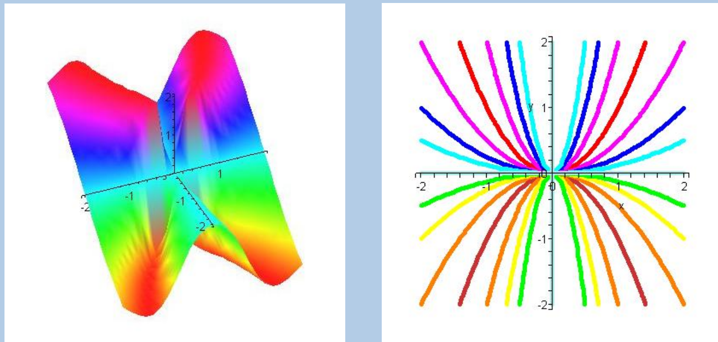
Důkaz. K libovolnému číslu d ležícímu mezi čísly i a s najdeme alespoň jeden bod $c \in M$ tak, že $f(c) = d$. Z předchozí věty víme, že existují body $y, z \in \mathbb{R}^n$ tak, že $\inf\limits_{x \in M} f(x) = f(y)$ a $\sup\limits_{x \in M} f(x) = f(z)$. Ze souvislosti množiny M plyne existence konečné posloupnosti bodů $x_1 = y, x_2, \dots, x_n = z \in M$, takové, že všechny úsečky s krajními body x_i a x_{i+1} pro $i = 1, \dots, n-1$ jsou podmnožinami množiny M. Nyní mohou nastat dvě varianty, buď existuje index j tak, že $f(x_j) = d$ nebo existuje j tak, že $f(x_j) < d$ a $f(x_{j+1}) > d$ (případně $f(x_j) > d$ a $f(x_{j+1}) < d$). Parametrická rovnice úsečky procházející body x_j a x_{j+1} je $x = x_j + (x_{j+1} - x_j)t$, kde $t \in [0, 1]$. Funkce

$$G(t) := f(x_j + (x_{j+1} - x_j)t)$$

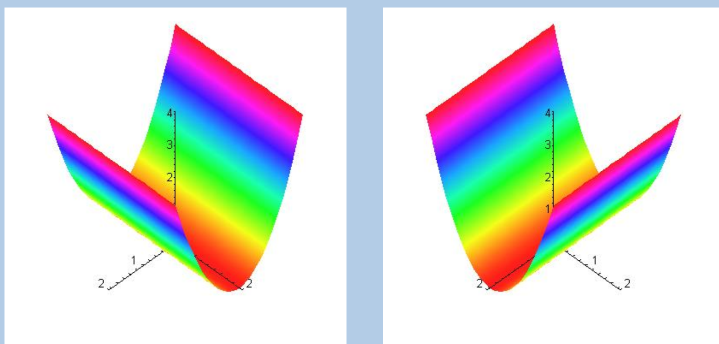
je spojitá na uzavřeném intervalu $[0, 1]$. Potom podle věty o nabývání hodnot pro funkce jedné proměnné existuje $t_0 \in (0, 1)$ tak, že $G(t_0) = d$. Zvolíme-li $c = x_j + (x_{j+1} - x_j)t_0$, dostaneme $f(c) = d$. □

7. Grafy vybraných funkcí

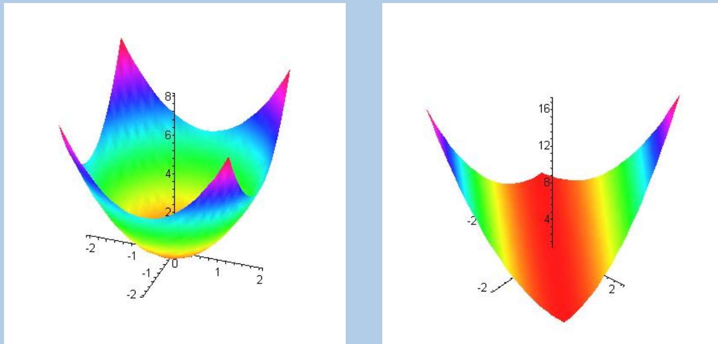
Na závěr této kapitoly si ukážeme několik grafů funkcí dvou proměnných. Barevné odstíny v grafech označují jednotlivé vrstevnice. První uvedená funkce je nespojitá v bodě $[0, 0]$, nicméně na prvním obrázku to není příliš zřetelné. Na druhém obrázku je znázorněno pouze několik vrstevnice této funkce, které nám v tomto případě poskytují přesnější informaci o grafu funkce a také ukazují na možné problémy při zobrazování nespojitých funkcí více proměnných. Vzhledem k tomu, že se vrstevnice odpovídající různým funkčním hodnotám protínají v bodě $[0, 0]$, je ihned zřejmé, že zadaná funkce není v tomto bodě spojitá viz obrázek 12.4.



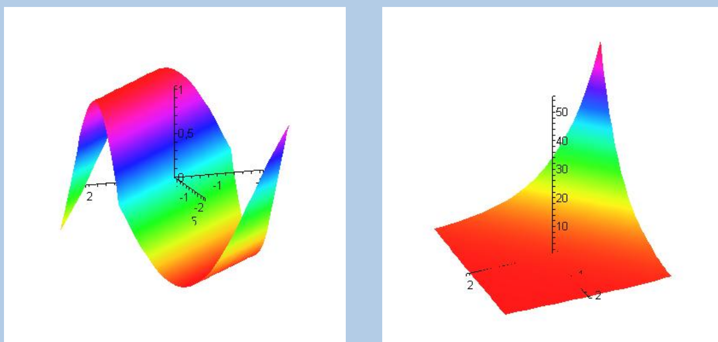
Obrázek 12.4: Graf funkce $f(x,y) = \dfrac{4x^2y}{x^4+y^2}$ a vybrané vrstevnice.



Obrázek 12.5: Grafy funkcí $f(x,y) = x^2$ a $f(x,y) = y^2$.

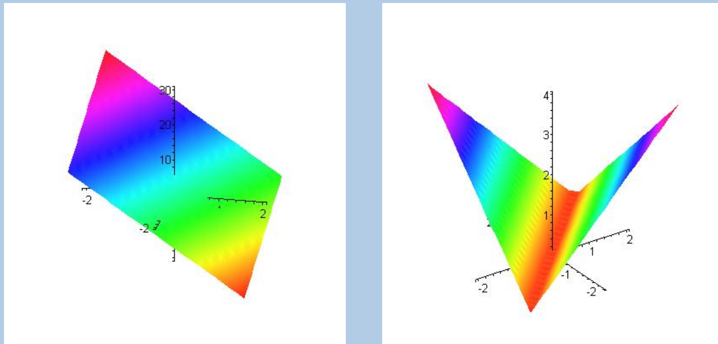


Obrázek 12.6: Grafy funkcí $f(x, y) = x^2 + y^2$ a $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 1$.

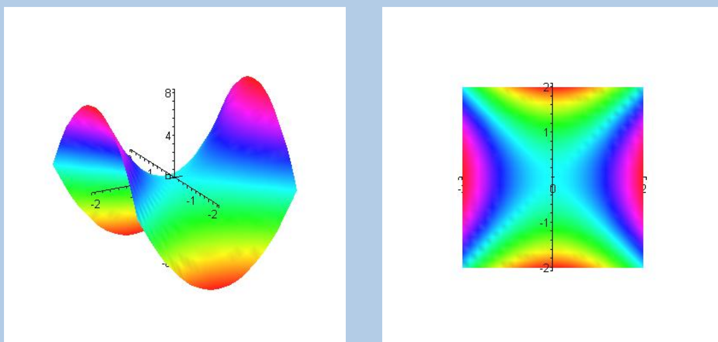


Obrázek 12.7: Grafy funkcí $f(x, y) = \sin(x + y)$ a $f(x, y) = e^{-x-y}$.

Celá obrazovka
Začátek
Strana 280
Vyhledávání
◀ ▶
Zpět Vpřed
Zavřít
Ukončit



Obrázek 12.8: Grafy funkcí $f(x, y) = -8x + 4y + 6$ a $f(x, y) = |x - y|$.



Obrázek 12.9: Graf funkce $f(x, y) = 2x^2 - 2y^2$ a její vrstevnice.

Celá obrazovka
Začátek
Strana 281
Vyhledávání
◀ ▶
Zpět Vpřed
Zavřít
Ukončit

KAPITOLA 13

Parciální derivace

1. Parciální derivace

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je definována v okolí bodu $a = [a_1, \dots, a_n]$. Zaveďme funkci jedné proměnné definovanou vztahem $g(x_j) := f(a_1, \dots, x_j, \dots, a_n)$. Existuje-li derivace $g'(a_j)$, nazýváme číslo $g'(a_j)$ parciální derivací funkce f podle j-té proměnné v bodě a.

Definice 13.1 *Nechť je funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definována v okolí bodu $x = [x_1, \dots, x_n]$. Existuje-li*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_j + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{h}$$

nazýváme ji **parciální derivací funkce f podle j-té proměnné v bodě x** *a budeme ji značit* $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, *nebo* $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n)$.

Parciální derivace může být vlastní i nevlastní, ale v tomto textu pokud nebude řečeno jinak budeme derivací rozumět výhradně vlastní derivaci. **Geometrický význam:** stejně jako u funkcí jedné proměnné představuje parciální derivace funkce f podle j-té proměnné v bodě x směrnici tečny ve směru osy x_j. Parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ závisí na bodu x – je to tedy opět funkce n proměnných, takže ji můžeme dále derivovat. Existuje-li parciální derivace podle k-té proměnné, dostaneme parciální derivaci druhého řádu v bodě x a budeme ji značit $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x)$ (nejprve derivujeme podle x_j a potom podle x_k). Obdobně můžeme definovat a značit parciální derivace vyšších řádů. Z definice vidíme, že parciální derivace podle x_j se hledá stejně jako derivace funkci jedné proměnné (ostatní proměnné jsou brány jako konstanty a derivace konstanty je nula). Při počítání parciálních derivací můžeme tedy bez omezení využít základní vzorce a větu o derivaci součtu, součinu a podílu.

Věta 13.2 **(O parciální derivaci součtu, součinu a podílu.)** *Nechť c_1, c_2 jsou reálné konstanty a funkce $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mají vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ podle x_i, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Potom*

$$\frac{\partial(c_1 f + c_2 g)}{\partial x_i}(a) = c_1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + c_2 \frac{\partial g}{\partial x_i}(a),$$

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}(a) = g(a)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + f(a)\frac{\partial g}{\partial x_i}(a),$$

$$\frac{\partial(f/g)}{\partial x_i}(a) = \frac{g(a)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) - f(a)\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)}{g^2(a)} \qquad \text{je-li} \quad g(a) \neq 0.$$

Důkaz by byl stejný jako pro funkce jedné proměnné a proto jej nebudeme provádět. Hlavní rozdíl při počítání derivace funkce jedné proměnné a parciálními derivacemi funkcí více proměnných spočívá v tom, že ve větě o derivaci složené funkce potřebujeme v případě parciálních derivací silnější předpoklady. Tuto větu dokážeme na konci části věnované totálnímu diferenciálu. I v některých dalších větách uvidíme, že předpoklad existence parciálních derivací je slabší než tomu bylo u funkcí jedné proměnné.

Příklad 13.3 *Spočtěte všechny parciální derivace prvního a druhého řádu pro funkci* $f(x,y) = 3x^2y + 2x + y^3 - 1 + \sin(xy^2)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6xy + 2 + y^2\cos(xy^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2 + 3y^2 + 2xy\cos(xy^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6x + 2y\cos(xy^2) - 2xy^3\sin(xy^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = 6y + 2x\cos(xy^2) - 4x^2y^2\sin(xy^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = 6y - y^4\sin(xy^2), \qquad \forall [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

V předchozím příkladu jsme viděli, že parciální derivace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ se rovnají (tzn. na pořadí derivování nezáleží). Postupně zjistíme, za jakých předpokladů nezáleží na pořadí derivování, co znamenají nulové derivace podle všech proměnných pro průběh funkce a také jak souvisí derivace se spojitostí. Začneme užitečnou větou o přírůstku funkce (analogie věty o střední hodnotě).

Věta 13.4 **(O přírůstku funkce.)** *Nechť funkce* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *má všechny parciální derivace prvního řádu v intervalu* $I \subset \mathbb{R}^n$, $a, b \in I$. *Potom existují body* $\xi^1, \dots, \xi^n$ $(\xi^j = [\xi^j_1, \dots, \xi^j_n],\ j = 1, \dots, n)$ *tak, že*

$$f(b) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi^j), \tag{13.1}$$

kde $\min(a_k, b_k) \le \xi^j_k \le \max(a_k, b_k)$ *pro* $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, n$.

Důkaz. Využijeme jednoduchou identitu

$$f(b) - f(a) = \tag{13.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(f(b_1, \dots, b_j, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(b_1, \dots, b_{j-1}, a_j, \dots, a_n) \right).$$

V každém dílčím rozdílu se mění jen jedna složka, takže zkusíme aplikovat větu o střední hodnotě. Funkce $g_j(\xi) := f(b_1, \dots, b_{j-1}, \xi, a_{j+1}, \dots, a_n)$ mají pro $j = 1, \dots, n$ derivaci v intervalu $[\min(a_j, b_j), \max(a_j, b_j)]$ a jsou tam spojité. Podle věty o střední hodnotě existuje $\xi^j_j \in (\min(a_j, b_j), \max(a_j, b_j))$ tak, že

$$f(b_1, \dots, b_j, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(b_1, \dots, b_{j-1}, a_j, \dots, a_n) =$$

$$g_j(b_j) - g_j(a_j) = (b_j - a_j) g_j'(\xi^j_j) = (b_j - a_j) \frac{\partial f(\xi^j)}{\partial x_j},$$

kde $\xi^j = [b_1, \dots, b_{j-1}, \xi^j_j, a_{j+1}, \dots, a_n]$. Po dosazení do vztahu (13.2) dostaneme tvrzení věty. $\square$

Z věty o přírůstku funkce ihned plynou následující dvě věty.

Věta 13.5 *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má všechny parciální derivace prvního řádu omezené v otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^n$. Potom je funkce f spojitá v množině M.*

Důkaz. Zvolme libovolný bod $a \in M$ a k němu $\varepsilon > 0$ tak, aby $U_\varepsilon(a) \subset M$. Potom pro libovolný bod $b \in U_\varepsilon(a)$ z věty o přírůstku funkce plyne

$$\lim_{b\to a} f(b) = \lim_{b\to a} \left(f(a) + \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi^j) \right) = f(a).$$

Tedy limita se rovná funkční hodnotě, takže funkce f je spojitá v bodě a. □

Věta 13.6 *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má všechny parciální derivace prvního řádu rovny nule ve všech bodech intervalu $I \subset \mathbb{R}^n$. Potom je funkce f konstantní v intervalu I.*

Důkaz. Z věty o přírůstku funkce plyne, že pro $a, b \in I$ platí

$$f(b) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi^j) = 0,$$

takže funkce f je konstantní v I. □

Příklad 13.7 *Funkce definována předpisem*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{pro } x = 0 \textit{ nebo } y = 0, \\ 0 & \textit{jinde} \end{cases}$$

má v bodě $[0,0]$ parciální derivace podle obou proměnných

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

rovny nule, ale není v tomto bodě spojitá, *protože*

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 1 \quad \textit{ale} \quad \lim_{x\to 0} f(x,x) = 0.$$

Tedy limita v bodě $[0,0]$ *neexistuje a funkce není spojitá. Grafem této funkce je rovina, z níž je vyzdvižen osový kříž.*

2. Totální diferenciál

Definice 13.8 *Nechť funkce* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je definována v okolí bodu* $x = [x_1, \ldots, x_n]$. *Zvolme čísla* $A_1, \ldots, A_n$ *a definujeme funkci* $r(h)$ $(h = [h_1, \ldots, h_n])$ *rovnicí*

$$f(x+h) - f(x) = A_1 h_1 + \ldots + A_n h_n + ||h||_{max} r(h), \quad r(0, \ldots, 0) = 0. \quad (13.3)$$

Lze-li čísla $A_1, \ldots, A_n$ *volit tak, že funkce* r *je spojitá v bodě* $[0, \ldots, 0]$ *(tedy* $\lim\limits_{h\to[0,\ldots,0]} r(h) = 0$*), nazýváme výraz*

$$A_1 h_1 + \ldots + A_n h_n$$

(úplným nebo) totálním diferenciálem *funkce* f *v bodě* x *a říkáme, že funkce* f *má* **totální diferenciál** *v bodě* x.

Geometrický význam totálního diferenciálu je stejný jako u diferenciálu funkcí jedné proměnné. Nahradíme-li přírůstek $f(a+h) - f(a)$ totálním diferenciálem $A_1 h_1 + \ldots + A_n h_n$, dopouštíme se chyby, která je rovna funkci $||h||_{max} r(h)$. Přitom funkce $||h||_{max} r(h)$ se pro malá a zmenšující se $||h||_{max}$ blíží k nule rychleji než diferenciál (pokud je různý od nuly). Tedy čím menší bude $||h||_{max}$, tím menší relativní chyby se dopustíme, nahradíme-li přírůstek funkce f totálním diferenciálem. Nyní se podíváme na jeho vlastnosti.

Věta 13.9 *Je-li $A_1h_1 + \ldots + A_nh_n$ totální diferenciál funkce f v bodě a, je*

$$A_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Důkaz. Zvolíme-li v rovnici (13.3) h tak, že kromě j-té složky jsou všechny ostatní složky rovny nule, dostaneme

$$f(a+h) - f(a) = A_1h_1 + \ldots + A_nh_n + ||h||_{max}r(h) = A_jh_j + |h_j|r(h)$$

a po úpravě máme pro $h_j > 0$

$$\lim_{h_j \to 0} r(h) = \lim_{h_j \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h_j} - A_j \right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) - A_j = 0.$$

Pro $h_j < 0$ bychom museli celou rovnici kromě $r(h)$ násobit -1. $\square$

Věta 13.10 *Má-li funkce f v bodě a totální diferenciál, je v bodě a spojitá.*

Důkaz. Limitním přechodem v rovnici (13.3) dostaneme

$$\lim_{h \to [0,\ldots,0]} f(a+h) - f(a) = \lim_{h \to [0,\ldots,0]} A_1h_1 + \ldots + A_nh_n + ||h||_{max}r(h) = 0.$$

Tedy limita se rovná funkční hodnotě a funkce f je spojitá v bodě a. $\square$

Věta 13.11 **(Nutná a postačující podmínka existence totálního diferenciálu.)** *Funkce f má v bodě a totální diferenciál, právě když jsou parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ spojité v bodě $a = [a_1, \ldots, a_n]$ pro $j = 1, \ldots, n$.*

Důkaz. Parciální derivace existují v okolí bodu a, takže pro dostatečně malé $||h||_{max}$, můžeme použít větu o přírůstku funkce na funkci f v intervalu $[a, a+$

$h]$. Dále ze spojitosti derivací v bodě a plyne, že funkce

$$g_j(h) := \frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi^j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a), \qquad \text{splňují} \quad \lim_{h\to[0,\dots,0]} g_j(h) = 0,$$

kde $\xi^j \in [a, a+h]$. Dosazením do (13.1) dostaneme

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} (a_j + h_j - a_j)\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi^j) = \sum_{j=1}^{n}\left(h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + h_j g_j(h)\right).$$

Nyní definujme funkci $r(h) := \dfrac{\sum_{j=1}^{n} h_j g_j(h)}{||h||_{max}}$ a protože

$$\lim_{h\to[0,\dots,0]} |r(h)| \le \lim_{h\to[0,\dots,0]} \frac{\sum_{j=1}^{n} |h_j||g_j(h)|}{||h||_{max}} \le \lim_{h\to[0,\dots,0]} \sum_{j=1}^{n} |g_j(h)| = 0$$

je i $\lim\limits_{h\to[0,\dots,0]} r(h) = 0$. Takže $\sum\limits_{j=1}^{n} h_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ je totální diferenciál funkce f v bodě a. Druhá implikace plyne z věty 13.9. $\square$

Nyní již můžeme dokázat větu o parciální derivaci složené funkce.

Věta 13.12 **(O parciální derivaci složené funkce.)** *Nechť funkce $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ mají v bodě $x_0 = [x_1^0, \dots, x_n^0]$ parciální derivace $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_0)$, $j = 1, \dots, n$. Dále nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má totální diferenciál v bodě $y_0 = [y_1^0, \dots, y_n^0]$, kde $y_i^0 = g_i(x_0)$. Potom platí:*

$$\frac{\partial f(g_1, \dots, g_n)}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i}(y_0)\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_0).$$

Důkaz. Funkce f má totální diferenciál v bodě y_0, takže podle věty 13.9 existuje funkce $r(h)$, $(h = [h_1, \ldots, h_n])$ je spojitá v bodě $[0, \ldots, 0]$ tak, že

$$f(y_0 + h) - f(y_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(y_0)}{\partial y_i} h_i + ||h||_{max} r(h). \tag{13.4}$$

Naším cílem je vypočítat

$$\frac{\partial f(g_1, \ldots, g_n)}{\partial x_j}(x_0) =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(g_1(x_0 + t_j), \ldots, g_n(x_0 + t_j)) - f(g_1(x_0), \ldots, g_n(x_0))}{t}, \tag{13.5}$$

kde t_j je n-tice reálných čísel, která má na j-tém místě t a na ostatních místech nuly. Proto budeme definovat funkce

$$h_i(t) = g_i(x_0 + t_j) - g_i(x_0) \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{13.6}$$

Všechny funkce h_i jsou spojité v bodě nula, protože funkce $g_i(x_0+t_j)$ jsou jako funkce jedné proměnné t spojité v bodě nula (mají v tomto bodě derivaci). Tedy $h_i(0) = 0$ a také složená funkce $r(h_1(t), \ldots, h_n(t))$ je spojitá v bodě nula a platí

$$\lim_{t \to 0} r(h_1(t), \ldots, h_n(t)) = r(h_1(0), \ldots, h_n(0)) = r(0, \ldots, 0) = 0. \tag{13.7}$$

Dále pro $i = 1, \ldots, n$ platí

$$\lim_{t \to 0} \frac{h_i(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{g_i(x_0 + t_j) - g_i(x_0)}{t} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_0). \tag{13.8}$$

Ve výrazu (13.5) nejprve nahradíme $g_i(x_0 + t_j)$ výrazem $h_i(t) + g_i(x_0)$ (viz. (13.6)), v druhém kroku dosadíme $g_i(x_0) = y_i^0$, ve třetím kroku využijeme

(13.4) a nakonec dosadíme limitu (13.8)

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(g_1(x_0+t_j),\dots,g_n(x_0+t_j))-f(g_1(x_0),\dots,g_n(x_0))}{t}= \tag{13.9}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(h_1(t)+g_1(x_0),\dots,h_n(t)+g_n(x_0))-f(g_1(x_0),\dots,g_n(x_0))}{t}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(h_1(t)+y_1^0,\dots,h_n(t)+y_n^0)-f(y_1^0,\dots,y_n^0)}{t}=$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_i}(y_0)\frac{h_i(t)}{t}+\frac{\|[h_1(t),\dots,h_n(t)]\|_{max}r(h_1(t),\dots,h_n(t))}{t}\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_i}(y_0)\lim_{t\to 0}\frac{h_i(t)}{t}+\lim_{t\to 0}\left(r(h_1(t),\dots,h_n(t))\frac{\|[h_1(t),\dots,h_n(t)]\|_{max}}{t}\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_i}(y_0)\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_0)+\lim_{t\to 0}\left(r(h_1(t),\dots,h_n(t))\left\|\left[\frac{h_1(t)}{t},\dots,\frac{h_n(t)}{t}\right]\right\|_{max}\operatorname{sgn} t\right).$$

Vzhledem k (13.8) je pro dostatečně malá t každá funkce $\dfrac{h_i(t)}{t}$ omezená a tedy je omezená i funkce $\left\|\left[\dfrac{h_1(t)}{t},\dots,\dfrac{h_n(t)}{t}\right]\right\|_{max}\operatorname{sgn} t$. A protože podle (13.7) je $\lim\limits_{t\to 0} r(h_1(t),\dots,h_n(t))=0$, je i

$$\lim_{t\to 0}\left(r(h_1(t),\dots,h_n(t))\left\|\left[\frac{h_1(t)}{t},\dots,\frac{h_n(t)}{t}\right]\right\|_{max}\operatorname{sgn} t\right)=0.$$

Dosadíme-li tuto limitu do (13.9) a poté (13.9) do (13.5), dostaneme tvrzení věty. □

Příklad 13.13 *Spočtěme parciální derivace funkce* $f(u,v) = u^2 + uv + 1$ *podle* x *a* y*, jestliže* $u(x,y) = e^{x+y}$ *a* $v(x,y) = \dfrac{y}{x}$*.*

Funkce f *má spojité parciální derivace a tedy i totální diferenciál* $\forall[x,y] \in \mathbb{R}^2$*, funkce* u *a* v *mají parciální derivace prvního řádu v každém bodě* $\forall[x,y] \in \mathbb{R}^2$*, kde je* $x \neq 0$*. Tedy pro* $x \neq 0$ *můžeme použít předchozí větu a dostaneme:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = (2u+v)e^{x+y} + u\frac{-y}{x^2} =$$

$$\left(2e^{x+y} + \frac{y}{x}\right)e^{x+y} + e^{x+y}\frac{-y}{x^2} = e^{x+y}\frac{2x^2e^{x+y} + xy - y}{x^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = (2u+v)e^{x+y} + u\frac{1}{x} =$$

$$\left(2e^{x+y} + \frac{y}{x}\right)e^{x+y} + e^{x+y}\frac{1}{x} = e^{x+y}\frac{2xe^{x+y} + y + 1}{x}.$$

V případě, že všechny funkce známe, nemusíme aplikovat předchozí větu, ale můžeme vnitřní funkce dosadit do vnějších a derivovat teprve výslednou funkci $f(x,y) = \left(e^{x+y}\right)^2 + \dfrac{e^{x+y}y}{x} + 1$*.*

Nakonec uvedeme užitečné věty o záměnnosti parciálních derivací.

Věta 13.14 **(O záměnnosti parciálních derivací.)** *Nechť funkce* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, má v bodě* $x_0 = [x_1^0, \dots, x_n^0]$ *spojitou parciální derivaci* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$*. Potom platí*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0).$$

Důkaz. Ze spojitosti funkce $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ plyne, funkce f je definována na nějaké množině $U_\delta(x_0)$. Čísla h, k zvolím tak, aby $0 < |h| < \delta$, $0 < |k| < \delta$ a definujme n-tici reálných čísel h_i, která má na i-tém místě h a na ostatních místech nuly a n-tici reálných čísel k_j, která má na j-tém místě k a na ostatních místech nuly. Potom platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + k_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)}{k} =$$

$$\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + k_j + h_i) - f(x_0 + k_j) - f(x_0 + h_i) + f(x_0)}{hk}.$$

Podle předpokladu věty tato limita existuje a my potřebujeme dokázat, že existuje i limita

$$\lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0 + k_j + h_i) - f(x_0 + k_j) - f(x_0 + h_i) + f(x_0)}{hk}$$

a že se tyto limity rovnají. K tomu, ale stačí dokázat existenci dvojné limity

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \frac{f(x_0 + k_j + h_i) - f(x_0 + k_j) - f(x_0 + h_i) + f(x_0)}{hk},$$

protože potom tato limita nezávisí na tom, jakým způsobem se k limitnímu bodu blížíme a tedy všechny tři výše uvedené limity se budou rovnat. Klademe-li

$$g(x_i) := f(x_0 + x + k_j) - f(x_0 + x), \quad \text{kde} \quad x = [0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0], |x_i| < \delta,$$

je funkce g (jedné proměnné) spojitá a má derivaci v intervalu $[-|h|, |h|]$

a tedy podle věty o střední hodnotě existuje ξ $(0 < \xi < 1)$ tak, že

$$\frac{f(x_0 + k_j + h_i) - f(x_0 + k_j) - f(x_0 + h_i) + f(x_0)}{hk} = \tag{13.10}$$

$$\frac{g(h) - g(0)}{hk} = \frac{g'(h\xi)}{k} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + h_i\xi + k_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + h_i\xi)}{k}.$$

Kladu-li dále $l(x_j) := \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + h_i\xi + x)$ $x = [0, \ldots, 0, x_j, 0, \ldots, 0]$, $|x_j| < \delta$, je funkce l (jedné proměnné) spojitá a má derivaci v intervalu $[-|k|, |k|]$ a tedy podle věty o střední hodnotě existuje ζ $(0 < \zeta < 1)$ tak, že

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + h_i\xi + k_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + h_i\xi)}{k} = \frac{l(k) - l(0)}{k} \tag{13.11}$$

$$= l'(k\zeta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + h_i\xi + k_i\zeta).$$

Zkombinujeme-li nyní (13.10) a (13.11) dostaneme

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \frac{f(x_0 + k_j + h_i) - f(x_0 + k_j) - f(x_0 + h_i) + f(x_0)}{hk} =$$

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + h_i\xi + k_i\zeta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0),$$

protože $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ je spojitá v bodě x_0. $\square$

Pomocí matematické indukce dostaneme následující větu, která nám při počítání parciálních derivací n-tého řádu výrazně usnadní práci.

Věta 13.15 **(O záměnnosti parciálních derivací r-tého řádu.)** *Nechť funkce* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *má v bodě* $x_0 = [x_1^0, \dots, x_n^0]$ *spojité parciální derivace r-tého řádu. Potom jsou parciální derivace funkce* f *až do r-tého řádu v bodě* x_0 *záměnné. (Tedy hodnota derivace závisí pouze na tom, kolikrát se derivuje podle jednotlivých proměnných a nezávisí na tom, v jakém pořadí se toto derivování provádí.)*

Příklad 13.16 *Vypočtěme všechny parciální derivace třetího řádu funkce definované předpisem* $f(x, y) = \dfrac{x}{y^2}$.

$D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2,\ y \neq 0\}$. *K výpočtu vždy využijeme nejjednoduššího možného postupu. Pokud jsou parciální derivace spojité můžeme použít předchozí větu a tak si ušetřit práci. Pro* $\forall [x, y] \in D(f)$ *platí*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2x}{y^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{-2}{y^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = \frac{6x}{y^4},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial x}(x,y) = 0, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial y}(x,y) = \frac{-24x}{y^5},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}(x,y),$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x}(x,y) = \frac{6}{y^4} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y}(x,y).$$

Všimněte si, že třetích derivací pro funkci dvou proměnných je 2^3.

3. Derivace ve směru a gradient

Parciální derivace funkce f v bodě $x \in \mathbb{R}^n$ jsou derivace ve směrech rovnoběžných s některou souřadnicovou osou. Jejich zobecněním jsou derivace ve směru. Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je definována v bodě $a = [a_1, \ldots, a_n]$. Opět zaveďme funkci jedné proměnné definovanou vztahem $g(h) := f(a + hu)$, kde $u \in \mathbb{R}^n$ a má jednotkovou velikost v euklidovské normě. Existuje-li derivace $g'(0)$, nazýváme číslo $g'(0)$ derivací funkce f ve směru u v bodě a.

Definice 13.17 *Nechť $u = [u_1, \ldots, u_n]$ je bod takový, že $||u||_2 = 1$ a nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je definována v bodě $x = [x_1, \ldots, x_n]$. Existuje-li*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + hu_1, \ldots, x_n + hu_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h}$$

nazýváme ji **derivací funkce f ve směru u v bodě x** *a budeme ji značit $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x)$, nebo $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x_1, \ldots, x_n)$.*

Poznámka 13.18 *Pokud u má i-tou složku rovnou jedné a ostatní složky rovny nule, je derivace ve směru u totožná s parciální derivací podle proměnné x_i. Derivaci ve směru u můžeme dále derivovat ve směru v, pokud tato derivace existuje dostaneme druhou derivaci a budeme ji značit $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$. Protože definice derivace ve směru je podobná definici parciální derivace, platí pro počítání derivace ve směru všechna pravidla, která platí pro počítání parciálních derivací. Tedy věta o derivaci součtu, součinu a podílu, věta o derivaci složené funkce a věta o záměnnosti derivací r-tého řádu. Věty by byly prakticky totožné a ani důkazy by se příliš nelišily, takže je nebudeme uvádět.*

Poznámka 13.19 *V příkladu 13.7 jsme ukázali, že z existence parciálních derivací funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ neplyne spojitost funkce. V následujícím příkladu ukážeme, že* **ani existence derivace v libovolném směru u v bodě $[x_0, y_0]$ není postačující podmínkou pro spojitost.** *Zdůvodnění je jednoduché: stačí si uvědomit, že derivace ve směru u popisují chování funkce f, blížíme-li se k bodu $[x_0, y_0]$ po přímce, zatímco ke spojitosti v bodě $[x_0, y_0]$ potřebujeme, aby limita nezávisela na tom, po jaké křivce (přímka, parabola, ...) se k bodu $[x_0, y_0]$ blížíme.*

Příklad 13.20 *Funkce definována předpisem*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4} & pro\ [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & pro\ [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

má v bodě $[0,0]$ derivaci v libovolném směru, ale není v tomto bodě spojitá. *Podívejme se na to podrobněji. Předpokládejme, že $||u||_2 = 1$ a spočítejme podle definice derivaci ve směru $u = [u_1, u_2]$:*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^4u_1^4h^2u_2^2}{h^8u_1^8+h^4u_2^4} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hu_1^4u_2^2}{h^4u_1^8 + u_2^4} = 0.$$

Tedy funkce f má derivaci v libovolném směru v bodě $[0,0]$ rovnu nule. Ještě ukážeme, že funkce f není v tomto bodě spojitá. K tomu stačí dokázat, že limita závisí na konstantě k v obecné rovnici paraboly $y = kx^2$ procházející bodem nula $[0,0]$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4k^2x^4}{x^8 + k^4x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2}{1+k^4} = \frac{k^2}{1+k^4}.$$

Příklad 13.21 *Vypočtěme derivaci funkce* $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2+y^2)$ *v bodě* $[1,1]$ *ve směru* $v = [1,2]$.

Nejprve potřebujeme upravit směr v *tak, aby měl jednotkovou velikost. To uděláme tak, že vydělíme směr* v *jeho euklidovskou normou.* $||v||_2 = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ *a předefinujeme směr* v *takto* $u := \dfrac{v}{||v||_2} = \left[\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right]$. *Tím nezměníme směr, ale pouze jeho velikost. Potom podle definice derivace ve směru a po aplikaci l'Hospitalova pravidla dostaneme*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1,1) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{arctg}\left(\left(1+\frac{h}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(1+\frac{2h}{\sqrt{5}}\right)^2\right) - \operatorname{arctg}(1+1)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{2\left(1+\frac{h}{\sqrt{5}}\right)\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\left(1+\frac{2h}{\sqrt{5}}\right)\frac{2}{\sqrt{5}}}{1+\left(\left(1+\frac{h}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(1+\frac{2h}{\sqrt{5}}\right)^2\right)^2} = \frac{6}{5\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{25}.$$

Na závěr této části si ukážeme jednodušší postup pro počítání derivací ve směru.

Věta 13.22 **(Počítání derivací ve směru.)** *Jsou-li parciální derivace* $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ *spojité v bodě* $a = [a_1, \ldots, a_n]$ *pro* $j = 1, \ldots, n$ *a je dán směr* $u = [u_1, \ldots, u_n]$ *tak, že* $||u||_2 = 1$. *Potom platí*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Důkaz. Vyjdeme z definice derivace ve směru a následně využijeme toho, že funkce f má v bodě a totální diferenciál. Následují již jen jednoduché úpravy:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+hu)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{j=1}^{n} hu_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + ||hu||_{max} r(hu)}{h} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \lim_{h\to 0}\frac{||hu||_{max} r(hu)}{h} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \lim_{h\to 0}(\operatorname{sgn} h\, ||u||_{max} r(hu)) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) u_j,$$

protože z definice totálního diferenciálu plyne, že $\lim_{h\to 0} r(hu) = 0$. □

Příklad 13.23 *Vypočtěme derivaci funkce* $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2+y^2)$ *v bodě* $[1,1]$ *ve směru* $v = [1,2]$ *podle předchozí věty. Nejprve spočítáme derivace:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{2}{5}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{2}{5}.$$

Ještě potřebujeme upravit směr v *tak, aby měl jednotkovou velikost. Po úpravě dostaneme* $u := \frac{v}{||v||_2} = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right]$. *Potom podle předchozí věty*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1,1) = u_1\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + u_2\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{2}{5}\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{5}\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{25}.$$

Definice 13.24 *Existují-li parciální derivace* $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ *v bodě* $a = [a_1, \dots, a_n]$ *pro* $j = 1, \dots, n$*, definujeme* **gradient** *v bodě* a *předpisem:*

$$\operatorname{grad} f(a) := \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right].$$

Gradient se také někdy značí $\nabla f(a)$ *(čteme „nabla").*

4. Transformace diferenciálních výrazů

Při řešení diferenciálních rovnic bývá často výhodné zavést nové proměnné. V této části si uvedeme nejběžnější případy zavedení nových závisle i nezávisle proměnných. Jedná se o aplikace věty o derivaci složené funkce a věty o parciální derivaci složené funkce. Vždy budeme předpokládat, že nově zavedené proměnné mají všechny potřebné derivace a že vztahy mezi starými a novými proměnnými jsou vzájemně jednoznačné.

Příklad 13.25 *Diferenciální rovnici* $x^2 f''(x) + 4x f'(x) - 2f(x) = 0$ *transformujeme zavedením nezávisle proměnné* t *vztahem* $x = e^t$ $(x > 0)$*. Tento vztah je* $\forall t$ *vzájemně jednoznačný a funkce* e^t *má derivace všech řádů. Platí*

$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{df}{dt}\frac{1}{dx/dt} = \frac{df}{dt}\frac{1}{e^t},$$

$$f'' = \frac{d}{dx}\frac{df}{dx} = \frac{d}{dt}\frac{df}{dx}\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\frac{1}{e^t}\right)\frac{1}{dx/dt} =$$

$$\left(\frac{d^2 f}{dt^2}\frac{1}{e^t} - \frac{df}{dt}\frac{1}{e^t}\right)\frac{1}{e^t} = \frac{d^2 f}{dt^2}e^{-2t} - \frac{df}{dt}e^{-2t}.$$

A po dosazení do diferenciální rovnice dostaneme

$$x^2 f''(x) + 4x f'(x) - 2f(x) =$$
$$e^{2t}\left(e^{-2t}\frac{d^2f}{dt^2}(t) - e^{-2t}\frac{df}{dt}(t)\right) + 4e^t\frac{1}{e^t}\frac{df}{dt}(t) - 2f(t) =$$
$$\frac{d^2f}{dt^2}(t) + 3\frac{df}{dt}(t) - 2f(t) = 0.$$

Příklad 13.26 *Diferenciální rovnici* $f'(x)e^x \cos f(x) - x \sin f(x) - \ln x = 0$ *transformujeme zavedením závisle proměnné* $z(x) = \sin f(x)$, *pak* $f'(x)\cos f(x) = z'(x)$ $(R(z) = [-1, 1])$. *Po dosazením do diferenciální rovnice dostaneme:*

$$f'(x)e^x \cos f(x) - x \sin f(x) - \ln x = z'(x)e^x - xz(x) - \ln x = 0.$$

Příklad 13.27 *Pomocí transformace do nezávisle proměnných* $u = x + y$, $v = x - y$ *najděme všechny funkce* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *se spojitou derivací vyhovující parciální diferenciální rovnici* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.

Vztah mezi novými a starými proměnnými je pro všechna $[u, v]$ *vzájemně jednoznačný* $\left(\text{protože } x = \dfrac{u+v}{2} \text{ a } y = \dfrac{u-v}{2}\right)$ *a funkce* $u(x, y)$ *a* $v(x, y)$ *mají derivace všech řádů podle obou proměnných. Platí*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Po dosazení do parciální diferenciální rovnice dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v}=2\frac{\partial f}{\partial u}=0.$$

To znamená, že funkce $f(u,v)$ nezávisí na proměnné u a tedy $f(u,v)=g(v)$, kde g je libovolná funkce jedné proměnné se spojitou derivací. Zpětným dosazením v zjistíme, že všechna řešení zadané parciální diferenciální rovnice jsou ve tvaru $f(x,y)=g(x-y)$.

Příklad 13.28 *Pomocí transformace do nových nezávisle proměnných*

$$u(x,y)=x+ay, \qquad\qquad v(x,y)=x-ay$$

zjednodušme vlnovou rovnici

$$a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}(x,y)-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}(x,y)=0, \qquad a>0.$$

Předpokládejme, že její řešení má spojité derivace druhého řádu. Tato rovnice popisuje například chvění struny na hudebním nástroji, $f(x,y)$ udává velikost výchylky struny ve vzdálenosti x od jednoho z bodů upevnění struny v čase y.

Vztah mezi novými a starými proměnnými je opět pro všechna $[u,v]$ vzájemně jednoznačný $\left(\text{protože } x=\dfrac{u+v}{2} \text{ a } y=\dfrac{u-v}{2a}\right)$ a funkce u a v mají derivace všech řádů podle obou proměnných. Platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=a\frac{\partial f}{\partial u}-a\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v}\frac{\partial v}{\partial x} =$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial u} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial f}{\partial u} - a\frac{\partial f}{\partial v}\right) =$$
$$a\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$
$$a^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial u} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v}\right).$$

Po dosazení posledních dvou vztahů do vlnové rovnice dostaneme

$$a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} =$$
$$a^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial u} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial u} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v}\right) = 4a^2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0.$$

5. Tečná rovina

Definice 13.29 *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ totální diferenciál, potom funkci*

$$T(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

nazveme **tečnou rovinou**.

Příklad 13.30 *Určeme tečnou rovinu k funkci* $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ *v bodě* $[1,1]$.

Nejprve vypočteme první derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{y^2}$$

a následně dosadíme do vzorce z předchozí definice

$$\begin{aligned} T(x,y) &= f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) \\ &= 1 + (x-1) - (y-1) = x - y + 1. \end{aligned}$$

Kapitola 14

Taylorova věta

1. Nekonečně malé funkce

Řekneme, že funkce f je nekonečně malá v bodě x_0, jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$. Jednou z nejjednodušších funkcí, která je nekonečně malá v bodě x_0, je funkce $x - x_0$. Dále zavedeme funkce nekonečně malé různých řádů, a to tak, že srovnáme funkci f s různými mocninami funkce $x - x_0$.

Definice 14.1 *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ a funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jestliže existuje vlastní limita*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)}{h^m} = A, \tag{14.1}$$

potom říkáme, že funkce f je v bodě x_0 **nekonečně malá řádu právě m**, *jestliže $A \neq 0$. Je-li ale $A = 0$, říkáme, že funkce f je v bodě x_0* **nekonečně malá řádu vyššího než m**.

Poznámka 14.2 *Je-li $k < m$, $k, m \in \mathbb{N}$ a funkce f je v bodě x_0 nekonečně malá řádu právě m nebo vyššího než m, potom je funkce f v bodě x_0 nekonečně malá řádu vyššího než k. Existuje-li totiž vlastní limita (14.1), je*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^k} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m}(x-x_0)^{m-k} =$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m} \lim_{x\to x_0} (x-x_0)^{m-k} = A \cdot 0 = 0.$$

$\lim\limits_{x\to x_0} (x-x_0)^{m-k} = 0$, *protože* $m > k$.

Příklad 14.3 *Funkce $x^3 - x^2$ je v bodě 0 nekonečně malá řádu vyššího než 1, protože*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - x^2}{x - 0} = \lim_{x\to 0}(x^2 - x) = 0.$$

Tato funkce je v bodě 0 nekonečně malá řádu právě 2, protože

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - x^2}{(x-0)^2} = \lim_{x\to 0}(x-1) = -1.$$

K určení řádu nekonečně malé funkce můžeme použít následující větu.

Věta 14.4 (Charakterizace nekonečně malých funkcí.) *Nechť $m \in \mathbb{N}$ a nechť existuje $f^{(m)}(x_0)$. Potom platí:*

Funkce f je v bodě x_0 nekonečně malá řádu právě m, právě když

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{Z},\ 0 \le k < m, \quad \text{a} \quad f^{(m)}(x_0) \ne 0. \tag{14.2}$$

Funkce f je v bodě x_0 nekonečně malá řádu vyššího než m, právě když

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{Z},\ 0 \le k \le m. \tag{14.3}$$

Důkaz. Platí-li buď (14.2) nebo (14.3) a protože $((x-x_0)^m)^{(k)} = 0$ pro $k \in \mathbb{Z}$, $0 \le k < m$, můžeme m krát aplikovat l'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!},$$

takže f je v bodě x_0 nekonečně malá řádu právě m nebo vyššího než m podle toho, je-li $f^{(m)}(x_0)$ různá od nuly nebo rovna nule.

K ověření opačné implikace použijeme nepřímý důkaz. Neplatí-li ani (14.2) ani (14.3), potom musí existovat celé číslo l $(0 \le l < m)$ tak, že $f^{(l)}(x_0) \neq 0$. Vezmeme nejmenší číslo takové, že $f^{(k)}(x_0) = 0$ pro $k \in \mathbb{Z}$, $0 \le k < l$. Pak

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^l} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(l)}(x_0)}{l!}.$$

Z toho plyne, že funkce f je v bodě x_0 nekonečně malá řádu právě $l < m$ a nemůže být vyššího řadu, protože $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f^{(l)}(x_0)}{l!(x-x_0)^p}$ $(p \in \mathbb{N})$ buď neexistuje nebo je nevlastní. □

Příklad 14.5 *Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 druhou derivaci. Potom rovnice tečny k funkci f v bodě x_0 je $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$. Hledejme, jak těsně se tečna přimyká k funkci f v bodě x_0 – zajímá nás tedy řád nekonečně malého rozdílu $f-g$ v bodě x_0. Využijeme předchozí větu.*

$$f(x_0) - g(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0, \quad f'(x_0) - g'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0,$$

$$f''(x_0) - g''(x_0) = f''(x_0) - 0 = f''(x_0),$$

Je-li $f''(x_0) \neq 0$, je funkce $f-g$ v bodě x_0 nekonečně malá řádu právě 2, je-li $f''(x_0) = 0$, je funkce $f-g$ v bodě x_0 nekonečně malá řádu vyššího než 2.

Příklad 14.6 *Předpokládejme, že funkce g má v bodě x_0 m-tou derivaci. Zkusme najít polynom P_m m-tého stupně tak, aby rozdíl $g - P_m$ byl v bodě x_0 nekonečně malý řádu vyššího než m. To nastane podle věty 14.4, právě když*

$$\mathbf{g(x_0) - P_m(x_0) = 0,\ (g - P_m)'(x_0) = 0, \dots, (g - P_m)^{(m)}(x_0) = 0.} \tag{14.4}$$

Aby bylo možné snadno počítat funkční hodnoty polynomu P_m a jeho derivací v bodě x_0, budeme ho hledat ve tvaru

$$\mathbf{P_m(x) = A_0 + A_1(x - x_0)^1 + A_2(x - x_0)^2 + \ \dots\ + A_m(x - x_0)^m.}$$

Potom je $P_m(x_0) = A_0$ a dále

$$P'_m(x) = A_1 + 2\,A_2(x - x_0)^1 + \ \dots\ + m\,A_m(x - x_0)^{m-1},$$
$$P'_m(x_0) = 1!\,A_1,$$
$$P''_m(x) = 2\,A_2 + 6\,A_3(x - x_0)^1 + \ \dots\ + m(m-1)\,A_m(x - x_0)^{m-2},$$
$$P''_m(x_0) = 2!\,A_2,$$
$$P'''_m(x) = 6\,A_3 + 24\,A_4(x - x_0)^1 + \ \dots\ + m(m-1)(m-2)A_m(x - x_0)^{m-3},$$
$$P'''_m(x_0) = 3!\,A_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$P_m^{(m-1)}(x) = (m-1)!\,A_{m-1} + m!\,A_m(x - x_0),$$
$$P_m^{(m-1)}(x_0) = (m-1)!A_{m-1},$$
$$P_m^{(m)}(x) = m!\,A_m, \qquad P_m^{(m)}(x_0) = m!\,A_m.$$

Podmínky (14.4) jsou tedy splněny, právě když

$$\mathbf{g(x_0) = A_0,\ g'(x_0) = 1!\,A_1,\ g''(x_0) = 2!\,A_2,\ \dots,\ g^{(m)}(x_0) = m!\,A_m.}$$

Tedy **mezi všemi polynomy m-tého stupně existuje právě jeden takový polynom, že rozdíl $\mathbf{g} - \mathbf{P_m}$ je v bodě** x_0 **nekonečně malý řádu vyššího než** m. *Tento polynom nazveme* **Taylorovým rozvojem (polynomem) řádu** m **funkce g v bodě $\mathbf{x_0}$** *a má tvar:*

$$\mathbf{P_m(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + g''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} +} \tag{14.5}$$

$$\mathbf{\ldots + g^{(m)}(x_0)\frac{(x - x_0)^m}{m!}}.$$

2. Taylorova věta

Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 derivaci až do m-tého řádu, kde $m \in \mathbb{N}$. Pokud je funkce f v blízkosti bodu x_0 složitá, můžeme si její studium ulehčit tak, že ji nahradíme v okolí bodu x_0 jednodušší funkcí například jejím Taylorovým rozvojem. Nyní se budeme zabývat otázkou, jak velká je chyba, které se dopustíme, nahradíme-li funkci f jejím Taylorovým polynomem P_m. Tuto **chybu** budeme definovat vztahem: $\mathbf{R_{m+1}(x) := f(x) - P_m(x)}$.

Věta 14.7 **(Taylorova věta.)** *Nechť* $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ *a* x, x_0 *jsou dvě různá reálná čísla. Dále nechť funkce* f *má derivace až do řádu* $m+1$ *v uzavřeném intervalu* J, *jehož krajními body jsou čísla* x, x_0. *Potom existuje* $\xi \in J^o$ *tak, že platí:*

$$R_{m+1}(x) = f(x) - P_m(x) = \frac{(x - x_0)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi). \tag{14.6}$$

Důkaz. Číslo x je od začátku dáno a budeme ho brát jako konstantu. Místo konstanty x_0 pišme proměnnou t a definujme funkci F rovnicí

$$F(t) := f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - f''(t)\frac{(x-t)^2}{2} - \ldots + f^{(m)}(t)\frac{(x-t)^m}{m!}.$$

Zřejmě platí $F(x) = 0$ a $F(x_0) = R_{m+1}(x)$. Funkce F má v intervalu J derivaci

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) + (f'(t) - f''(t)(x-t)) \\ &+ \left(f''(t)(x-t) - f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\right) + \ldots \\ \ldots &+ \left(f^{(m-1)}(t)\frac{(x-t)^{m-2}}{(m-2)!} - f^{(m)}(t)\frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!}\right) \\ &+ \left(f^{(m)}(t)\frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} - f^{(m+1)}(t)\frac{(x-t)^m}{m!}\right) = -f^{(m+1)}(t)\frac{(x-t)^m}{m!}. \end{aligned}$$

První člen v každé závorce se odečetl se členem před ním stojícím. Protože funkce F má v intervalu J derivaci, je v tomto intervalu také spojitá (věta 5.7). Dále definujme funkci g předpisem $g(t) = (x-t)^{m+1}$. Tato funkce je spojitá a má derivaci v intervalu J, navíc je různá od nuly v intervalu J^o, můžeme tedy použít zobecněnou větu o střední hodnotě. Existuje tedy číslo $\xi \in J^o$ tak, že platí:

$$\frac{0 - R_{m+1}(x)}{0 - (x-x_0)^{m+1}} = \frac{F(x) - F(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$= -f^{(m+1)}(\xi)\frac{(x-\xi)^m}{m!}\frac{-1}{(m+1)(x-\xi)^m} = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}.$$

$\square$

Poznámka 14.8 *Pro* $x = x_0 + h$ $(h \neq 0)$ *a* $\xi = x_0 + \theta h$ $(0 < \theta < 1)$ *lze tvrzení předchozí věty zapsat takto:*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{h}{1} + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + \ldots + f^{(m)}(x_0)\frac{h^m}{m!} + R_{m+1}(h),$$

$$\text{kde} \qquad R_{m+1}(h) = \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x_0 + \theta h).$$

Příklad 14.9 *Funkce* $f(x) = e^x$ *má derivace všech řádů, můžeme tedy použít Taylorovu větu pro všechna* $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$. *Zvolme pro jednoduchost* $x_0 = 0$. *Dále* $(e^x)^{(m)} = e^x$ *a* $e^0 = 1$. *Po dosazení do (14.5) a (14.6) dostaneme*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^m}{m!} + \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Příklad 14.10 *Funkce* $f(x) = \sin x$ *má derivace všech řádů, můžeme tedy použít Taylorovu větu pro všechna* $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$. *Zvolme opět* $x_0 = 0$. *Platí:*
$(\sin x)^{(0)} = \sin x$, $(\sin x)^{(1)} = \cos x$, $(\sin x)^{(2)} = -\sin x$, $(\sin x)^{(3)} = -\cos x$,
$(\sin x)^{(4)} = \sin x$, $(\sin x)^{(5)} = \cos x$, $(\sin x)^{(6)} = -\sin x$, $(\sin x)^{(7)} = -\cos x$.
Další derivace se opakují podle stejného schématu a dále platí, že $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$. *Po dosazení do (14.5) a (14.6) dostaneme*

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + R_{m+1}(x).$$

Všechny derivace funkce $\sin x$ *jsou buď* $\pm \sin x$ *nebo* $\pm \cos x$, *ale všechny tyto funkce jsou v absolutní hodnotě menší než jedna, takže*

$$|R_{m+1}(x)| = \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\left|f^{(m+1)}(\theta x)\right| \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Příklad 14.11 *Funkce $f(x) = \cos x$ má derivace všech řádů, můžeme tedy použít Taylorovu větu pro každé celé kladné číslo m. Zvolme opět $x_0 = 0$. Platí:*

$(\cos x)^{(0)} = \cos x,\ (\cos x)^{(1)} = -\sin x,\ (\cos x)^{(2)} = -\cos x,\ (\cos x)^{(3)} = \sin x,$
$(\cos x)^{(4)} = \cos x,\ (\cos x)^{(5)} = -\sin x,\ (\cos x)^{(6)} = -\cos x,\ (\cos x)^{(7)} = \sin x.$
Další derivace se opakují podle stejného schématu a dále platí, že $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$. *Po dosazení do (14.5) a (14.6) dostaneme*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + R_{m+1}(x).$$

Všechny derivace funkce $\sin x$ *jsou buď* $\pm\sin x$ *nebo* $\pm\cos x$, *ale všechny tyto funkce jsou v absolutní hodnotě menší než jedna, takže opět*

$$|R_{m+1}(x)| = \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\left|f^{(m+1)}(\theta x)\right| \le \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Příklad 14.12 *Rozvineme funkci $f(x) = 1 + \sin x + \dfrac{x^2}{2}$ v Taylorův rozvoj řádu m v bodě* 0.

Taylorův rozvoj funkce $\sin x$ *v bodě* 0 *jsme již spočetli v příkladu 14.10 a funkce* $1 + \dfrac{x^2}{2}$ *je již svým Taylorovým rozvojem v bodě* 0, *protože*

$$1 + \frac{x^2}{2} = 1 + 0\frac{x-0}{1!} + 1\frac{(x-0)^2}{2!}.$$

Pro kontrolu to ještě ověřme. Označme $g(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2}$ a platí:

$$g(0) = 1, \quad g'(x) = x, \quad g'(0) = 0, \quad g''(x) = 1, \quad g''(0) = 1.$$

Celá obrazovka
Začátek
Strana 312
◄ ►
Zpět Vpřed
Zavřít
Ukončit

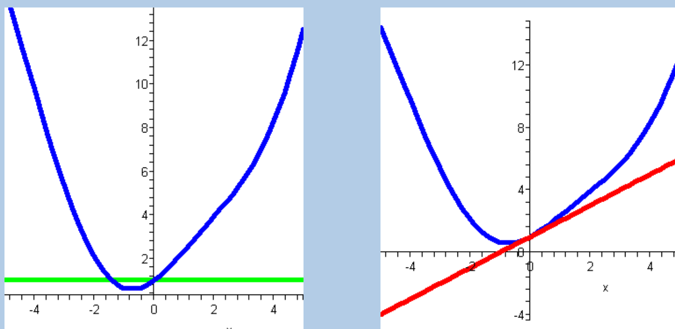
Tedy funkce g je opravdu svým Taylorovým rozvojem řádu 2 v bodě 0. Po sečtení obou rozvojů dostaneme

$$1+\sin x+\frac{x^2}{2}=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+R_{m+1}(x).$$

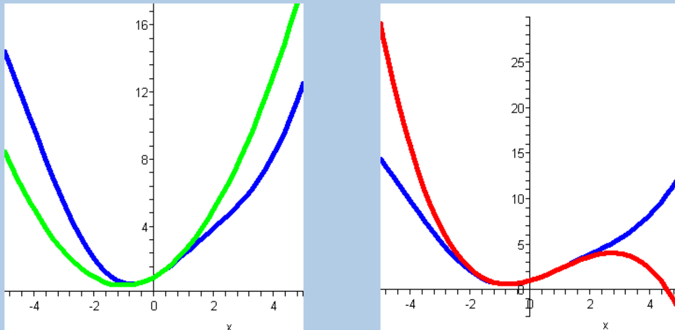
Odhad pro chybu je pro $m \geq 2$ stejný jako u funkce $\sin x$, protože funkce $1+\dfrac{x^2}{2}$ je v tom případě svým Taylorovým rozvojem. Tedy

$$|R_{m+1}(x)|=\frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\left|f^{(m+1)}(\theta x)\right| \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}, \quad 0<\theta<1.$$

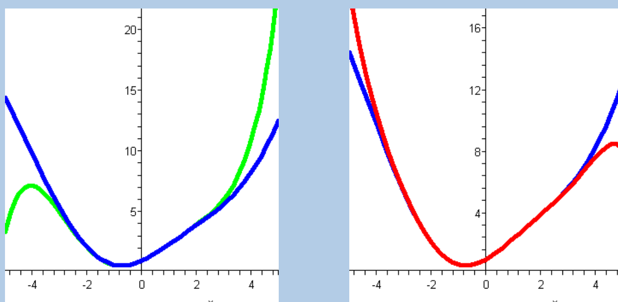
Na následujících obrázcích můžeme pozorovat, jak se postupně se zvyšováním řádu Taylorova rozvoje přimyká polynom k zadané funkci $\mathbf{f(x)=1+\sin x+\dfrac{x^2}{2}}$.



Obrázek 14.1: $\mathbf{T_0(x)=1}$, $\mathbf{T_1(x)=1+\dfrac{x}{1}}$.



Obrázek 14.2: $\color{green}{\mathbf{T_2(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!}}}$, $\color{red}{\mathbf{T_3(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}}}$.



Obrázek 14.3: $\color{green}{\mathbf{T_5(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}}$, $\color{red}{\mathbf{T_7(x)}}$.

3. Taylorova řada

Nyní se podíváme, co se stane, když řád Taylorova rozvoje poroste k ∞.

Věta 14.13 (Taylorova řada.) *Nechť x, x_0 jsou dvě různá reálná čísla. Dále nechť funkce f má derivace všech řádů v uzavřeném intervalu J, jehož krajními body jsou čísla x, x_0. $R_{m+1}(x) = f(x) - P_m(x)$ Potom platí rovnice*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0), \tag{14.7}$$

právě když $\lim\limits_{m\to\infty} R_{m+1}(x) = 0$. Je-li předchozí limita rovna nule, tak řadu $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0)$ nazýváme **Taylorovou řadou**.

Důkaz.

$$\lim_{m\to\infty}\left(f(x) - \sum_{i=0}^{m} \frac{(x-x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0) \right) = \lim_{m\to\infty} R_{m+1}(x).$$

□

Poznámka 14.14 *Uvedeme si jednoduché kritérium:*

$$\textbf{je-li } \lim_{\mathbf{m}\to\infty} \left| \frac{\mathbf{R_{m+1}(x)}}{\mathbf{R_m(x)}} \right| < \mathbf{1}, \textbf{potom je } \lim_{\mathbf{m}\to\infty} \mathbf{R_{m+1}(x) = 0}.$$

Důkaz: je-li $\lim\limits_{m\to\infty} \left| \frac{R_{m+1}(x)}{R_m(x)} \right| < 1$, potom z limitního podílového kritéria plyne, že řada $\sum\limits_{i=0}^{\infty} R_i(x)$ konverguje a tedy z nutné podmínky konvergence řady *dostaneme, že* $\lim_{m\to\infty} R_{m+1}(x) = 0.$

Věta 14.15 $\forall x \in \mathbb{R}$ *je* $\sin x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$ *a* $\cos x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}$.

Důkaz. Z příkladů 14.10 a 14.11 víme, že pro chybu obou Taylorových rozvojů je $|R_{m+1}(x)| \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}$. Aby $\lim_{m\to\infty} \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} = 0$ stačí podle poznámky 14.14 dokázat, že $\lim_{m\to\infty} \frac{|x|^{m+1} m!}{|x|^m (m+1)!} < 1$. Platí:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|x|^{m+1} m!}{|x|^m (m+1)!} = \lim_{m\to\infty} \frac{|x|}{m+1} = |x| \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} = |x| \cdot 0 = 0.$$

□

Věta 14.16 $\forall x \in \mathbb{R}$ *je* $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$.

Důkaz. Z příkladu 14.9 víme, že chyba pro příslušný Taylorův rozvoj je $R_{m+1}(x) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} e^{\theta_{m+1} x},\ 0 < \theta_{m+1} < 1$. Tedy

$$|R_{m+1}(x)| = \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} e^{\theta_{m+1} x} \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} e^{|x|}.$$

Aby $\lim_{m\to\infty} \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} e^{|x|} = 0$ stačí opět podle poznámky 14.14 dokázat, že

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|x|^{m+1}e^{|x|}m!}{|x|^m e^{|x|}(m+1)!} < 1 :$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|x|^{m+1}e^{|x|}m!}{|x|^m e^{|x|}(m+1)!} = \lim_{m\to\infty} \frac{|x|}{m+1} = |x| \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} = |x| \cdot 0 = 0.$$

□

4. Taylorova věta pro funkce více proměnných

Taylorův polynom používáme k přibližnému výpočtu funkčních hodnot funkce f v okolí bodu x_0. Z podmínek (14.4) plyne, že Taylorův polynom má s funkcí f v bodě x_0 stejnou funkční hodnotu a stejnou hodnotu derivací až do řadu m, kde m je stupeň polynomu. Obdobně je tomu také u funkce více proměnných. Taylorův polynom funkce více proměnných je potom polynom více proměnných, který má s funkcí f v daném bodě $x_0 \in \mathbb{R}^n$ stejnou funkční hodnotu a stejnou hodnotu všech parciálních derivací až do řadu m, kde m je stupeň polynomu. Než vyslovíme Taylorovu větu pro funkce n-proměnných zavedeme nejprve diferenciály vyšších řádů.

Definice 14.17 *Jestliže $x, k \in \mathbb{R}^n$ a $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{Z}$ jsou nezáporná čísla, pak* **diferenciál řádu l** *definujeme takto:*

$$d^l f(x)(k) = \sum_{j_1+\ldots+j_n=l} \frac{l!}{j_1! \cdots j_n!} \frac{\partial^l f}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}(x) k_1^{j_1} \cdots k_n^{j_n}.$$

Číslo $\dfrac{l!}{j_1! \cdots j_n!}$ charakterizuje, kolika různými změnami v pořadí derivování můžeme dostat příslušnou parciální derivaci.

Věta 14.18 **(Taylorova věta pro funkce více proměnných.)** *Nechť $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ a $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dále nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má všechny parciální derivace až do řádu $m+1$ v okolí bodu x_0. Je-li $h \in U(x_0)$, potom existuje $\xi \in (0,1)$ tak, že platí:*

$$f(x_0+h) = f(x_0)+df(x_0)(h)+\frac{d^2 f(x_0)(h)}{2}+\ldots+\frac{d^m f(x_0)(h)}{m!}+R_{m+1}, \quad (14.8)$$

$$\textit{kde} \qquad R_{m+1} = \frac{d^{m+1} f(x_0+\xi h)(h)}{(m+1)!}$$

je chyba Taylorova rozvoje.

Důkaz. Zaveďme pomocnou funkci jedné proměnné $F(t) := f(x_0+th)$. Potom máme $F(0) := f(x_0)$ a $F(1) := f(x_0+h)$ a dále podle Taylorovy věty pro funkci jedné proměnné dostaneme

$$F(1) = F(0)+F'(0)+\frac{F''(0)}{2}+\ldots+\frac{F^{(m)}(0)}{m!}+\frac{F^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}, \qquad \text{kde } \xi \in (0,1).$$

Derivace funkce F vypočteme podle věty o parciální derivaci složené funkce:

$$F'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i,$$

$$F''(0) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)h_i h_j$$

$$= \sum_{j_1+\ldots+j_n=2} \frac{2}{j_1!\ldots j_n!}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}}(x_0)h_1^{j_1}\ldots h_n^{j_n},$$

$$\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots$$

$$F^{(m)}(0) = \sum_{j_1+\ldots+j_n=m} \frac{m!}{j_1!\ldots j_n!} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}(x_0) h_1^{j_1} \ldots h_n^{j_n},$$

$$F^{(m+1)}(\xi) = \sum_{j_1+\ldots+j_n=m+1} \frac{(m+1)!}{j_1!\ldots j_n!} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}(x_0+\xi h) h_1^{j_1} \ldots h_n^{j_n},$$

kde $j_1, \ldots, j_n$ jsou nezáporná celá čísla. $\square$

Příklad 14.19 *Určeme Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[1,1]$ *pro funkci* $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$. *A s jeho pomocí přibližně spočtěme* $\dfrac{1,01}{0,99}$.

Nejprve vypočteme všechny potřebné derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-1}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{2x}{y^3}.$$

Potom podle předchozí věty

$$P_2(x,y) = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) +$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(1,1)\frac{(x-1)^2}{2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)\frac{(x-1)(y-1)}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(1,1)\frac{(y-1)^2}{2}$$

$$= 1 + (x-1) - (y-1) - (x-1)(y-1) + (y-1)^2$$

$$= y^2 - 2y - xy + 2x + 1.$$

A tedy

$$f(x,y) \approx y^2 - 2y - xy + 2x + 1 \quad v \text{ okolí bodu } [1,1],$$

$$\frac{1,01}{0,99} \approx P_2(1,01; 0,99) = 1,0202 \quad \left(\frac{1,01}{0,99} \approx 1,020202020\right).$$

Kapitola 15

Implicitní funkce

V této kapitole se budeme zabývat následujícím problémem: Máme zadánu funkci $F(x, y)$ dvou proměnných (obecně $(n+1)$-proměnných, potom $x \in \mathbb{R}^n$) a hledáme množinu

$$M = \{[x, y] : F(x, y) = 0\}.$$

Budeme studovat, jak tato množina vypadá. Konkrétně nás bude zajímat, za jakých předpokladů existuje funkce f tak, že $y = f(x)$. Tedy kdy lze jednu proměnnou vyjádřit jako funkci ostatních. Podívejme se nejprve na několik příkladů.

Příklad 15.1 *Je-li $F(x, y) = y - 3x$, potom množina bodů, které vyhovují rovnici $F(x, y) = 0$, je právě množina všech bodů ležících na přímce $y = 3x$.*

Příklad 15.2 *Je-li $F(x, y, z) = z + 2y - 3x + 1$, potom množina bodů, které vyhovují rovnici $F(x, y, z) = 0$, je právě množina všech bodů ležících v rovině*

$z = 3x - 2y - 1.$

V předchozích dvou příkladech se nám podařilo vyjádřit jednu proměnnou jako funkci ostatních. Ukážeme si ještě několik složitějších příkladů.

Příklad 15.3 *Je-li* $F(x, y) = (y-2)^2 + (x-1)^2 + 1$, *potom množina bodů, které vyhovují rovnici* $F(x, y) = 0$, *je prázdná množina.*

Příklad 15.4 *Je-li* $F(x, y) = (y-1)^2 + (x+1)^2 - 1$, *potom množina bodů, které vyhovují rovnici* $F(x, y) = 0$, *je právě množina všech bodů tvořících kružnici* $(y-1)^2 + (x+1)^2 = 1$.

Příklad 15.5 *Je-li* $F(x, y) = y^2 - x^2$, *potom množina bodů, které vyhovují rovnici* $F(x, y) = 0$ *tedy* $(y-x)(y+x) = 0$, *je právě množina všech bodů ležících buď na přímce* $y = x$ *nebo na přímce* $y = -x$.

Příklad 15.6 *Je-li* $F(x, y) = \sqrt{y^2x^2} + xy = |xy| + xy$, *potom množina bodů, které vyhovují rovnici* $F(x, y) = 0$, *je právě množina všech bodů vyhovujících nerovnosti* $xy \leq 0$ *(je to tedy množina všech bodů ležících buď v druhém nebo čtvrtém kvadrantu).*

V předchozích čtyřech příkladech nebylo možné vyjádřit jednu proměnnou jako funkci ostatních. Například v příkladu 15.5 pro libovolné $x \neq 0$ obdržíme dvě hodnoty $y_1 = x$ a $y_2 = -x$. Zúžíme proto náš problém takto: vezmu nějaký bod $[x_0, y_0] \in M$ a ptám se, zda je možné sestrojit kolem bodu $[x_0, y_0]$ dvourozměrný ($(n+1)$-rozměrný) interval J tak, aby $[x_0, y_0] \in J^o$ a zároveň aby bylo možné alespoň pro tu část množiny M, jež leží v intervalu J, vyjádřit proměnnou y jako funkci ostatních proměnných $y = f(x)$.

Všimněme si ještě jedné okolnosti, vezmeme-li v příkladu 15.4 y jako nezávislou proměnnou a x jako závislou. Potom postup naznačený v předchozím odstavci selže právě v těch bodech, ve kterých nabývá funkce $x = f_1(y) = \sqrt{1-(y-1)^2} - 1$ svého lokálního maxima a funkce $x = f_2(y) = -\sqrt{1-(y-1)^2} - 1$ svého lokálního minima – tedy v bodech, kde je derivace funkce podle y rovna nule. Dále máme

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y}(x(y), y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\frac{\partial x}{\partial y}$$

a odtud plyne, že v bodech, ve kterých je derivace funkcí f_1 a f_2 podle y rovna nule (tedy druhý sčítanec je roven nule), musí být i derivace funkce F podle y rovna nule. Snadno zkontrolujeme, že i v příkladech 15.5 a 15.6 není možně jednu proměnnou vyjádřit jako funkci ostatních v bodech, ve kterých je derivace funkce F podle y rovna nule. V následující větě uvidíte, že se jedná o postačující podmínku existence implicitní funkce:

Věta 15.7 **(O implicitní funkci.)** *Nechť $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ je spojitá v otevřeném $(n+1)$-rozměrném intervalu J obsahujícím bod $[x_0, y_0]$, kde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a $y_0 \in \mathbb{R}$. Dále předpokládejme, že funkce F má v intervalu J spojitou parciální derivaci podle proměnné y a $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, $F(x_0, y_0) = 0$, potom existuje otevřený interval $J_1 \subseteq J$, na němž je rovnicí $F(x, y) = 0$ určena právě jedna funkce $y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.*

Důkaz. Důkaz provedeme pro případ, kdy je $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$ v intervalu J. Opačný případ by se dokazoval podobně. Protože $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > \alpha > 0$ plyne ze spojitosti této derivace existence kladného čísla b takového, že pro všechny body $[x, y]$ z intervalu

$$I := (x_1^0 - b, x_1^0 + b) \times (x_2^0 - b, x_2^0 + b) \times \ldots \times (x_n^0 - b, x_n^0 + b) \times (y_0 - b, y_0 + b)$$

($x_0 = [x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0]$, $I \subseteq J$) platí nerovnost:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > \frac{\alpha}{2} \tag{15.1}$$

Funkce $F(x_0, y)$ jako funkce jedné proměnné y má v intervalu J kladnou derivaci a je tam rostoucí. Existuje tedy kladné číslo c tak, že body $[x_0, y_0+c]$ a $[x_0, y_0-c]$ leží v intervalu I a zároveň je $F(x_0, y_0+c) > 0$ a $F(x_0, y_0-c) < 0$ (protože $F(x_0, y_0) = 0$). Funkce $F(x, y_0+c)$ jako funkce proměnné x je v bodě x_0 spojitá a kladná. Funkce $F(x, y_0 - c)$ jako funkce proměnné x je v bodě x_0 spojitá a záporná. Existuje tedy kladné číslo d tak, že

$$F(x, y_0 + c) > 0, \quad F(x, y_0 - c) < 0 \quad \forall x \in U_d(x_0)$$

(okolí bereme v metrice ρ_{max}). Vezmeme-li nyní libovolné číslo $x_1 \in U_d(x_0)$, je funkce $F(x_1, y)$ jako funkce jedné proměnné y spojitá v intervalu $[y_0-c, y_0+c]$ a platí $F(x_1, y_0 + c) > 0$ a $F(x_1, y_0 - c) < 0$. Potom podle věty o nabývání hodnot existuje $y_1 \in (y_0-c, y_0+c)$ tak, že $F(x_1, y_1) = 0$. A protože je funkce $F(x_1, y)$ jako funkce jedné proměnné y rostoucí v intervalu $[y_0 - c, y_0 + c]$, nemůže v tomto intervalu existovat více než jedno y_1 tak, že $F(x_1, y_1) = 0$. Interval J_1 z tvrzení věty má potom tento tvar:

$$J_1 = (x_1^0 - d, x_1^0 + d) \times \ldots \times (x_n^0 - d, x_n^0 + d) \times (y_0 - c, x_0 + c).$$

$\square$

Nyní se podíváme, co můžeme říci o derivacích implicitní funkce.

Věta 15.8 **(O derivaci implicitní funkce.)** *Nechť* $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *má spojité parciální derivace až do řádu* m *v otevřeném* $(n+1)$*-rozměrném intervalu* J *obsahujícím bod* $[x_0, y_0]$, *kde* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *a* $y_0 \in \mathbb{R}$. *Dále předpokládejme, že* $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ *a* $F(x_0, y_0) = 0$, *potom existuje otevřený interval* $J_1 \subseteq J$, *na němž má funkce* $y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *(jednoznačně určena rovnicí* $F(x, f(x)) = 0$*) spojité parciální derivace až do řádu* m.

Důkaz. Podle předchozí věty existuje interval J_1, na němž existuje právě jedna funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ splňující $y = f(x)$ a $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$, $[x, f(x)] \in J_1$. Označme dále $e_i \in \mathbb{R}^n$ bod, který má i-tou složku rovnou jedné a ostatní složky rovny nule. Vezmeme-li dva body $[x_1, y_1]$, $[x_1 + he_i, y_1 + k]$ $(h, k \in \mathbb{R})$ z intervalu J_1 takové, že $y_1 = f(x_1)$ a $y_1 + k = f(x_1 + he_i)$. Potom $F(x_1 + he_i, y_1 + k(h)) = 0$, $F(x_1, y_1) = 0$ a podle věty o přírůstku funkce existují reálná čísla $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$ tak, že

$$0 = F(x_1 + he_i, y_1 + k) - F(x_1, y_1) = \tag{15.2}$$

$$F(x_1 + he_i, y_1 + k) - F(x_1 + he_i, y_1) + F(x_1 + he_i, y_1) - F(x_1, y_1) =$$
$$k\frac{\partial F}{\partial y}(x_1 + he_i, y_1 + \xi_2 k) + h\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1 + \xi_1 he_i, y_1).$$

Dále můžeme definovat funkci $k(h)$ rovnicí

$$k(h) := f(x_1 + he_i) - f(x_1)$$

a po dosazení do (15.2) dostaneme

$$h\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1 + \xi_1 he_i, f(x_1)) + k(h)\frac{\partial F}{\partial y}(x_1 + he_i, f(x_1) + \xi_2 k(h)) = 0.$$

Protože $\dfrac{\partial F}{\partial y} > \dfrac{\alpha}{2} > 0$ (viz (15.1)), plyne z předchozí rovnice

$$f(x_1 + he_i) - f(x_1) = k(h) = -\frac{h\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1 + \xi_1 he_i, f(x_1))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1 + he_i, f(x_1) + \xi_2 k(h))} \tag{15.3}$$

a z (15.1) dostaneme odhad:

$$|k(h)| \le \frac{2}{\alpha}\left| h\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1 + \xi_1 he_i, f(x_1))\right|. \tag{15.4}$$

Protože funkce $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ je spojitá, platí

$$\lim_{h\to 0}\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1 + \xi_1 he_i, f(x_1)) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, f(x_1)), \tag{15.5}$$

potom z (15.4) dostaneme

$$\lim_{h\to 0}|k(h)| \le \frac{2}{\alpha}\left|\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, f(x_1))\right| \lim_{h\to 0}|h| = 0.$$

Tedy pro $h \to 0$ se bod $[x_1 + he_i, y_1 + k(h)]$ blíží k bodu $[x_1, y_1]$ a ze spojitosti funkce $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ plyne

$$\lim_{h\to 0}\frac{\partial F}{\partial y}(x_1 + he_i, f(x_1) + \xi_2 k(h)) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_1, f(x_1)). \tag{15.6}$$

Potom z (15.3), (15.5) a (15.6) plyne

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1 + he_i) - f(x_1)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1+\xi_1 he_i, f(x_1))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1+\xi_1 he_i, f(x_1)+\xi_2 k(h))} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, f(x_1))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, f(x_1))}. \tag{15.7}$$

Ze spojitosti funkcí $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ a $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ dostáváme i spojitost funkce $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1)$.

Tím jsme dokázali tvrzení věty pro případ $m = 1$. Tvrzení pro $m > 1$ obdržíme snadno derivováním vztahu (15.7). Například:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x_1)$$

$$= -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_i}(x_1, f(x_1))\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, f(x_1)) + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial y}(x_1, f(x_1))\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1)\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, f(x_1))}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, f(x_1))\right)^2}$$

$$+\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, f(x_1))\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x_i}(x_1, f(x_1)) + \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, f(x_1))\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y}(x_1, f(x_1))\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1)}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, f(x_1))\right)^2}.$$

$\square$

Poznámka 15.9 *Víme-li již na základě předchozí věty, že derivace funkce f podle x_i existují, můžeme použít jiný postup k výpočtu jejích derivací. Tento postup spočívá v postupném derivování rovnice $F(x, f(x)) = 0$ $(y = f(x))$.*

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x,y) + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x_i}(x,y)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)^2 +$$

$$+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)=0.$$

Do poslední rovnice dosadíme $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ *a vypočítáme z ní* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$*. A takto můžeme postupovat dále.*

Poznámka 15.10 *Podmínka*

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$$

je pouze postačující podmínkou, nikoliv nutnou podmínkou pro existenci implicitně zadané funkce. V případě funkce $F(x,y)=y^3-x$ *je* $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0)=0$*, ale přesto je rovnicí* $F(x,y)=0$ *v okolí počátku implicitně určena funkce* $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$*.*

Příklad 15.11 *Určeme rovnici tečny v bodě* $[1,1]$ *ke křivce určené implicitně rovnicí* $F(x,y)=x^3+y^3-2xy=0$*.*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=3x^2-2y,\quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=3y^2-2x,\quad \frac{\partial F}{\partial y}(1,1)=1\neq 0$$

jsou tedy splněny předpoklady věty o derivaci implicitní funkce, takže existuje v jistém okolí bodu $[1,1]$ *implicitní funkce* $y=f(x)$*, jejíž derivace v bodě* 1 *je*

$$f'(1)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1)}=-\frac{1}{1}=-1.$$

Hledaná rovnice tečny je $y-1=-(x-1)$*.*

Příklad 15.12 *Určeme, zda křivka určená implicitně rovnicí*

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy = 0$$

leží v okolí bodu $[1,1]$ *nad tečnou nebo pod tečnou.*

Protože funkce F *má spojité derivace všech řádů podle obou proměnných v okolí bodu* $[1,1]$ *a navíc je* $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1) = 1 \neq 0$*, jsou tedy splněny předpoklady věty o implicitní funkci i věty o derivaci implicitní funkce. Takže v jistém okolí bodu* $[1,1]$ *existuje implicitně určená funkce* $y = f(x)$*, jež má derivace všech řádů v bodě 1. K výpočtu druhé derivace funkce* f *použijeme postup uvedený v poznámce 15.9:*

$$F'(x,f(x)) = 3x^2 + 3f^2(x)f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x) = 0,$$

$$F''(x,f(x)) = 6x + 6f(x)(f'(x))^2 + 3f^2(x)f''(x) - 4f'(x) - 2xf''(x) = 0.$$

Z předchozího příkladu víme, že $f'(1) = -1$ $([x,f(x)] = [1,1])$ *a po jejich dosazení do poslední rovnice dostaneme*

$$6 + 6 + 3f''(1) + 4 - 2f''(1) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f''(1) = -16.$$

To znamená, že implicitně zadaná funkce f *je v bodě 1 konkávní a tedy leží v okolí bodu* $[1,1]$ *pod tečnou.*

Příklad 15.13 *Vyšetřeme průběh implicitně zadané křivky*

$$F(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0.$$

Funkce F *není definována pro* $x = 0$*. Je-li* $x \neq 0$*, máme* $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y-x}{x^2+y^2}$*. To znamená, že pro* $y > x$ *je funkce* F *rostoucí ve směru osy* y *a pro*

$y < x$ *je funkce* F *klesající ve směru osy* y. *Nejprve se podívejme na funkční hodnoty na přímce* $y = x$:

$$F(x,x) = \ln \sqrt{x^2 + x^2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x} = \ln(|x|\sqrt{2}) - \frac{\pi}{4}.$$

Potom $F(x,x) = 0$ *pro* $|x| = \dfrac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$, $F(x,x) > 0$ *pro* $|x| > \dfrac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$ *a* $F(x,x) < 0$ *pro* $|x| < \dfrac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$. **Rozeberme postupně jednotlivé případy:**

1) Vezmeme-li pevné x_1 *tak, že* $|x_1| > \dfrac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$. *Potom je funkce* $F(x_1, y)$ *jedné proměnné* y *klesající pro* $y < x_1$, *rostoucí pro* $y > x_1$ *a* $F(x_1, x_1) > 0$. *Tedy funkce* $F(x_1, y)$ *má v bodě* $[x_1, x_1]$ *kladné absolutní minimum, takže neexistuje řešení rovnice* $F(x_1, y) = 0$.

2) Vezmeme-li pevné x_1 *tak, že* $|x_1| < \dfrac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$. *Potom je funkce* $F(x_1, y)$ *jedné proměnné* y *klesající pro* $y < x_1$, *rostoucí pro* $y > x_1$ *a* $F(x_1, x_1) < 0$. *Protože je funkce* $F(x_1, y)$ *spojitá a není shora omezená* $\lim\limits_{y \to \pm\infty} F(x_1, y) = \infty$ *existují dvě řešení rovnice* $F(x_1, y) = 0$. *Jedno větší než* x_1 *a druhé menší.*

3) Zbývají možnosti $y = x = \dfrac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$ *a* $y = x = -\dfrac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$ *– v obou případech máme jedno řešení (argumentace by byla stejná jako v prvním případě). Jedná se o tzv. „body obratu křivky“.*

Z předchozího a z věty o implicitní funkci plyne, že pokud zadanou křivku rozdělíme na čtyři dílčí křivky, tak **na každé z těchto oblastí můžeme** y

vyjádřit jako funkci proměnné x. *Jednotlivé oblasti budou vypadat takto:*

$$A:\ 0<x<\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}},\quad y>x,\qquad\qquad C:\ -\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}<x<0,\quad y>x,$$

$$B:\ 0<x<\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}},\quad y<x,\qquad\qquad D:\ -\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}<x<0,\quad y<x,$$

Dále protože funkce F má na těchto oblastech parciální derivace všech řadů, můžeme spočítat derivace funkce $y=f(x)$:

$$F'(x,f(x))=\frac{x+f(x)f'(x)}{x^2+f^2(x)}-\frac{1}{1+\frac{f^2(x)}{x^2}}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=0$$

$$\Leftrightarrow\qquad x+f(x)f'(x)-xf'(x)+f(x)=0\qquad\Leftrightarrow\qquad f'(x)=\frac{x+y}{x-y}.$$

$$f''(x)=\left(\frac{x+y}{x-y}\right)'=\left(-1+\frac{2x}{x-y}\right)'=\frac{2(x-y)-2x(1-f'(x))}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{-2y+2xf'(x)}{(x-y)^2}=\frac{-2y(x-y)+2x(x+y)}{(x-y)^3}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

Nejprve vyšetříme monotónii: *v oblasti A je $x+y>0$ a $x-y<0$, takže $f'<0$ a funkce je v této oblasti klesající. V oblasti B dostaneme pro $y=-x$:*

$$F(x,-x)=\ln\sqrt{x^2+x^2}-\operatorname{arctg}\frac{-x}{x}=\ln(|x|\sqrt{2})+\frac{\pi}{4}=0.$$

Tedy pro $x=-y=\dfrac{e^{\frac{-\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$ je $f'(x)=0$ a snadno ověříme, že druhá derivace je v tomto bodě kladná a nastává tam lokální minimum. Jinde v oblasti je derivace spojitá a různá od nuly, takže vlevo od bodu x je funkce klesající *a napravo rostoucí. Podobně pro oblasti C a D. V oblasti D je $x+y<0$ a $x-y>0$, takže $f'<0$ a funkce je v této oblasti klesající. V oblasti C dostaneme pro $y=-x$:*

$$F(x,-x)=\ln\sqrt{x^2+x^2}-\operatorname{arctg}\frac{-x}{x}=\ln(|x|\sqrt{2})+\frac{\pi}{4}=0.$$

Tedy pro $x=-y=-\dfrac{e^{\frac{-\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$ je $f'(x)=0$ a snadno ověříme, že druhá derivace je v tomto bodě kladná a nastává tam lokální maximum. Jinde v oblasti je derivace spojitá a různá od nuly, takže vlevo od bodu x je funkce rostoucí a napravo klesající.

Z druhé derivace plyne, *že funkce f je v oblastech A a C konkávní a v oblastech B a D konvexní.*

Abychom mohli nakreslit graf křivky spočteme ještě **limity v krajních bodech**. *V oblasti A máme*

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln\sqrt{x^2+f^2(x)}-\operatorname{arctg}\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\ln f(x)-\frac{\pi}{2}=0,$$

protože $f(x)>0$. Dostáváme tedy $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=e^{\frac{\pi}{2}}$. V oblasti B máme

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln\sqrt{x^2+f^2(x)}-\operatorname{arctg}\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\ln|f(x)|+\frac{\pi}{2}=0,$$

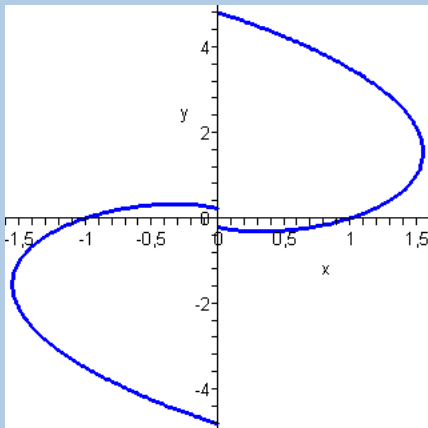
protože $f(x)<0$. Dostáváme tedy $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-e^{\frac{-\pi}{2}}$. V oblasti C máme

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln\sqrt{x^2+f^2(x)}-\operatorname{arctg}\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\ln f(x)+\frac{\pi}{2}=0,$$

protože $f(x) > 0$. *Dostáváme tedy* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = e^{\frac{-\pi}{2}}$. *V oblasti* D *máme*

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln\sqrt{x^2+f^2(x)} - \operatorname{arctg}\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \ln|f(x)| - \frac{\pi}{2} = 0,$$

protože $f(x) < 0$. *Dostáváme tedy* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -e^{\frac{\pi}{2}}$. *Nakonec načrtneme graf.*



Příklad 15.14 *Určeme rovnici tečné roviny v bodě* $[1,0,1]$ *k ploše určené rovnicí* $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - x - y - z = 0$.

Nejprve spočteme parciální derivace implicitně zadané funkce $z = f(x,y)$. *Funkce* F *má spojité parciální derivace všech řádů a dále* $\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,0,1) = 2 \neq 0$, takže jsou splněny předpoklady *věty o derivaci implicitní funkce*. V jistém okolí bodu $[1,0,1]$ tedy existuje implicitně určená funkce $z = f(x,y)$, jež má parciální derivace všech řádů v bodě $[1,0]$. Derivováním zadané funkce podle x a podle y dostaneme

$$3x^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} - 3yz - 3xy\frac{\partial z}{\partial x} - 1 - \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$
$$3y^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial y} - 3xz - 3xy\frac{\partial z}{\partial y} - 1 - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Tedy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x^2 - 3yz - 1}{-3z^2 + 3xy + 1}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3y^2 - 3xz - 1}{-3z^2 + 3xy + 1}.$$

Po dosazení $[x,y,z] = [1,0,1]$ *dostaneme* $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,0) = -1$ *a* $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,0) = 2$ *a tedy tečná rovina v bodě* $[1,0,1]$ *k zadané ploše má rovnici:*

$$z - 1 = -(x-1) + 2(y-0) \qquad \textit{nebo-li} \qquad x - 2y + z - 2 = 0.$$

Poznámka 15.15 *Pokud bychom v předchozím příkladu použili vzorec (15.7), dostali bychom vztah:*

$$z - z_0 = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0) - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)$$

a následně jednodušší vzorec pro výpočet tečné roviny k implicitní ploše:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0).$$

Kapitola 16

Extrémy funkcí více proměnných

1. Lokální extrémy

Vyšetřování extrémů funkcí více proměnných je jednou z nejdůležitějších částí diferenciálního počtu, protože s optimalizací se běžně setkáváme v každodenním životě (minimalizace nákladů a maximalizace zisku). Rovněž velké množství chemických a fyzikálních dějů lze popsat pomocí minimalizace nebo maximalizace. Například průběh chemických reakcí se popisuje pomocí minimalizace Gibbsovy energie, kde počet proměnných představuje počet chemických látek účastnících se chemické reakce – v tomto případě se počet proměnných počítá většinou na desítky. Začneme studiem lokálních extrémů (extrém = minimum nebo maximum).

Definice 16.1 *Řekneme, že funkce* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $c \in \mathbb{R}^n$ **lokální minimum**, *jestliže* $\exists \delta > 0$ *tak, že pro každý bod* $x \in P_\delta(c) \cap D(f)$ *platí* $f(c) \le f(x)$. *Jestliže pro každý bod* $x \in P_\delta(c) \cap D(f)$ *platí* $f(c) < f(x)$, *řekneme, že funkce* f *má v bodě* c **ostré lokální minimum**.

Definice 16.2 *Řekneme, že funkce* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $c \in \mathbb{R}^n$ **lokální maximum**, *jestliže* $\exists \delta > 0$ *tak, že pro každý bod* $x \in P_\delta(c) \cap D(f)$ *platí* $f(c) \ge f(x)$. *Jestliže pro každý bod* $x \in P_\delta(c) \cap D(f)$ *platí* $f(c) > f(x)$, *řekneme, že funkce* f *má v bodě* c **ostré lokální maximum**.

Příklad 16.3 *Funkce* $f(x,y) = x^2 + y^2$ *má v bodě* $[0,0]$ *ostré lokální minimum, protože* $f(0,0) = 0$ *a pro každé* $[x,y] \ne [0,0]$ *je* $f(x,y) > 0$. *Spočteme ještě derivace podle obou proměnných*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2y.$$

Parciální derivace existují ve všech bodech a jsou rovny nule jen v bodě $[0,0]$.

Příklad 16.4 *Funkce* $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ *má opět v bodě* $[0,0]$ *ostré lokální minimum, protože* $f(0,0) = 0$ *a pro každé* $[x,y] \ne [0,0]$ *je* $f(x,y) > 0$. *Spočteme ještě derivace podle obou proměnných*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \textit{pro } [x,y] \ne [0,0].$$

Spočteme ještě podle definice derivace v bodě $[0,0]$. *Pro obě derivace dostaneme*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}.$$

Tato limita neexistuje, protože limita zprava je rovna jedné a limita zleva je rovna mínus jedné. Tedy v bodě $[0,0]$ neexistuje ani jedna derivace a ve všech ostatních bodech existují vlastní parciální derivace.

Zdá se tedy, že pro funkce více proměnných je situace podobná jako pro funkce jedné proměnné. Přesnou charakterizaci poskytuje následující věta.

Věta 16.5 **(Nutná podmínka pro lokální extrém.)** *Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nemá v bodě $c \in \mathbb{R}^n$ lokální extrém, jestliže alespoň pro jedno přirozené číslo $i \leq n$ derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(c)$ existuje a je různá od nuly.*

Důkaz. Definujme funkci jedné proměnné $g(x_i) := f(c_1, \ldots, x_i, \ldots, c_n)$. Z předpokladu plyne, že funkce g je v bodě c_i buď rostoucí nebo klesající. V okolí bodu c_i existují tedy čísla y, z tak, že

$$f(c_1, \ldots, y, \ldots, c_n) > f(c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_n) > f(c_1, \ldots, z, \ldots, c_n).$$

Z toho plyne, že funkce f nemůže mít v bodě c lokální extrém. □

Poznámka 16.6 **Při hledání lokálních extrémů funkcí více proměnných nás tedy zajímají pouze body, v nichž se buď všechny parciální derivace prvního řádu rovnají nule nebo neexistují.**

Příklad 16.7 *Funkce $f(x,y) = 2x^2 - 2y^2$ nemá lokální extrém. Spočteme nejprve derivace podle obou proměnných*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -4y.$$

Tedy ve všech bodech existují vlastní parciální derivace a obě jsou rovny nule pouze v bodě $[0,0]$. Ale v tomto bodě nemůže být lokální extrém, protože pro *libovolné číslo h, platí* $f(0,h) = -2h^2 \le f(0,0) = 0 \le f(h,0) = 2h^2$*. V tomto bodě je tzv. sedlový bod (viz. obrázek 7).*

Podobně jako u funkcí jedné proměnné, je postačující podmínka existence lokálního extrému formulována pomocí derivací druhého řádu. Nejprve ale budeme potřebovat jeden pojem z lineární algebry.

Definice 16.8 *Nechť* $a_{ij} \in \mathbb{R}$ *pro* $i \in \{1,\dots,n\}$, $j \in \{1,\dots,i\}$. *Řekneme, že* **kvadratická forma (funkce)**

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_ix_j$$

($x = [x_1,\dots,x_n]$) *je* **pozitivně definitní**, *jestliže* $Q(x) > 0$ *pro všechna* $x \ne [0,\dots,0]$. **Kvadratická forma Q je pozitivně semidefinitní**, *jestliže* $Q(x) \ge 0$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}^n$ *a existuje-li bod* $x \ne [0,\dots,0]$ *tak, že* $Q(x) = 0$. **Kvadratická forma Q je negativně definitní**, *jestliže* $Q(x) < 0$ *pro všechna* $x \ne [0,\dots,0]$. **Kvadratická forma Q je negativně semidefinitní**, *jestliže* $Q(x) \le 0$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}^n$ *a existuje-li bod* $x \ne [0,\dots,0]$ *tak, že* $Q(x) = 0$. *A existují-li body* $y, z \in \mathbb{R}^n$ *tak, že* $Q(y) < 0$ *a* $Q(z) > 0$ *říkáme* **kvadratická forma Q je indefinitní**.

Poznámka 16.9 **Jak poznáme, ke kterému z těchto pěti druhů patří forma** Q? *Mohou nastat tři možnosti:*

1. $a_{ij} = 0$ *pro* $i, j \in \{1,\dots,n\}$.
2. *Existují* i, j *tak, že* $a_{ii} = a_{jj} = 0$ *a* $a_{ij} \ne 0$ $(i < j)$.
3. *Nenastává ani případ 1. ani případ 2., existuje tedy nějaké* $a_{jj} \ne 0$, *třeba (eventuálně po případném přečíslování)* $a_{11} \ne 0$.

Začneme třetím případem. V tomto případě lze psát

$$Q(x_1,\dots,x_n)=\frac{(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n)^2}{a_{11}}+Q_1(x_2,\dots,x_n).$$

Jestliže forma Q_1 opět patří k třetí možnosti, mohu takto pokračovat dále a nakonec (eventuálně po vhodném přečíslování proměnných) dostaneme buď vyjádření

$$Q(x_1,\dots,x_n)=A_1(c_{11}x_1+c_{12}x_2+\dots+c_{1n}x_n)^2+ \tag{16.1}$$
$$A_2(c_{22}x_2+c_{23}x_3+\dots+c_{2n}x_n)^2+\dots+A_n(c_{nn}x_n)^2$$

nebo vyjádření

$$Q(x_1,\dots,x_n)=A_1(c_{11}x_1+c_{12}x_2+\dots+c_{1n}x_n)^2+\dots+ \tag{16.2}$$
$$A_k(c_{kk}x_k+\dots+c_{kn}x_n)^2+Q_k(x_{k+1},\dots,x_n),$$

kde forma Q_k je buď typu 1. nebo typu 2. a čísla c_{jj} a A_j jsou různá od nuly.

Je zřejmé, že forma (16.1) nebo (16.2) nabývá při vhodné volbě hodnot $x_1,\dots,x_n$ téhož znaménka jako číslo A_j. Stačí totiž volit $x_l=0$ pro $l>j$, $x_j=1$ a určit postupně $x_{j-1},x_{j-2},\dots,x_1$ z rovnic

$$c_{j-1,j-1}x_{j-1}+c_{j-1,j}x_j=0,$$
$$c_{j-2,j-2}x_{j-2}+c_{j-2,j-1}x_{j-1}+c_{j-2,j}x_j=0,\quad \dots .$$

Mají-li tedy dvě z čísel A_j v (16.1) nebo (16.2) opačná znaménka, je forma Q **indefinitní**. *Je-li v (16.2) forma Q_k typu 2.: mohu volit $x_h=0$ pro $h>k$ a $h\neq i$, $h\neq j$ a jednou $x_i=x_j=1$ a podruhé $x_i=-x_j=1$. Ostatní čísla $x_k,x_{k-1},\dots,x_1$ volím tak, aby se činitelé při $A_k,A_{k-1},\dots,A_1$ rovnali nule. Potom forma Q nabývá jednou kladné a podruhé záporné hodnoty – je tedy* *opět* **indefinitní**. *Mají-li všechna A_j v (16.2) stejné znaménko a je-li forma Q_k typu 1., je forma Q* **semidefinitní** *(volím $x_{k+1}, \ldots, x_n$ libovolně a čísla $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1$ volím opět tak, aby se činitelé při $A_k, A_{k-1}, \ldots, A_1$ rovnali nule). A nakonec mají-li všechna A_j v (16.1) kladné znaménko je forma Q* **pozitivně definitní**, *mají-li naopak všechna A_j v (16.1) záporné znaménko je forma Q* **negativně definitní** *– Q je totiž rovno nule, právě když*

$$c_{nn}x_n = 0, \quad c_{n-1,n-1}x_{n-1} + c_{n-1,n}x_n = 0, \quad \ldots,$$

z čehož postupně vypočteme $x_n = 0$, $x_{n-1} = 0, \ldots, x_1 = 0$.

Příklad 16.10 *Uveďme několik příkladů:*

- $Q(x, y) = x^2 + y^2$ *je pozitivně definitní forma.*
- $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 \geq 0$ *je pozitivně semidefinitní forma, protože pro libovolný bod ve tvaru $[0, 0, z]$ je $Q(0, 0, z) = 0$.*
- $Q(x, y) = x^2 - y^2$ *je indefinitní forma, protože pro $h \neq 0$ máme $h^2 = Q(h, 0) > 0 > Q(0, h) = -h^2$.*
- $Q(x, y) = -4x^2 - 9y^2$ *je negativně definitní forma.*
- $Q(x, y) = -x^2 - 2xy - y^2 = -(x + y)^2 \leq 0$ *je negativně semidefinitní forma, protože pro libovolný bod ve tvaru $[x, -x]$ je $Q(x, -x) = 0$.*
- $Q(x, y, z) = x^2 - 2xy + y^2 + 2yz + z^2 = (x - y)^2 + (y + z)^2 - y^2$ *je indefinitní forma, protože $Q(0, 0, 1) = 1$ a $Q(1, 1, -1) = -1$.*
- $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2 = (x + y + z)^2 \geq 0$ *je pozitivně semidefinitní forma, protože pro libovolný bod ve tvaru $[x, y, -x - y]$ je $Q(x, y, -x - y) = 0$.*

Věta 16.11 (Postačující podmínka pro lokální extrém.) *Nechť má funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě $c \in \mathbb{R}^n$ spojité všechny parciální derivace druhého řádu a nechť jsou v tomto bodě všechny parciální derivace prvního řádu rovny nule. Sestrojme kvadratickou formu*

$$Q(h) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c) \qquad \textit{kde } h \in \mathbb{R}^n. \tag{16.3}$$

Potom platí

- *Je-li Q pozitivně definitní, má funkce f v bodě c ostré lokální minimum.*
- *Je-li Q negativně definitní, má funkce f v bodě c ostré lokální maximum.*
- *Je-li Q indefinitní, nemá funkce f v bodě c lokální extrém.*

Důkaz. Z existence spojitých parciálních derivací druhého řádu v bodě c plyne spojitost parciálních derivací prvního řádu v jistém okolí $U_\delta(c)$ ($\delta > 0$). Potom z Taylorovy věty pro funkce více proměnných plyne, že pro $0 < ||h||_{max} < \delta$ je

$$f(c+h) - f(c) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(c + \xi h), \quad (0 < \xi < 1). \tag{16.4}$$

Protože funkce $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ mají v bodě c spojité parciální derivace, mají také totální diferenciál. Navíc všechny parciální derivace funkce f v bodě c jsou rovny nule, takže postupně dostaneme:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(c + \xi h) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(c + \xi h) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(c) \tag{16.5}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \xi h_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(c) + ||\xi h||_{max} r_j(\xi h),$$

kde $\lim\limits_{h \to [0,\dots,0]} r_j(h) = 0$. Využijeme-li toho, že $||\xi h||_{max} = \xi ||h||_{max}$ a dosadíme-li z (16.5) do (16.4):

$$f(c+h) - f(c) = \sum_{j=1}^{n} h_j \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\xi h_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(c) \right) + \xi ||h||_{max} r_j(\xi h) \right). \quad (16.6)$$

Definujme pro $h \neq [0,\dots,0]$ funkci $r(h)$ vztahem $r(h)||h||_{max} = \sum\limits_{j=1}^{n} r_j(\xi h) h_j$.

Potom platí

$$\lim_{h \to [0,\dots,0]} |r(h)| = \lim_{h \to [0,\dots,0]} \frac{\sum_{j=1}^{n} |r_j(\xi h)||h_j|}{||h||_{max}}$$

$$\leq \lim_{h \to [0,\dots,0]} \sum_{j=1}^{n} |r_j(\xi h)| = \sum_{j=1}^{n} \lim_{h \to [0,\dots,0]} |r_j(\xi h)| = 0.$$

Tedy i $\lim\limits_{h \to [0,\dots,0]} r(h) = 0$ a po dosazení funkcí r a Q do (16.6) dostaneme

$$f(c+h) - f(c) = \xi \left(Q(h) + ||h||_{max}^2 r(h) \right). \quad (16.7)$$

Nyní definujme množinu $M = \{h \in \mathbb{R}^n, \ ||h||_{max} = 1\}$

1. Nechť Q je pozitivně definitní. Protože množina M je omezená a uzavřená a funkce Q je spojitá, potom podle věty o nabývání minima a maxima existuje $A > 0$ a bod $h^0 \in M$ tak, že $A = \inf_{h \in M} Q(h) = Q(h^0)$. Potom platí

$Q(h) \geq A||h||^2_{max}$. To je jasné pro $h = [0, \ldots, 0]$, jinak položme $h' = \dfrac{h}{||h||_{max}}$, tedy $h' \in M$ $(||h'||_{max} = 1)$ a

$$A \leq Q(h') = Q\left(\frac{h}{||h||_{max}}\right) = \frac{Q(h)}{||h||^2_{max}}.$$

Potom z (16.7) pro $0 < ||h||_{max} < \delta$ platí

$$f(c+h) - f(c) \geq \xi ||h||^2_{max} \left(A + r(h)\right).$$

Protože $\xi > 0$, $A > 0$ a $\lim\limits_{h \to [0,\ldots,0]} r(h) = 0$, existuje $\delta_1 > 0$ tak, že pro $0 < ||h||_{max} < \delta_1$ je $f(c+h) - f(c) > 0$ a tedy funkce f má v bodě c ostré lokální minimum.

2. Je-li Q negativně definitní, aplikuji předchozí postup na funkci $-f$.

3. Je-li Q indefinitní, existují body $a, b \in \mathbb{R}^n$ tak, že $Q(a) > 0 > Q(b)$. Je-li $t > 0$, plyne z (16.7)

$$f(c+ta) - f(c) = \xi t^2 \left(Q(a) + ||a||^2_{max} r(ta)\right),$$

$$f(c+tb) - f(c) = \xi t^2 \left(Q(b) + ||b||^2_{max} r(tb)\right).$$

Protože $\lim\limits_{t \to 0^+} r(ta) = 0$ a $\lim\limits_{t \to 0^+} r(tb) = 0$, existuje $\delta_2 > 0$ tak, že pro $0 < t < \delta_2$ je $f(c+ta) > f(c) > f(c+tb)$ a tedy funkce f nemůže mít v bodě c lokální extrém. $\square$

V semidefinitním případě může, ale nemusí nastat extrém. Ukážeme si to na několika příkladech:

Příklad 16.12 *Najděte lokální extrémy funkce* $f(x, y) = x^2 + x^2 y^2$.

Nejprve spočteme první derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x(1+y^2), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y.$$

Obě první derivace jsou rovny nule v libovolném bodě ve tvaru $[0,y]$. *Jinde parciální derivace existují a minimálně jedna z nich je různá od nuly, takže jinde nemůže nastat lokální extrém. Dále spočteme druhé derivace a sestrojíme kvadratickou formu:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = 2(1+y^2), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = 4x^2.$$

Tedy v bodech $[0,y]$ *dostaneme*

$$Q(h,k) = 2(1+y^2)h^2,$$

takže Q *je pozitivně semidefinitní. Ale protože* $f(x,y) = x^2 + x^2y^2 \geq 0$ *a* $f(0,y) = 0$ *je v libovolném bodě ve tvaru* $[0,y]$ *neostré lokální minimum.*

Příklad 16.13 *Najděte lokální extrémy funkce* $f(x,y) = x^2 + y^3$.

Nejprve spočteme první derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2.$$

Obě první derivace jsou rovny nule v bodě $[0,0]$. *Jinde parciální derivace existují a minimálně jedna z nich je různá od nuly, takže jinde nemůže nastat lokální extrém. Dále spočteme druhé derivace a sestrojíme kvadratickou formu:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = 6y.$$

Tedy v bodě $[0,0]$ *dostaneme*

$$Q(h,k) = 2h^2,$$

takže Q *je pozitivně semidefinitní. Ale funkce* $f_1(y) := f(0,y) = y^3$ *je v bodě* $y = 0$ *rostoucí, takže funkce* f_1 *nemůže mít v bodě* $y = 0$ *lokální extrém a tedy ani funkce* f *nemůže mít v bodě* $[0,0]$ *lokální extrém.*

Příklad 16.14 *Najděte lokální extrémy funkce* $f(x,y) = x^2 + y^4$.

Nejprve spočteme první derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3.$$

Obě první derivace jsou rovny nule v bodě $[0,0]$. *Jinde parciální derivace existují a minimálně jedna z nich je různá od nuly, takže jinde nemůže nastat lokální extrém. Dále spočteme druhé derivace a sestrojíme kvadratickou formu:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = 12y^2.$$

Tedy v bodě $[0,0]$ *dostaneme opět*

$$Q(h,k) = 2h^2,$$

takže Q *je pozitivně semidefinitní. Ale protože* $f(x,y) = x^2 + y^4 > 0$ *pro* $[x,y] \neq [0,0]$ *a* $f(0,0) = 0$ *je v bodě* $[0,0]$ *ostré lokální minimum.*

Příklad 16.15 **Klasifikujte formu** $\mathbf{Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2}$.

Formu doplníme na čtverce a využijeme odvozenou obecnou klasifikaci. Je-li $a \neq 0$ *dostaneme:*

$$Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2 = a\left(h + \frac{bk}{a}\right)^2 - \frac{b^2k^2}{a} + ck^2$$
$$= a\left(h + \frac{bk}{a}\right)^2 + \frac{k^2}{a}(ac - b^2).$$

Je-li $b^2 = ac$, je forma Q je semidefinitní, protože budeme mít jen jeden čtverec. Je-li $b^2 < ac$, budeme mít dva čtverce se stejnými znaménky. Pro $a > 0$ je forma Q pozitivně definitní a pro $a < 0$ je forma Q negativně definitní. Je-li $b^2 > ac$, budeme mít dva čtverce s opačnými znaménky, takže forma Q je indefinitní. Je-li $a = 0$ a $b \neq 0$, je funkce $Q_1(h) := Q(h,1) = 2bh + c$ lineární (není shora ani zdola omezená), takže forma Q je indefinitní.

Poznámka 16.16 **Má-li tedy funkce f dvou proměnných spojité parciální derivace druhého řádu a v bodě $[x,y]$ má obě parciální derivace prvního řádu rovny nule, plyne z předchozího příkladu:**

- **Je-li** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) > \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2$ **a** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) > 0$, **má funkce f v bodě $[x,y]$ ostré lokální minimum.**
- **Je-li** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) > \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2$ **a** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) < 0$, **má funkce f v bodě $[x,y]$ ostré lokální maximum.**
- **Je-li** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) < \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2$ **nemá funkce f v bodě $[x,y]$ lokální extrém.**

Příklad 16.17 *Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.*

Nejprve zjistíme, kde jsou první derivace rovny nule:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x = 0.$$

Z první rovnice máme, že $y = x^2$ *a po dosazení do druhé rovnice dostaneme:*

$$0 = x^4 - x = x(x^3 - 1) = x(x-1)(x^2 + x + 1).$$

Rovnice má dvě řešení $x_1 = 0$ *a* $x_2 = 1$ $(x^2 + x + 1 > 0)$, *takže jsme nalezli dva podezřelé body* $[0,0]$ *a* $[1,1]$. *Jinde parciální derivace existují a minimálně jedna z nich je různá od nuly, takže jinde nemůže být lokální extrém. Nyní aplikujeme předchozí poznámku:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = 6y.$$

V bodě $[0,0]$ *extrém nenastává, protože* $a = c = 0$ *a* $b = -3$, *zatímco v bodě* $[1,1]$ *má funkce* f *ostré lokální minimum, protože* $a = c = 6$ *a* $b = -3$.

Příklad 16.18 *Najděte lokální extrémy funkce* $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xy - 3xz - 3yz$.

Parciální derivace existují v každém bodě. Položíme je tedy rovny nule:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3(x^2 - y - z) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 3(y^2 - x - z) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3(z^2 - x - y) = 0.$$

Z první rovnice vyjádříme $z = x^2 - y$ *a dosadíme do ostatních rovnic:*

$$0 = y^2 - x - x^2 + y = y^2 - x^2 + y - x = (y-x)(y+x+1), \; 0 = (x^2 - y)^2 - x - y.$$

Z první rovnice plyne, že buď $y = x$ *nebo* $y = -x - 1$*. V prvním případě dosadíme do druhé rovnice* $y = x$*:*

$$0 = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x = x(x-2)(x^2+1).$$

Protože $x^2+1 > 0$*, máme tedy dva podezřelé body* $[0,0,0]$ *a* $[2,2,2]$*. V druhém případě dosadíme do druhé rovnice* $y = -x - 1$*:*

$$0 = (x^2 - y)^2 - x - y = (x^2 + x + 1)^2 + 1.$$

Tato rovnice nemá reálné řešení, protože oba sčítance jsou kladné. Dále spočteme druhé derivace.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -3,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = 6y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z} = 6z.$$

Nakonec pro oba body sestrojíme kvadratickou formu. Pro bod $[0,0,0]$ *máme*

$$Q(h_1,h_2,h_3) = -6h_1h_2 - 6h_1h_3 - 6h_2h_3.$$

Nastal tedy druhý případ v poznámce 16.9, takže forma je indefinitní a v bodě $[0,0,0]$ *není extrém. Pro bod* $[2,2,2]$ *dostaneme*

$$Q(h_1,h_2,h_3) = 6(2h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2 - h_1h_2 - h_1h_3 - h_2h_3).$$
$$= 12\left(\left(h_1 - \frac{h_2}{4} - \frac{h_3}{4}\right)^2 + \frac{15h_2^2}{16} + \frac{15h_3^2}{16} - \frac{5h_2h_3}{8}\right)$$
$$= 12\left(\left(h_1 - \frac{h_2}{4} - \frac{h_3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}h_2}{4} - \frac{5h_3}{\sqrt{154}}\right)^2 + \frac{5h_3^2}{6}\right).$$

Tato forma je pozitivně definitní a v bodě $[2, 2, 2]$ je ostré lokální minimum.

2. Vázané extrémy

V této části se budeme zabývat následujícím problémem: Máme zadány funkce $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a definujme množinu $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \ g(x) = 0\}$. Dále předpokládejme, že $M \subseteq D(f)$. Nyní budeme v množině M hledat body, ve kterých funkce f nabývá lokální extrémy (tzv. **vázané extrémy**). Nejprve ale definujme okolí množiny

Definice 16.19 *Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je množina, ϱ metrika na množině $\mathbb{R}^n$. Pro každé $\varepsilon > 0$ nazveme množinu všech bodů $x \in \mathbb{R}^n$, pro která je $\varrho(x, M) < \varepsilon$* **(epsilonovým) okolím množiny** M *a budeme je značit $U_\varepsilon(M)$.*

Návod k hledání vázaných extrémů poskytuje následující věta.

Věta 16.20 **(Nutná podmínka pro vázaný extrém.)** *Nechť funkce $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mají na okolí množiny $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \ g(x) = 0\}$ spojité parciální derivace prvního řádu. Dále nechť v každém bodě množiny M je alespoň jedna parciální derivace prvního řádu funkce g různá od nuly. Má-li funkce f v bodě $a \in M$ lokální extrém v množině M, pak existuje konstanta λ (Lagrangeův multiplikátor) tak, že pro Lagrangeovu funkci*

$$F(x) := f(x) + \lambda\, g(x)$$

jsou v bodě a splněny rovnice

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \text{pro } i \in \{1, 2, \ldots, n\} \qquad \text{a} \qquad g(a) = 0.$$

Důkaz. Nechť $a = [a_1, \ldots, a_n] \in M$, dále předpokládejme, že například parciální derivace $\dfrac{\partial g}{\partial x_n}$ je v bodě a různá od nuly. Potom podle věty o implicitní funkci existuje okolí bodu $U(a)$, na němž je rovnicí $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$ určena právě jedna funkce $x_n = h(x_1, \ldots, x_{n-1})$ a tato funkce má podle věty o derivaci implicitní funkce spojité parciální derivace prvního řádu podle všech proměnných. Z toho plyne, že místo, abychom vyšetřovali lokální extrémy funkce f v bodě a, můžeme vyšetřovat lokální extrémy funkce:

$$K(x_1, \ldots, x_{n-1}) := f(x_1, \ldots, x_{n-1}, h(x_1, \ldots, x_{n-1}))$$

v bodě $\alpha = [a_1, \ldots, a_{n-1}]$. Funkce K musí splňovat nutnou podmínku pro lokální extrém pro $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$:

$$\frac{\partial K}{\partial x_i}(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) = 0. \tag{16.8}$$

Nyní potřebujeme spočítat neznámé parciální derivace funkce h derivováním rovnice $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, h(x_1, \ldots, x_{n-1})) = 0$ a pro $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ platí, že:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\alpha) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial g}{\partial x_n}(a)\frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(a)}.$$

Po dosazení do podmínek (16.8) pro $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ dostaneme:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\frac{-\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(a)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(a)}.$$

A rovnice (16.8) platí, právě když lze nalézt λ tak, že derivace funkce $F = f + \lambda\, g$ podle proměnných $x_1, \ldots, x_{n-1}$ v bodě a jsou rovny nule. Zbývá ještě ověřit, že i derivace funkce F podle x_n je v bodě a rovna nule, ale platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x_n}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) + \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(a)} \frac{\partial g}{\partial x_n}(a) = 0.$$

□

Poznámka 16.21 *Podle předchozí věty najdu body, ve kterých by mohl nastat vázaný extrém. K rozhodnutí, zda-li v těchto bodech je nebo není vázaný extrém mohu použít postačující podmínku pro lokální extrém následujícím způsobem:* **Využiji k tomu poznatky z předchozího důkazu, který hledání vázaného extrému převádí na hledaní extrému funkce** $f(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1}))$. **Vzhledem k tomu, že analytický předpis funkce** h **není ve většině případů znám, využiji k výpočtu parciálních derivací funkce** h **potřebných při konstrukci kvadratické formy** Q **(ve které vystupují parciální derivace druhého řádu funkce** f **a tedy v ní vystupují i parciální derivace druhého řádu funkce** h**) derivace rovnice** $g(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0$. *V důkazu předchozí věty jsme tímto způsobem spočítali parciální derivace prvního řádu funkce* h *a pokud tuto rovnici zderivujeme podruhé a dosadíme tam již vypočtené parciální derivace prvního řádu funkce* h*, můžeme odtud vypočíst i parciální derivace druhého řádu funkce* h*. Nakonec klasifikujeme kvadratickou formu* Q*. Pokud se jedná o funkci dvou proměnných dostaneme tímto postupem funkci jedné proměnné* $f(x_1, h(x_1))$*.*

Ukážeme si tento postup v následujícím příkladu.

Příklad 16.22 *Hledejme lokální extrémy funkce* $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ *na množině* $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0\}$.

Postup v předchozí větě není možné použít v bodech splňujících rovnice:

$$g(x,y)=x^2-2x+2y^2+4y=0,\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=2x-2=0,\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=4y+4=0.$$

Druhé a třetí rovnici vyhovuje pouze bod $[1,-1]$, *ale tento bod nevyhovuje první rovnici. Soustava nemá řešení a můžeme sestrojit Lagrangeovu funkci:*

$$F(x,y):=f(x,y)+\lambda\, g(x,y)=x^2+2y^2+\lambda(x^2-2x+2y^2+4y)$$

a hledáme řešení soustavy rovnic z předchozí věty:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=2x+2\lambda(x-1)=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=4y+4\lambda(y+1)=0,$$

$$g(x,y)=x^2-2x+2y^2+4y=0.$$

Pro $\lambda\neq-1$ *(pro* $\lambda=-1$ *nemá soustava řešení) dostanu z první rovnice* $x=\dfrac{\lambda}{\lambda+1}$ *a z druhé rovnice* $y=\dfrac{-\lambda}{\lambda+1}$. *Po dosazení do třetí rovnice obdržíme*

$$\frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2}-2\frac{\lambda}{\lambda+1}+\frac{2\lambda^2}{(\lambda+1)^2}+4\frac{-\lambda}{\lambda+1}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \lambda^2-2(\lambda^2+\lambda)+2\lambda^2-4(\lambda^2+\lambda)=0\quad\Leftrightarrow\quad -3\lambda^2-6\lambda=0,$$

takže $\lambda_1=0$ *a* $\lambda_2=-2$. *Máme tedy dva podezřelé body:* $[0,0]$ *pro* $\lambda_1=0$ *a* $[2,-2]$ *pro* $\lambda_1=-2$.

Podle věty o implicitní funkci můžeme v okolí bodů $[0,0]$ *a* $[2,-2]$ *psát*

$$f(x,h(x))=x^2+2h^2(x)\quad a\quad g(x,h(x))=x^2-2x+2h^2(x)+4h(x)=0.$$

Dále podle věty o derivaci implicitní funkce má funkce h spojité derivace všech řádů. Potom derivováním druhé rovnice dostaneme

$$2x-2+4h(x)h'(x)+4h'(x)=0,\quad 2+4h'(x)h'(x)+4h(x)h''(x)+4h''(x)=0.$$

Z $h(0) = 0$ *plyne, že* $h'(0) = \dfrac{1}{2}$ *a* $h''(0) = -\dfrac{3}{4}$ *a z* $h(2) = -2$ *plyne, že* $h'(2) = \dfrac{1}{2}$ *a* $h''(2) = \dfrac{3}{4}$*. Nakonec zderivujeme funkci* f

$$f'(x, h(x)) = 2x + 4h(x)h'(x), \quad f''(x, h(x)) = 2 + 4h'(x)h'(x) + 4h(x)h''(x).$$

Tedy $f''(0, h(0)) = 3$*, takže funkce* f *má v bodě* $[0, 0]$ *ostré lokální minimum v množině* M *a* $f''(2, h(2)) = -3$*, takže funkce* f *má v bodě* $[2, -2]$ *ostré lokální maximum v množině* M*.*

Poznámka 16.23 **Jak plyne z důkazu předchozí věty, nejjednodušší je situace, kdy lze z rovnice** $g(x) = 0$ **vyjádřit jednu proměnnou jako funkci ostatních (například** $x_n = h(x_1, \dots, x_{n-1})$**). Tuto funkci můžeme následně dosadit do funkce** f **a místo vázaných extrémů vyšetřovat lokální extrémy funkce** $f(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1}))$.

3. Absolutní extrémy

Definice 16.24 *Nechť je dán bod c a funkce* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, definovaná v množině* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *obsahující bod c. Jestliže* $f(x) \le f(c)$ *pro všechna* $x \in M$ *říkáme, že funkce* f *má v bodě c* **absolutní (globální) maximum v množině M**.

Definice 16.25 *Nechť je dán bod c a funkce* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, definovaná v množině* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *obsahující bod c. Jestliže* $f(x) \ge f(c)$ *pro všechna* $x \in M$ *říkáme, že funkce* f *má v bodě c* **absolutní (globální) minimum v množině M**.

V úvodní kapitole o funkcích více proměnných jsme dokázali větu o nabývání minima a maxima. Tato věta říká, že funkce f spojitá v každém bodě uzavřené a omezené množiny $M \subset \mathbb{R}^n$ nabývá v množině M své nejmenší a největší hodnoty. Uvedeme si ještě užitečnou větu, která popisuje, jak tyto body najít.

Věta 16.26 **(Hledání absolutních extrémů.)** *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definovaná v uzavřené a omezené množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Má-li funkce f v bodě $c \in M$ absolutní maximum na množině M, potom bod c buď leží na hranici množiny M nebo má funkce f v bodě c lokální maximum. Obdobně má-li funkce f v bodě $d \in M$ absolutní minimum na množině M, potom bod d buď leží na hranici množiny M nebo má funkce f v bodě d lokální minimum.*

Důkaz. Není-li bod c krajním bodem intervalu I, existuje $\delta > 0$ tak, že $P_\delta(c) \subset M$ a podle předpokladu je $f(x) \leq f(c)$ pro $\forall x \in P_\delta(c)$. Tedy funkce f má v bodě c lokální maximum. Podobně pro minimum. $\square$

Nakonec si postup při hledání absolutních extrémů na uzavřených a omezených množinách ukážeme na několika příkladech.

Příklad 16.27 *V trojúhelníku tvořeném souřadnými osami a tečnou ke grafu funkce $g(x) = \dfrac{4}{x}$ v bodě $[2, 2]$ určete nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$.*

Protože $g'(x) = \dfrac{-4}{x^2}$ a $g'(2) = -1$, má příslušná tečna rovnici $y - 2 = -x + 2$. Tedy množina M je uzavřená a omezená:

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, y \leq 4 - x\}.$$

Nejprve najdeme body, ve kterých mohou být lokální extrémy:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y - 2x + 1 = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - 2y + 1 = 0.$$

Tato soustava rovnic má jedno řešení $[1,1] \in M$ *a* $f(1,1) = 1$.

Další podezřelé body hledáme na hranici množiny M. *Protože absolutní extrémy mohou nastat v krajních bodech úseček, můžeme mezi podezřelé body přidat všechny krajní body úseček:* $f(0,0) = 0$, $f(4,0) = -12$ **a** $f(0,4) = -12$. *Nyní budeme hledat vázané extrémy uvnitř jednotlivých úseček podle poznámky (16.23):*

1. $y = 0$, $x \in (0,4)$. *Po dosazení dostaneme* $u(x) = f(x,0) = x - x^2$ *a hledáme lokální extrémy této funkce na intervalu* $(0,4)$. *Položíme derivaci rovnu nule* $u'(x) = 1 - 2x = 0$ *a najdeme podezřelý bod* $x = \frac{1}{2}$. $f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{4}$.

2. $x = 0$, $y \in (0,4)$. *Po dosazení dostaneme* $v(y) = f(0,y) = y - y^2$ *a hledáme lokální extrémy této funkce na intervalu* $(0,4)$. *Položíme derivaci rovnu nule* $v'(y) = 1 - 2y = 0$ *a najdeme podezřelý bod* $y = \frac{1}{2}$. $f\left(0, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

3. $y = 4 - x$, $x \in (0,4)$. *Po dosazení dostaneme*

$$w(x) = f(x, 4-x) = x(4-x) - x^2 - (4-x)^2 + x + 4 - x = -3x^2 + 12x - 12.$$

a hledáme lokální extrémy této funkce na intervalu $(0,4)$. *Položíme derivaci rovnu nule* $w'(x) = 12 - 6x = 0$ *a najdeme podezřelý bod* $x = 2$. $f(2,2) = 0$.

Porovnáním funkčních hodnot v nalezených podezřelých bodech, zjistíme, že funkce f *ve vyšetřované oblasti nabývá maximální hodnoty* 1 *v bodě* $[1,1]$ *a minimální hodnoty* -12 *v bodech* $[0,4]$ *a* $[4,0]$.

Příklad 16.28 *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce* $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ *v množině* M, *dané podmínkami*

$$0 \le x \le 3, \qquad 0 \le y \le 2x^2.$$

Množina M je uzavřená a omezená. Nejprve najdeme body, ve kterých mohou být lokální extrémy:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x = 0.$$

Z první rovnice vyjádříme $y = x^2$, dosadíme do druhé a dostaneme: $x^4 - x = x(x-1)(x^2+2x+1) = 0$. Tato rovnice má dvě řešení $x = 0$ a $x = 1$. Příslušné podezřelé body $[0,0]$ a $[1,1]$ leží v množině M. $f(0,0) = 0$ **a** $f(1,1) = -1$.

Dále vyšetříme funkci f na hranici množiny M. Opět mezi podezřelé body přidáme krajní body jednotlivých křivek: $f(3,0) = 27$ **a** $f(3,18) = 5697$. *Nyní budeme hledat vázané extrémy uvnitř jednotlivých křivek podle (16.23):*

1. $y = 0$, $x \in (0,3)$. Po dosazení dostaneme $u(x) = f(x,0) = x^3$ a hledáme lokální extrémy této funkce na intervalu $(0,3)$. Položíme derivaci rovnu nule $u'(x) = 3x^2 = 0$. Podezřelý bod $x = 0$ neleží v intervalu $(0,3)$.

2. $x = 3$, $y \in (0,18)$. Po dosazení dostaneme $v(y) = f(3,y) = 27 + y^3 - 9y$ a hledáme lokální extrémy této funkce na intervalu $(0,18)$. Položíme derivaci rovnu nule $v'(y) = 3y^2 - 9 = 0$ a najdeme podezřelý bod $y = \sqrt{3}$. Bod $y = -\sqrt{3}$. neleží v intervalu $(0,18)$. $f(3,\sqrt{3}) = 27 - 6\sqrt{3}$.

3. $y = 2x^2$, $x \in (0,3)$. Po dosazení dostaneme

$$w(x) = f(x, 2x^2) = x^3 + 8x^6 - 6x^3 = 8x^6 - 5x^3$$

a hledáme lokální extrémy této funkce jedné proměnné na intervalu $(0,3)$. Položíme derivaci rovnu nule

$$w'(x) = 48x^5 - 15x^2 = x^3(48x^3 - 15) = 0$$

a najdeme podezřelý bod tedy $x = \sqrt[3]{\frac{5}{16}}$. $f\left(\sqrt[3]{\frac{5}{16}}, 2\sqrt[3]{\frac{25}{256}}\right) = -\frac{25}{32}$. *Bod*

$y = 0$ neleží v intervalu $(0, 3)$.

Porovnáním funkčních hodnot v nalezených podezřelých bodech, zjistíme, že funkce f ve vyšetřované oblasti nabývá maximální hodnoty 5697 v bodě $[3, 18]$ a minimální hodnoty -1 v bodě $[1, 1]$.

Příklad 16.29 *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x, y) = xy$ v množině M dané podmínkou $x^2 + y^2 \le 2$.*

Množina M je uzavřená a omezená. Nejprve najdeme body, ve kterých mohou být lokální extrémy:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x = 0.$$

Tato rovnice má jediné řešení bod $[0, 0] \in M$ a $f(0, 0) = 0$.

Dále budeme hledat vázané extrémy na hranici množiny M. Postup není možné použít v bodech splňujících rovnice

$$g(x, y) := x^2 + y^2 - 2 = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y = 0.$$

Druhé a třetí rovnici vyhovuje pouze bod $[0, 0]$, ale tento bod nevyhovuje první rovnici. Soustava nemá řešení a můžeme sestrojit Lagrangeovu funkci:

$$F(x, y) := xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$$

a hledáme řešení soustavy rovnic

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = y + 2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x + 2\lambda y = 0, \quad x^2 + y^2 - 2 = 0.$$

Z první rovnice dostaneme $y = -2\lambda x$ a po dosazení do druhé rovnice máme $x - 4\lambda^2 x = 0$. Jedno řešení je $x = 0$, potom $y = 0$, ale toto řešení nevyhovuje *třetí rovnici. Druhé řešení je* $\lambda_{1,2} = \pm\dfrac{1}{2}$. *Z toho plyne, že buď* $x = y$ *nebo* $x = -y$ *a po dosazení do třetí rovnice obdržíme v obou případech*

$$y^2 + y^2 - 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \pm 1.$$

Našli jsme tedy celkem čtyři podezřelé body: $[1, 1]$, $[1, -1]$, $[-1, 1]$, $[-1, -1]$ *a* $f(1, 1) = 1$, $f(1, -1) = -1$, $f(-1, 1) = -1$, $f(-1, -1) = 1$.

Porovnáním funkčních hodnot v nalezených podezřelých bodech zjistíme, že funkce f *ve vyšetřované oblasti nabývá maximální hodnoty* 1 *v bodech* $[1, 1]$, $[-1, -1]$ *a minimální hodnoty* -1 *v bodech* $[-1, 1]$, $[1, -1]$.

Kapitola 17

Obyčejné diferenciální rovnice

1. Základní pojmy

Diferenciální rovnicí rozumíme vztah (platný v určité oblasti) mezi neznámou funkcí a jejími derivacemi. Je-li hledaná funkce funkcí jedné proměnné, mluvíme o **obyčejné diferenciální rovnici**, je-li funkcí více proměnných (v rovnici tedy vystupují parciální derivace), mluvíme o **parciální diferenciální rovnici**. Je-li dáno m diferenciálních rovnic pro n neznámých funkcí, potom mluvíme o **soustavě diferenciálních rovnic**. Řád nejvyšší derivace, obsažené v dané diferenciální rovnici, nazýváme **řádem** této rovnice. Obdobně řádem soustavy rozumíme řád nejvyšší derivace, která se v soustavě vyskytuje.

Příklad 17.1

$$y'''' + y'' + \sin x (y')^3 + xy - x^3 = 0$$

je obyčejná diferenciální rovnice čtvrtého řádu pro neznámou funkci $y(x)$.

Příklad 17.2

$$a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x, y) = 0, \qquad a > 0$$

je parciální diferenciální rovnice druhého řádu pro neznámou funkci $f(x, y)$.

Příklad 17.3

$$u'' + \sin x (v')^3 + xu - x^3 = 0, \qquad v'' + \cos x (u')^3 + v - x^2 = 0.$$

je soustava obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu pro dvě neznámé funkce $v(x)$, $u(x)$.

Příklad 17.4 *Uvažujme hmotný bod pohybující se po přímce. Předpokládejme, že v každém čase t z intervalu J známe jeho rychlost $v(t)$, kde v je spojitá funkce na intervalu J. Hledejme funkci $s(t)$ definovanou v intervalu J popisující polohu pohybujícího se hmotného bodu. Víme, že $\forall t \in J$ platí*

$$s'(t) = v(t).$$

To je diferenciální rovnice prvního řádu. V tomto jednoduchém případě to vlastně znamená najít primitivní funkci k funkci v na intervalu J :

$$s(t) \stackrel{c}{=} \int v(t)\, dt.$$

Předpokládáme-li dále, že v daném čase $t_0 \in J$ známe polohu pohybujícího se hmotného bodu $s(t_0) = s_0$ (takzvanou **počáteční podmínku***). Potom snadno zjistíme, že této počáteční podmínce vyhovuje jediná funkce*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt + s_0.$$

Definice 17.5 **Obyčejnou diferenciální rovnicí prvního řádu** *rozumíme rovnici ve tvaru*

$$F(x, y, y') = 0 \tag{17.1}$$

nebo ve speciálním případě, je-li rozřešena vzhledem k první derivaci, ve tvaru

$$y' = f(x, y). \tag{17.2}$$

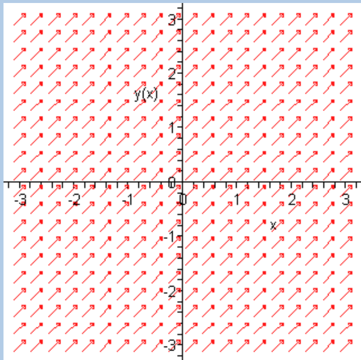
Poznámka 17.6 **Geometrický význam rovnice (17.2):** *Je-li funkce f definována v oblasti Ω, potom rovnicí (17.2) je každému bodu $[x, y] \in \Omega$ přiřazen směr, daný bodem $[x, y]$ a směrnicí y'. Tím je v oblasti Ω dáno pole směrů, tzv.* **směrové pole***. Cílem je najít v oblasti Ω křivky, které se v každém bodě dotýkají příslušného směru. Na obrázcích se můžeme podívat na několik směrových polí pro jednoduché diferenciální rovnice. Nicméně situace může být podstatně komplikovanější. Například může dojít k „větvení“ řešení.*

Definice 17.7 **Obyčejnou diferenciální rovnicí n-tého řádu** *rozumíme rovnici ve tvaru*

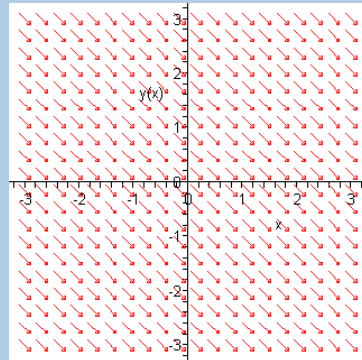
$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{17.3}$$

nebo, je-li rozřešena vzhledem k n-té derivaci, ve tvaru

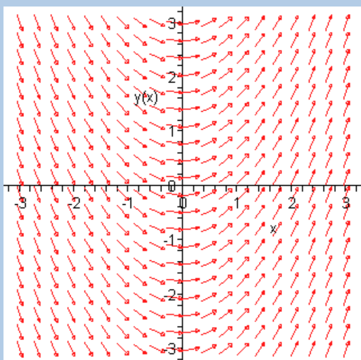
$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right). \tag{17.4}$$



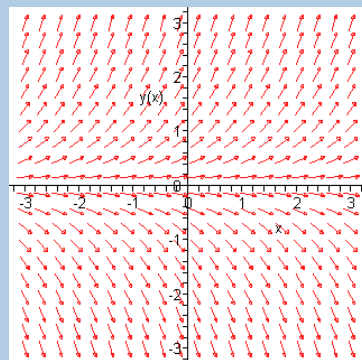
Obrázek 17.1: $y' = 1$,



$y' = -1$,



Obrázek 17.2: $y' = x$,



$y' = y$,

Definice 17.8 **(Partikulárním) řešením** *rovnice (17.3) nazýváme každou funkci* $y = g(x)$*, která má v uvažovaném oboru derivace do* n*-tého řádu včetně a vyhovuje identicky rovnici (17.3). (Podobně i v ostatních případech.)*

Poznámka 17.9 *Bude-li* $x \in I$*, potom je funkce* $y = g(x)$ *řešením rovnice (17.3) v intervalu* I*, má-li v každém bodě intervalu* I *derivace do* n*-tého řádu včetně (v případě uzavřeného intervalu* $[a, b]$ *v bodě* a *zprava a v bodě* b *zleva), a dosadíme-li do rovnice (17.3)* $g(x)$ *za* y*,* $g'(x)$ *za* y' *atd., je rovnice (17.3) splněna pro každé* $x \in I$*.*

Příklad 17.10 *Funkce* $y_1 = \sin x$ *a* $y_2 = \cos x$ *jsou řešením rovnice* $y'' + y = 0$ *v intervalu* $(-\infty, \infty)$*.*

Příklad 17.11 *Řešení může být dáno také implicitně. Například vztahem* $x^2 + y^2 = 1$ *je v implicitním tvaru dáno řešení rovnice* $y' = -\dfrac{x}{y}$*, neboť v každém bodě kružnice platí* $2x + 2yy' = 0$*, nebo-li* $y' = -\dfrac{x}{y}$ *(kromě bodů* $[-1, 0]$ *a* $[1, 0]$*).*

2. Existence a jednoznačnost řešení obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

Předpokládejme, že máme zadánu rovnici $y' = f(x, y)$, potom nás nejprve bude zajímat otázka existence a jednoznačnosti řešení. Proto v této části vyslovíme větu, která udává podmínky, za kterých má zadaná rovnice jediné řešení. Důkaz je založen na metodě postupných aproximací a je značně komplikovaný, takže ho nebudeme uvádět.

Věta 17.12 **(O existenci a jednoznačnosti řešení obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu.)** *Nechť funkce dvou proměnných $f(x, y)$ je definována a spojitá v otevřené množině D. Dále nechť parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}$ je spojitá v množině D. Potom pro rovnici $y' = f(x, y)$ platí:*

- *pro libovolný bod $[x_0, y_0] \in D^o$ existuje funkce $y = \varphi(x)$ a číslo $h > 0$ tak, že funkce $y = \varphi(x)$ je pro $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ řešením rovnice $y' = f(x, y)$ a vyhovuje počáteční podmínce $y_0 = \varphi(x_0)$,*
- *jestliže dvě funkce $y = \varphi(x)$ a $y = \psi(x)$, které jsou řešením rovnice $y' = f(x, y)$, si jsou rovny alespoň pro jednu hodnotu $x_1 \in [x_0 - h, x_0 + h]$, tedy $\varphi(x_1) = \psi(x_1)$, potom si jsou rovny ve všech bodech intervalu $[x_0 - h, x_0 + h]$.*

Poznámka 17.13 *Z věty vyplývá, že každým bodem $[x_0, y_0] \in D^o$ prochází právě jedno řešení rovnice $y' = f(x, y)$.*

Poznámka 17.14 *Pokud bychom v množině D předpokládali pouze spojitost funkce f, dostali bychom pro rovnici $y' = f(x, y)$ pouze existenci řešení ale ne jednoznačnost. Například funkce $y_1 = 0$ a $y_2 = (x - a)^3$ jsou dvě různá řešení rovnice $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, procházející bodem $[a, 0]$.*

Poznámka 17.15 *Podmínka spojitosti $\frac{\partial f}{\partial y}$ v množině D může být nahrazena slabší Lipschitzovou podmínkou, která požaduje existenci čísla N tak, aby nerovnost*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|$$

platila pro libovolné dva body $[x, y_1]$, $[x, y_2]$ z množiny D.

Poznámka 17.16 **(Prodlužování řešení, maximální řešení.)** *Řešení* $y = \varphi(x)$, *uvažované ve větě 17.12, lze často prodloužit na větší interval než je interval* $[x_0 - h, x_0 + h]$. *Jsou-li totiž opět v okolí bodu* $[x_0 + h, \varphi(x_0 + h)]$ $([x_0 - h, \varphi(x_0 - h)])$ *splněny předpoklady věty 17.12, bude opět v dostatečně malém okolí bodu* $[x_0+h-h_1, x_0+h+h_1]$ $([x_0-h-h_2, x_0-h+h_2])$ *existovat jednoznačné řešení* $y = \varphi_1(x)$, $(y = \varphi_2(x))$ *procházející bodem* $[x_0+h, \varphi(x_0+h)]$ $([x_0-h, \varphi(x_0-h)])$. *Toto řešení bude v důsledku jednoznačnosti splývat v levém (pravém) okolí bodu* $[x_0+h, \varphi(x_0+h)]$ $([x_0-h, \varphi(x_0-h)])$ *s předchozím řešením* $y = \varphi(x)$. *Definujme nyní funkci* $y = \varphi_3(x)$ *předpisem*

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} \varphi_2(x) & \textit{pro} \quad x \in [x_0 - h - h_2, x_0 - h), \\ \varphi(x) & \textit{pro} \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h], \\ \varphi_1(x) & \textit{pro} \quad x \in (x_0 + h, x_0 + h + h_1]. \end{cases}$$

Funkci $y = \varphi_3(x)$, *která je opět řešením rovnice* $y' = f(x, y)$, *procházejícím bodem* $[x_0, y_0]$ *a definovaným na větším intervalu než původní řešení* $y = \varphi(x)$, *nazveme* **prodloužením původního řešení** $y = \varphi(x)$.

O řešení dané rovnice procházející zadaným bodem řekneme, že je **maximální**, *jestliže je již nelze prodloužit ani doleva ani doprava.*

Poznámka 17.17 *Má-li pravá strana diferenciální rovnice spojité všechny parciální derivace všech řádů v celé rovině,* **nemusí být maximální řešení** *procházející zadaným bodem* **definováno na celém intervalu** $(-\infty, \infty)$. *Například jediné řešení rovnice* $y' = y^2$, *procházející bodem* $[0, 1]$, *je* $y = \dfrac{1}{1-x}$. *Toto řešení je definováno na intervalu* $(-\infty, 1)$ *a nelze ho prodloužit.*

Definice 17.18 **Obecným řešením** *rovnice (17.2) nazýváme každou funkci $y = g(x, C)$, která má v uvažovaném oboru první derivaci podle proměnné x a vyhovuje identicky rovnici (17.2).*

Příklad 17.19 *Obecným řešením rovnice $y' = y$ je funkce $y = g(x, C) = Ce^x$.*

Definice 17.20 **Singulárním řešením** *rovnice (17.2) nazýváme každou křivku, v jejímž každém bodě je porušena jednoznačnost řešení. (Každým bodem této křivky prochází ještě jiné řešení zadané diferenciální rovnice.)*

Příklad 17.21 *Singulárním řešením rovnice $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ je křivka $y = 0$, neboť každým bodem $[a, 0]$ této křivky prochází ještě další řešení $y = (x - a)^3$.*

Poznámka 17.22 *Pro $f(x, y) \neq 0$ je rovnice*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x, y)} \tag{17.5}$$

ekvivalentní s rovnicí

$$\frac{dx}{dy} = f(x, y). \tag{17.6}$$

V bodech, kde $f(x, y) = 0$, nemá rovnice (17.5) smysl, ale rovnice (17.6) smysl má. Proto se někdy řešením rovnice (17.5) rozumí i řešení rovnice (17.6) a naopak. V tomto smyslu je kružnice $x^2 + y^2 = 1$ řešením rovnice $y' = -\dfrac{x}{y}$ i v bodech $[-1, 0]$ a $[1, 0]$, neboť v okolí těchto bodů vyhovuje rovnici $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{y}{x}$ (viz. příklad 17.11).

3. Řešení vybraných typů obyčejných diferenciálních rovnic

3.1. Separace proměnných

Pojem **rovnice se separovanými proměnnými** bude znamenat, že pravou stranu diferenciální rovnice $y' = f(x,y)$ lze napsat ve tvaru $y' = g(x)h(y)$. Například rovnice $y' = x$, $y' = y$ a $y' = xy$ jsou diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.

a) Obecné řešení rovnice $y' = f(x)$ dostaneme jejím integrováním

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x) \qquad \Rightarrow \qquad y \overset{c}{=} \int 1\,dy \overset{c}{=} \int f(x)\,dx.$$

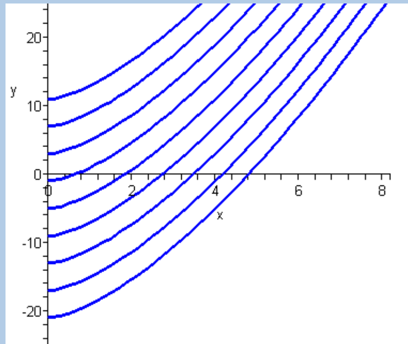
K existenci a jednoznačnosti řešení stačí spojitost funkce f na daném intervalu I a partikulární řešení splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$ je

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

Příklad 17.23 *Řešme rovnici $y' = 3\sqrt{x}$. Pravá strana je spojitá v intervalu $[0,\infty)$, takže každým bodem oblasti $M = \{[x,y],\ x \ge 0\}$ prochází právě jedno řešení. Integrováním zadané rovnice dostaneme obecné řešení $y = 2\sqrt{x^3} + C$. Například bodem $[1,1]$ prochází partikulární řešení $y = 2\sqrt{x^3} - 1$.*

b) V případě, že $f(y_1) = 0$ má rovnice $y' = f(y)$ řešení $y = y_1$. Pro $f(y) \ne 0$ můžeme rovnici $y' = f(y)$ vydělit funkcí f a jejím integrováním opět dostaneme obecné řešení

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(y) \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{dy}{f(y)} \overset{c}{=} \int 1\,dx \overset{c}{=} x.$$

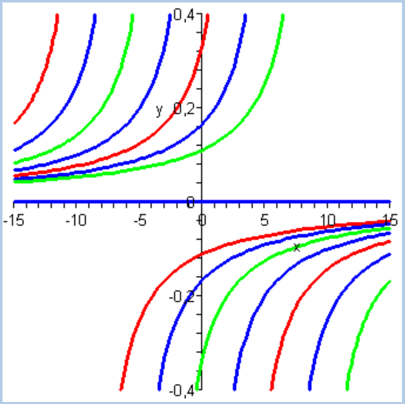


Obrázek 17.3: Několik partikulárních řešení rovnice $y' = 3\sqrt{x}$.

K existenci a jednoznačnosti řešení stačí spojitost funkce f na daném intervalu I. Potom partikulární řešení splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0 \neq y_1$, je

$$x = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{f(t)}.$$

Příklad 17.24 *Řešme rovnici $y' = y^2$. Pravá strana a její derivace podle proměnné y jsou v celé rovině spojité, takže každým jejím bodem prochází právě jedno řešení. Jedno řešení je $y = 0$. Vydělením zadané rovnice funkcí y^2 (pro $y \neq 0$) a jejím následným integrováním dostaneme obecné řešení $x = -\dfrac{1}{y} + C$. Například bodem $[1, 1]$ prochází partikulární řešení $y = \dfrac{1}{2 - x}$ a bodem $[1, 0]$ prochází partikulární řešení $y = 0$.*



Obrázek 17.4: Několik partikulárních řešení rovnice $y' = y^2$.

c) V případě, že $g(y_1) = 0$ má rovnice $y' = f(x)g(y)$ řešení $y = y_1$. Pro $g(y) \neq 0$ můžeme rovnici $y' = f(x)g(y)$ vydělit funkcí g a jejím integrováním opět dostaneme obecné řešení

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x)g(y) \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{dy}{g(y)} \stackrel{c}{=} \int f(x)\,dx.$$

K existenci a jednoznačnosti řešení stačí spojitost funkce fg a její derivace podle proměnné y na dané oblasti M. Potom partikulární řešení splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0 \neq y_1$, je

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

Příklad 17.25 *Řešme rovnici* $y' = \dfrac{x(y^2-1)}{(x^2-1)y}$.

V tomto případě máme $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$, $g(y) = \dfrac{y^2-1}{y}$. *Funkce* f *a její derivace podle proměnné* y *jsou spojité na intervalech* $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ *a* $(1,\infty)$. *Funkce* g *a její derivace podle proměnné* y *jsou spojité na intervalech* $(-\infty,0)$ *a* $(0,\infty)$. *Rozdělíme-li tedy rovinu na šest oblastí:*

$$(-\infty,-1)\times(-\infty,0),\quad (-1,1)\times(-\infty,0),\quad (1,\infty)\times(-\infty,0),$$
$$(-\infty,-1)\times(0,\infty),\quad (-1,1)\times(0,\infty),\quad (1,\infty)\times(0,\infty),$$

potom v každé z těchto oblastí prochází libovolným bodem právě jedno řešení. Abychom mohli provést separaci proměnných, potřebujeme zadanou rovnici vydělit funkcí g. *Musíme tedy ještě oddělit dvě triviální řešení* $y = \pm 1$ *(splňující* $g(\pm 1) = 0$*) a původních šest oblastí se rozpadne na dvanáct:*

$$(-\infty,-1)\times(-\infty,-1),\quad (-1,1)\times(-\infty,-1),\quad (1,\infty)\times(-\infty,-1),$$
$$(-\infty,-1)\times(-1,0),\quad (-1,1)\times(-1,0),\quad (1,\infty)\times(-1,0),$$
$$(-\infty,-1)\times(0,1),\quad (-1,1)\times(0,1),\quad (1,\infty)\times(0,1),$$
$$(-\infty,-1)\times(1,\infty),\quad (-1,1)\times(1,\infty),\quad (1,\infty)\times(1,\infty).$$

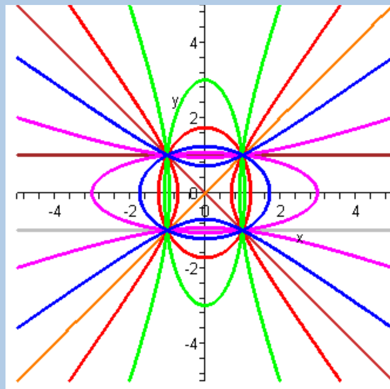
V každé z těchto oblastí je zaručena existence a jednoznačnost, můžeme v nich zadanou rovnici vydělit funkcí g *a následnou integrací dostaneme:*

$$\int \frac{y\,dy}{y^2-1} \stackrel{c}{=} \int \frac{x\,dx}{x^2-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2}\ln|y^2-1| = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C$$
$$\Leftrightarrow \qquad |y^2-1| = |x^2-1|e^{2C}.$$

Například bodem $[3,3]$ *prochází partikulární řešení* $y = x$ *pro* $x \in (1,\infty)$, *bodem* $[-3,3]$ *prochází partikulární řešení* $y=-x$ *pro* $x\in(-\infty,-1)$ *a bodem* $[3,1]$ *prochází partikulární řešení* $y=1$ *pro* $x\in(-\infty,\infty)$. *Dále například v oblasti* $(1,\infty)\times(1,\infty)$ *dostaneme obecné řešení:*

$$y^2-1=(x^2-1)e^{2C} \quad\Leftrightarrow\quad y=\sqrt{(x^2-1)e^{2C}+1}.$$

Na obrázku 17.5 vidíme, že například bodem $[1,1]$ *prochází několik řešení.*



Obrázek 17.5: Několik partikulárních řešení rovnice $y'=\dfrac{x(y^2-1)}{(x^2-1)y}$.

3.2. Homogenní rovnice

Rovnice ve tvaru $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ $(x\neq 0)$ se často nazývá **homogenní** $(x\neq 0)$ (nultého stupně). Tyto diferenciální rovnice lze pomocí substituce $y(x)=$

$xz(x)$ převést na rovnice se separovanými proměnnými.

Příklad 17.26 *Rovnici* $y' = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$ *převeďme pomocí substituce* $y(x) = xz(x)$ *na rovnici se separovanými proměnnými. Každým bodem* $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, *kde* $x \neq 0$ *a* $y \neq 0$ *prochází právě jedno řešení. Pro* $x \neq 0$, $y \neq 0$ *dostaneme*

$$y' = \frac{x^2+y^2}{xy} \quad \Leftrightarrow \quad z + xz' = \frac{x^2+x^2z^2}{x^2z} = \frac{1+z^2}{z} \quad \Leftrightarrow \quad z' = \frac{1}{xz}.$$

Vynásobením poslední rovnice funkcí z *a jejím následným integrováním spočítáme obecné řešení* $\dfrac{z^2}{2} = \ln|x| + C$. *Například pro* $x > 0$, $z > 0$ *(*$\Rightarrow y > 0$*) a zpětné substituci máme obecné řešení* $y = x\sqrt{2\ln x + 2C}$.

Poznámka 17.27 *Rovnici* $y' = \dfrac{ax+by+c}{dx+ey+f}$ *lze v některých případech převést substitucí*

$$x = u + A,\ y = v + B \qquad \Rightarrow \qquad dx = du,\ dy = dv,\ \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$$

na homogenní rovnici. Po substituci totiž dostaneme

$$\frac{dv}{du} = \frac{au+bv+aA+bB+c}{du+ev+dA+eB+f}$$

a lze-li konstanty A, B *zvolit tak, aby* $aA+bB+c=0$ *a* $dA+eB+f=0$, *dostáváme homogenní rovnici*

$$\frac{dv}{du} = \frac{au+bv}{du+ev} = \frac{a+b\frac{v}{u}}{d+e\frac{v}{u}}.$$

Příklad 17.28 *Rovnice*

$$y' = \frac{2x - y + 9}{x - 3y + 2}$$

má jednoznačné řešení pro $x - 3y \neq -2$*. Budeme postupovat podle předchozí poznámky a zkusíme aplikovat substituci* $x = u + A$*,* $y = v + B$*:*

$$v' = \frac{dv}{du} = \frac{dy}{dx} = y' = \frac{2x - y + 9}{x - 3y + 2} = \frac{2u + 2A - v - B + 9}{u + A - 3v - 3B + 2}.$$

Nejprve vyřešíme soustavu rovnic $2A - B + 9 = 0$*,* $A - 3B + 2 = 0$ *a dostaneme* $A = -5$*,* $B = -1$*. Po substituci* $x = u - 5$*,* $y = v - 1$ *máme pro* $u \neq 0$*:*

$$v' = \frac{2u - 10 - v + 1 + 9}{u - 5 - 3v + 3 + 2} = \frac{2u - v}{u - 3v} = \frac{2 - \frac{v}{u}}{1 - 3\frac{v}{u}}.$$

Dále pomocí substituce $v(u) = uz(u)$ *převedeme poslední rovnici na rovnici se separovanými proměnnými. Po separaci proměnných dostaneme:*

$$z + uz' = \frac{2 - z}{1 - 3z} \quad \Leftrightarrow \quad uz' = \frac{2 - 2z + 3z^2}{1 - 3z} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(1 - 3z)dz}{2 - 2z + 3z^2} = \frac{du}{u}.$$

Následným integrováním obdržíme obecné řešení:

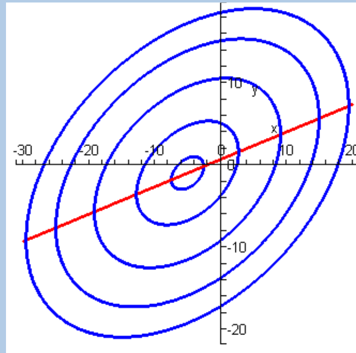
$$-\frac{1}{2}\ln(2 - 2z + 3z^2) = \ln|u| + C \quad \Leftrightarrow \quad 2 - 2z + 3z^2 = \frac{e^{-2C}}{u^2}.$$

Nakonec zpětně dosadíme $z = v/u$*,* $u = x + 5$*,* $v = y + 1$*:*

$$2 - 2\frac{v}{u} + 3\frac{v^2}{u^2} = \frac{e^{-2C}}{u^2} \quad \Leftrightarrow \quad 2u^2 - 2uv + 3v^2 = e^{-2C},$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(x + 5)^2 - 2(x + 5)(y + 1) + 3(y + 1)^2 = e^{-2C}.$$

Na obrázku 17.6 je modře znázorněno několik partikulárních řešení. Červeně je znázorněna přímka $x - 3y = -2$*, na níž není řešení jednoznačné.*



Obrázek 17.6: Několik partikulárních řešení rovnice $y' = \dfrac{2x - y + 9}{x - 3y + 2}$.

3.3. Lineární rovnice

Lineární (vzhledem k y) **diferenciální rovnice** jsou rovnice ve tvaru:

$$\mathbf{y' + a(x)y + b(x) = 0}.$$

Jsou-li funkce a, b spojité v intervalu I, pak v tomto intervalu existuje jednoznačné řešení pro libovolnou počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$, kde $x_0 \in I$. Lineární diferenciální rovnice řešíme tak, že hledáme řešení ve tvaru $y(x) = u(x)v(x)$:

$$y' + ay + b = 0 \;\Leftrightarrow\; uv' + u'v + auv + b = 0 \;\Leftrightarrow\; uv' + (u' + au)v + b = 0. \quad (17.7)$$

Nyní zvolíme funkci u tak, aby byla nenulovým partikulárním řešením rovnice

Celá obrazovka
Začátek
Strana 373
Vyhledávání
◀ ▶
Zpět Vpřed
Zavřít
Ukončit

$u' + au = 0$. Tuto rovnici vyřešíme separací proměnných. Pro $u \neq 0$ máme:

$$u' + au = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u'}{u} = -a \quad \Leftrightarrow \quad \ln|u| \stackrel{c}{=} -\int a(x)\,dx.$$

Tedy například $u = e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}$. Nakonec po dosazení u do (17.7) dopočítáme opět pomocí separace proměnných funkci v:

$$uv' + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = -\int b(x) e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}\,dx \quad \text{a} \quad y = uv.$$

Příklad 17.29 *Vyřešme diferenciální rovnici:* $y' + 2xy = x^3$.
Funkce $2x, x^3$ *jsou spojité v intervalu* $(-\infty, \infty)$*, takže na tomto intervalu je zaručena existence a jednoznačnost řešení splňující libovolnou počáteční podmínku. Řešení budeme hledat ve tvaru* $y(x) = u(x)v(x)$*:*

$$y' + 2xy = x^3 \;\Leftrightarrow\; uv' + u'v + 2xuv = x^3 \;\Leftrightarrow\; uv' + (u' + 2xu)v = x^3. \quad (17.8)$$

Nyní zvolíme funkci u *tak, aby byla nenulovým partikulárním řešením rovnice* $u' + 2xu = 0$*. Tuto rovnici vyřešíme separací proměnných a pro* $u \neq 0$ *máme:*

$$u' + 2xu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u'}{u} = -2x \quad \Leftrightarrow \quad \ln|u| = -x^2 + C.$$

Tedy například $u = e^{-x^2}$*. Nakonec po dosazení* u *do (17.8) dopočítáme pomocí separace proměnných funkci* v *:*

$$uv' = x^3 \quad \Leftrightarrow \quad v = \int x^3 e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2} e^{x^2}(x^2 - 1) + C.$$

Celkem máme $y = uv = \dfrac{x^2 - 1}{2} + Ce^{-x^2}$.

3.4. Bernoulliova rovnice

Bernoulliova diferenciální rovnice je rovnice ve tvaru:

$$\mathbf{y' + a(x)y + b(x)y^n = 0}, \qquad n \in \mathbb{R},\ n \neq 0,\ n \neq 1.$$

Pro $y \neq 0$ rovnici vydělíme y^n a následně využijeme substituci:

$$z = y^{-n+1} \quad \Rightarrow \quad z' = (-n+1)y^{-n}y'$$

a dostaneme lineární diferenciální rovnici pro funkci z:

$$y' + ay + by^n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y^n} + \frac{a}{y^{n-1}} + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z'}{-n+1} + az + b = 0.$$

Příklad 17.30 *Vyřešme diferenciální rovnici: $y' + xy = xy^3$.*
Funkce xy, xy^3 a jejich derivace podle proměnné y jsou spojité v celé rovině, takže existence a jednoznačnost řešení je zaručena pro libovolnou počáteční podmínku. Jedno řešení je $y = 0$. Pro $y \neq 0$ rovnici vydělíme y^3 a po substituci

$$z = y^{-2} \quad \Rightarrow \quad z' = -2y^{-3}y'$$

dostaneme lineární diferenciální rovnici pro funkci z:

$$y' + xy = xy^3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y^3} + \frac{x}{y^2} = x \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{z'}{2} + xz = x.$$

Řešení budeme hledat ve tvaru $z(x) = u(x)v(x)$. Po dosazení dostaneme:

$$z' - 2xz = -2x \Leftrightarrow uv' + u'v - 2xuv = -2x \Leftrightarrow uv' + (u' - 2xu)v = -2x. \quad (17.9)$$

Nyní zvolíme funkci u tak, aby byla nenulovým partikulárním řešením rovnice $u' - 2xu = 0$. Tuto rovnici vyřešíme separací proměnných a pro $u \neq 0$ máme:

$$u' - 2xu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u'}{u} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad \ln|u| = x^2 + C.$$

Tedy například $u = e^{x^2}$. Nakonec po dosazení u do (17.9) dopočítáme pomocí separace proměnných funkci v:

$$uv' = -2x \quad \Leftrightarrow \quad v = \int -2xe^{-x^2}\, dx = e^{-x^2} + C.$$

Celkem máme $z = uv = 1 + Ce^{x^2}$, $1 + Ce^{x^2} > 0 \Rightarrow y_{1,2} = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{1 + Ce^{x^2}}}$.

3.5. Exaktní rovnice

Rovnice $y' = f(x, y)$ má často tvar $y' = -\dfrac{g(x, y)}{h(x, y)}$, kde g a h jsou v určité oblasti M včetně derivací prvního řádu spojité funkce a $h(x, y) \neq 0$ v M. Potom je podle věty 17.12 při daných počátečních podmínkách zaručena v M existence a jednoznačnost řešení. Zadanou rovnici může být někdy výhodné přepsat do tvaru:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{g(x, y)}{h(x, y)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h(x, y)dy + g(x, y)dx = 0.$$

Definice 17.31 *Rovnice*

$$\mathbf{h(x, y)dy + g(x, y)dx = 0} \tag{17.10}$$

se nazývá **exaktní** *v oblasti M, jestliže její levá strana je totálním diferenciálem nějaké funkce $H(x, y)$.*

Důkaz následující věty je složitý, takže jej nebudeme uvádět.

Věta 17.32 **(O řešitelnosti exaktních rovnic.)** *Nechť funkce dvou proměnných g, h a jejich parciální derivace $\frac{\partial g}{\partial y}$, $\frac{\partial h}{\partial x}$ jsou spojité v otevřené jednoduše souvislé množině $M \subset \mathbb{R}^2$ (neobsahuje díry). Pak rovnice (17.10) je exaktní, právě když platí*

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x} \qquad \forall\, [x, y] \in M. \tag{17.11}$$

Poznámka 17.33 *Potom platí, že rovnicí $H(x, y) = C$ je dáno řešení exaktní rovnice (17.10). V následujícím příkladu si ukážeme, jak je nalézt.*

Příklad 17.34 *Vyřešme rovnici:* $(x^2 - y^2)dx + (y^3 - 2xy)dy = 0$.
Nejprve se přesvědčíme, že je rovnice exaktní a ověříme podmínku (17.11):

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{x^2} - \mathbf{y^2}) = -2y = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{y^3} - \mathbf{2xy}).$$

Podmínka je splněna a funkci H najdeme například takto:

$$\int (\mathbf{x^2} - \mathbf{y^2})dx = \frac{x^3}{3} - xy^2 + C(y),$$

kde $C(y)$ je neznámá funkce nezávisející na x. Nalezenou primitivní funkci následně zderivujeme podle y a vypočtená derivace se musí rovnat $\mathbf{y^3} - \mathbf{2xy}$*:*

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} - xy^2 + C(y)\right) = -2xy + \frac{\partial}{\partial y}C(y) = \mathbf{y^3} - \mathbf{2xy}$$

$$\Rightarrow \quad C(y) = \frac{y^4}{4} + K \quad \Rightarrow \quad H(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + \frac{y^4}{4} + K = 0.$$

3.6. Rovnice vyšších řádů řešitelné integrováním

Věta 17.35 **(O existenci a jednoznačnost řešení obyčejných diferenciálních rovnic n-tého řádu.)** *Nechť je dána diferenciální rovnice*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{17.12}$$

n-tého řádu a bod $P[a, b_1, b_2, \dots, b_n]$. Nechť v okolí bodu P jsou funkce

$$f, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$$

spojité (jako funkce $n+1$ proměnných). Pak v určitém okolí bodu a existuje právě jedno řešení $y = g(x)$ rovnice (17.12), které splňuje počáteční podmínky

$$g(a) = b_1, g'(a) = b_2, \dots, g^{(n-1)}(a) = b_n.$$

Důkaz je komplikovaný, takže jej nebudeme uvádět. Věta 17.35 má stejně jako věta 17.12 lokální charakter, takže zaručuje existenci a jednoznačnost řešení jen u určitém okolí bodu a. Budeme uvažovat pouze rovnice ve tvaru $y^{(n)} = f(x)$. Tyto rovnice řešíme tak, že je n krát integrujeme.

Příklad 17.36 *Vyřešme rovnici: $y'' = 6x$.*

$$y'' = 6x \quad \Leftrightarrow \quad y' = 3x^2 + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad y = x^3 + C_1 x + C_2.$$

3.7. Rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

Uvažujme rovnici ve tvaru $y'' + ay' + by = f(x)$. Nejprve se budeme věnovat případu $f(x) = 0$. To je tzv. **homogenní rovnice**. Z tvaru diferenciální rovnice lze usuzovat, že jejím řešením bude funkce, která se derivováním až na konstantu reprodukuje. Tuto vlastnost má exponenciální funkce. Z tohoto důvodu budeme řešení hledat ve tvaru $y = e^{kx}$, kde k je zatím neurčená konstanta. Dosazením do diferenciální rovnice dostaneme

$$k^2e^{kx} + ake^{kx} + be^{kx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (k^2 + ak + b)e^{kx} = 0.$$

Z toho plyne, že funkce $y = e^{kx}$ je řešením zadané homogenní rovnice právě tehdy, když číslo k je řešením rovnice $k^2 + ak + b = 0$. Postupně probereme jednotlivé případy.

1a) Rovnice $k^2 + ak + b = 0$ má **různé reálné kořeny** k_1 a k_2. Potom obecné řešení rovnice $y'' + ay' + by = 0$ má tvar $\mathbf{y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}}$.

Příklad 17.37 *Vyřešme rovnici: $y'' - 2y' - 3y = 0$.*

Řešení budeme hledat ve tvaru $y = e^{kx}$, kde k je zatím neurčená konstanta. Dosazením do diferenciální rovnice dostaneme:

$$k^2e^{kx} - 2ke^{kx} - 3e^{kx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (k^2 - 2k - 3)e^{kx} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad k^2 - 2k - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (k - 3)(k + 1) = 0.$$

Tedy obecné řešení rovnice je $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$. Provedeme ještě zkoušku:

$$9C_1e^{3x} + C_2e^{-x} - 2(3C_1e^{3x} - C_2e^{-x}) - 3(C_1e^{3x} + C_2e^{-x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (9 - 6 - 3)C_1e^{3x} + (1 + 2 - 3)C_2e^{-x} = 0.$$

1b) Rovnice $k^2 + ak + b = 0$ má **dvojnásobný kořen** k. Potom obecné řešení rovnice $y'' + ay' + by = 0$ má tvar $\mathbf{y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}}$.

Příklad 17.38 *Vyřešme rovnici: $y'' - 2y' + y = 0$*

Řešení budeme hledat ve tvaru $y = e^{kx}$, kde k je zatím neurčená konstanta. Dosazením do diferenciální rovnice dostaneme:

$$k^2e^{kx} - 2ke^{kx} + e^{kx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (k^2 - 2k + 1)e^{kx} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad k^2 - 2k + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (k-1)(k-1) = 0.$$

Tedy obecné řešení rovnice je $y = C_1e^x + C_2xe^x$. Provedeme ještě zkoušku dosazením:

$$C_1e^x + (2+x)C_2e^x - 2(C_1e^x + (1+x)C_2e^x) + (C_1e^x + C_2xe^x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-2+1)C_1e^x + (2+x-2-2x+x)C_2e^x = 0.$$

1c) Rovnice $k^2 + ak + b = 0$ má **komplexní kořeny** $k = k_1 \pm \mathrm{i}k_2$. Potom obecné řešení rovnice $y'' + ay' + by = 0$ má tvar $\mathbf{y = (C_1 \sin k_2x + C_2 \cos k_2x)e^{k_1x}}$. Zde budeme potřebovat důležitou identitu:

$$\mathbf{e^{ik_2x} = \cos(k_2x) + i\sin(k_2x)}.$$

Příklad 17.39 *Vyřešme rovnici: $y'' + y = 0$.*

Řešení budeme opět hledat ve tvaru $y = e^{kx}$, kde k je zatím neurčená konstanta. Dosazením do diferenciální rovnice dostaneme:

$$k^2e^{kx} + e^{kx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (k^2 + 1)e^{kx} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad k^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (k - \mathrm{i})(k + \mathrm{i}) = 0.$$

Tedy obecné řešení rovnice je $y = (C_1 \sin x + C_2 \cos x)e^0$. Provedeme ještě zkoušku dosazením:

$$(-C_1 \sin x - C_2 \cos x) + (C_1 \sin x + C_2 \cos x) = 0.$$

2) Uvažujme rovnici ve tvaru $y'' + ay' + by = f(x)$.

Obecné řešené této rovnice se zřejmě skládá ze součtu obecného řešení rovnice $y'' + ay' + by = 0$ a partikulárního řešení rovnice $y'' + ay' + by = f(x)$. Na několika příkladech si ukážeme, jak toto partikulární řešení v některých speciálních případech nalézt. Je-li $\mathbf{f(x) = e^{kx} p_n(x)}$, kde $k \in \mathbb{R}$ a p_n je polynom n-tého stupně, má příslušné partikulární řešení tvar:

$$\mathbf{x^m e^{kx}(c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_0)},$$

kde $\mathbf{m}$ je násobnost kořene k v rovnici $k^2 + ak + b = 0$ a $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ jsou neznámé konstanty. Je-li $\mathbf{f(x) = e^{kx}} \sin(\mathbf{lx})\mathbf{p_n(x)}$, kde k, $l \in \mathbb{R}$ a p_n je polynom n-tého stupně, potom příslušné partikulární řešení je imaginární část:

$$\mathbf{x^m e^{(k+il)x}(c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_0)},$$

kde $\mathbf{m}$ je násobnost kořene $k_1 = k \pm il$ v rovnici $k_1^2 + ak_1 + b = 0$ a $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ jsou neznámé konstanty. Je-li $\mathbf{f(x) = e^{kx}} \cos(\mathbf{lx})\mathbf{p_n(x)}$, kde k, $l \in \mathbb{R}$ a p_n je polynom n-tého stupně, potom příslušné partikulární řešení je reálná část:

$$\mathbf{x^m e^{(k+il)x}(c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_0)},$$

kde $\mathbf{m}$ je násobnost kořene $k_1 = k \pm il$ v rovnici $k_1^2 + ak_1 + b = 0$ a $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ jsou neznámé konstanty. V posledních dvou případech vlastně vyřešíme rovnici s pravou stranou $f(x) = e^{(k \pm il)x} p_n(x)$ a nakonec její řešení rozdělíme na reálnou a imaginární část. Ve všech třech případech dosadíme do zadané rovnice obecný tvar řešení a neznámé konstanty $c_0, \ldots, c_n$ určíme ze vzniklé polynomiální rovnice. Ukážeme si tento postup v několika následujících příkladech.

Příklad 17.40 *Vyřešme rovnici:* $y'' - 2y' - 3y = -3x + 1$.

Obecné řešení rovnice $y'' - 2y' - 3y = 0$ *je* $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$ *(viz příklad 17.37). Z toho plyne, že nula není řešením rovnice* $k^2 - 2k - 3 = 0$ *a tedy* $m = 0$*, takže řešení budeme hledat ve tvaru* $x^0 e^0 (c_1 x + c_0)$*. Po dosazení do zadané diferenciální rovnice dostaneme:*

$$-2c_1 - 3(c_1 x + c_0) = -3x + 1.$$

Nakonec porovnáním koeficientů dostaneme $c_1 = 1$ *a* $c_0 = -1$*. Obecné řešení rovnice* $y'' - 2y' - 3y = -3x + 5$ *je tedy* $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + x - 1$.

Příklad 17.41 *Vyřešme rovnici:* $y'' - 2y' - 3y = 4e^{-x}$.

Obecné řešení rovnice $y'' - 2y' - 3y = 0$ *je* $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$ *(viz příklad 17.37). Z toho plyne, že* $\mathbf{-1}$ *je jednonásobným kořenem rovnice* $k^2 - 2k - 3 = 0$ *a tedy* $m = 1$*, takže řešení budeme hledat ve tvaru* $x^1 e^{-x} c_0$*. Po dosazení do zadané diferenciální rovnice dostaneme:*

$$e^{-x}(-2c_0 + c_0 x) - 2e^{-x}(c_0 - c_0 x) - 3e^{-x} c_0 x = 4e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \quad (-2c_0 + c_0 x) - 2(c_0 - c_0 x) - 3c_0 x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad -4c_0 = 4.$$

Obecné řešení rovnice $y'' - 2y' - 3y = 4e^{-x}$ *je tedy* $y = C_1 e^{3x} + (C_2 - x)e^{-x}$.

Příklad 17.42 *Vyřešme rovnici:* $y'' + y = 5e^x \sin x$.

Obecné řešení rovnice $y'' + y = 0$ *je* $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ *(viz příklad 17.39). Z toho plyne, že* $1 + \mathrm{i}$ *není řešením rovnice* $k^2 + 1 = 0$ *a tedy* $m = 0$*, takže řešení budeme hledat ve tvaru* $x^0 e^{(1+\mathrm{i})x} c_0$*. Po dosazení do zadané diferenciální rovnice dostaneme:*

$$2\mathrm{i} e^{(1+\mathrm{i})x} c_0 + e^{(1+\mathrm{i})x} c_0 = 5e^{(1+\mathrm{i})x}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\mathrm{i}c_0 + c_0 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad c_0 = \frac{5}{1+2\mathrm{i}} \frac{1-2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} = 5\frac{1-2\mathrm{i}}{5} = 1 - 2\mathrm{i}.$$

Partikulární řešení rovnice $y'' + y = 5e^{(1+\mathrm{i})x}$ *je*

$$y_{pp} = e^{(1+\mathrm{i})x}(1 - 2\mathrm{i}) = e^{x}(\cos x + \mathrm{i}\sin(x))(1 - 2\mathrm{i}).$$

Partikulární řešení rovnice $y'' + y = 5e^{x}\sin x$ *je potom imaginární část* ($\Im$) *řešení předchozí rovnice. Tedy* $y_p = \Im(y_{pp}) = e^{x}(-2\cos x + \sin x)$ *a obecné řešení zadané rovnice je* $y = (C_1 \sin x + C_2 \cos x) + e^{x}(-2\cos x + \sin x)$.

Příklad 17.43 *Vyřešme rovnici:* $y'' + y = 2\cos \mathbf{x}$

Obecné řešení rovnice $y'' + y = 0$ *je* $y = C_1 \sin x + C_2 \cos \mathbf{x}$ *(viz příklad 17.39). Z toho plyne, že* i *je jednonásobný kořen rovnice* $k^2 + 1 = 0$ *a tedy* $m = 1$, *takže řešení budeme hledat ve tvaru* $x^1 e^{\mathrm{i}x} c_0$. *Po dosazení do zadané diferenciální rovnice dostaneme:*

$$(2\mathrm{i} - x)e^{\mathrm{i}x}c_0 + xe^{\mathrm{i}x}c_0 = 2e^{\mathrm{i}x} \quad \Leftrightarrow \quad (2\mathrm{i} - x)c_0 + xc_0 = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\mathrm{i}c_0 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2\mathrm{i}c_0(-\mathrm{i}) = 2(-\mathrm{i}) \quad \Leftrightarrow \quad c_0 = -\mathrm{i}.$$

Partikulární řešení rovnice $y'' + y = 2e^{\mathrm{i}x}$ *je*

$$y_{pp} = xe^{\mathrm{i}x}(-\mathrm{i}) = x(\cos x + \mathrm{i}\sin x)(-\mathrm{i}) = x(-\mathrm{i}\cos x + \sin x).$$

Partikulární řešení rovnice $y'' + y = 2\cos x$ *je potom reálná část* ($\Re$) *řešení předchozí rovnice. Tedy* $y_p = \Re(y_{pp}) = x\sin x$ *a obecné řešení zadané rovnice je* $y = (C_1 \sin x + C_2 \cos x) + x \sin x$.

Celá obrazovka
Začátek
Strana 383
Vyhledávání
◀ ▶
Zpět Vpřed
Zavřít
Ukončit

Kapitola 18

Přibližné řešení obyčejných diferenciálních rovnic

1. Eulerova metoda

Budeme hledat přibližné řešení diferenciální rovnice

$$y' = f(x,y), \qquad x \in [a,b], \tag{18.1}$$

s počáteční podmínkou

$$y(a) = y_0. \tag{18.2}$$

Asi nejjednodušší metodou numerického (přibližného) řešení obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu je (explicitní) Eulerova metoda. K jejímu odvození využijeme Taylorův vzorec, proto budeme předpokládat, že řešení rovnice (18.1) má omezenou druhou derivaci v intervalu $[a,b]$. Začneme tím, že rozdělíme interval $[a,b]$ na N stejných dílků délky $h = \dfrac{b-a}{N}$ dělícími body

$x_n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$. Potom podle Taylorovy věty pro x_n, $x_{n+1} \in [a, b]$ existuje $\xi_n \in (x_n, x_{n+1})$ tak, že

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n). \tag{18.3}$$

V případě, že číslo h je malé, je člen $\frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$ malý a můžeme jej zanedbat. Dále využijeme toho, že $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$ a přesné hodnoty $y(x_n)$, $y(x_{n+1})$ nahradíme přibližnými hodnotami y_n, y_{n+1}. Tím jsme odvodili **Eulerovu metodu**:

$$\mathbf{y(x_0) = y_0, \qquad y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n), \quad n = 0, \dots, N - 1.} \tag{18.4}$$

Číslo h se nazývá **integrační krok**. Eulerova metoda tedy umožňuje postupně (rekurentně) spočítat přibližné řešení rovnice (18.1) v bodech $x_n = a + nh$, $n = 1, \dots, N$.

Poznámka 18.1 *Derivaci jsme tedy v rovnici (18.1) nahradili konečnou diferencí:*

$$y'(x_n) = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - \frac{h}{2} y''(\xi_n) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}.$$

Integrací rovnice (18.1) od x_n do x_{n+1} a aplikací obdélníkového pravidla:

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = [y]_{x_n}^{x_{n+1}} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y' dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) dx \approx h f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$$

odvodíme implicitní Eulerovu metodu:

$$y(x_0) = y_0, \qquad y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, \dots, N - 1.$$

Poznámka 18.2 *Geometrický význam Eulerovy metody je následující: Přibližné řešení aproximuje přesné řešení lomenou čarou procházející body* $[x_n, y_n]$*, splňuje počáteční podmínku (prochází bodem* $[a, y_0]$*) a směrnice úseček, které ji vytvářejí, souhlasí se směrovým polem vždy v levém krajním bodě.*

Je-li řešením rovnice (18.1) přímka, najdeme její řešení Eulerovou metodou přesně. Pokud není řešením rovnice (18.1) přímka, dopustíme se při aplikaci Eulerovy metody chyby, kterou nazýváme **celkovou diskretizační chybou**:

$$\mathbf{e_n = y_n - y(x_n)}.$$

Potom potřebujeme mít k dispozici nástroj, jak tuto chybu libovolně zmenšit. Protože jediný volný parametr v Eulerově metodě je integrační krok h, je možné velikost celkové diskretizační chyby ovlivnit pouze jeho změnou. Zjistíme-li, že platí

$$\lim_{\mathbf{h \to 0, x_n = x}} \mathbf{e_n = 0},$$

pro každé $x \in [a, b]$, potom mluvíme o **konvergenci metody**. Zdůrazněme ještě, že výše uvedený limitní přechod se rozumí pro pevné $x = x_n = a + nh$, takže při zmenšování integračního kroku je třeba index n úměrně zvětšovat. Nyní se pokusíme o odhad celkové diskretizační chyby. Nejprve si uvedeme jednoduché lemma, které lze snadno dokázat pomocí matematické indukce.

Lemma 18.3 *Nechť* $A, B > 0$*,* N *je celé kladné,* $C_n \in \mathbb{R}$ *a* $|C_{n+1}| \leq A|C_n| + B$ *pro* $n = 0, \ldots, N$*. Pak*

$$|C_n| \leq A^n |C_0| + nB \qquad \text{pro } A = 1,$$

$$|C_n| \leq A^n |C_0| + \frac{A^n - 1}{A - 1} B \qquad \text{pro } A \neq 1.$$

Věta 18.4 (O odhadu chyby Eulerovy metody.) *Nechť funkce $f(x,y)$ dvou proměnných je spojitá v oblasti $O = \{[x,y],\ a \le x \le b, -\infty < y < \infty\}$ a splňuje Lipschitzovu podmínku s konstantou $L > 0$ tak, že platí:*

$$|f(x,y) - f(x,z)| \le L|y - z| \qquad \forall x \in [a,b],\ y,z \in \mathbb{R}.$$

Dále nechť y_n je přibližné řešení úlohy: $y' = f(x,y)$, $x \in [a,b]$, $y(a) = y_0$ vypočtené Eulerovou metodou a $y(x)$ je příslušné přesné řešení. Potom platí

$$|e_n| \le hM(x_n)\frac{(hL+1)^n - 1}{L} \quad n = 0,\dots,N, \quad kde\ M(x) = \frac{1}{2}\max_{t\in[a,x]}|y''(t)|$$

Důkaz. Užitím definice e_{n+1}, předpisu Eulerovy metody, jednoduchých úprav a nakonec vztahu (18.3) dostaneme:

$$\begin{aligned}
e_{n+1} &= y_{n+1} - y(x_{n+1}) = y_{n+1} - y_n + y_n - y(x_{n+1}) = hf(x_n,y_n) + y_n - y(x_{n+1})\\
&= hf(x_n,y_n) + y_n - y(x_n) + y(x_n) - y(x_{n+1}) = hf(x_n,y_n) + e_n + y(x_n) - y(x_{n+1})\\
&= hf(x_n,y_n) - hf(x_n,y(x_n)) + e_n + y(x_n) - y(x_{n+1}) + hf(x_n,y(x_n))\\
&= hf(x_n,y_n) - hf(x_n,y(x_n)) + e_n + (y(x_n) - y(x_{n+1}) + hy'(x_n))\\
&= hf(x_n,y_n) - hf(x_n,y(x_n)) + e_n - \frac{h^2}{2}y''(\xi_n).
\end{aligned}$$

Nyní přejdeme k absolutní hodnotě a využijeme Lipschitzovu podmínku

$$\begin{aligned}
|e_{n+1}| &= \left|hf(x_n,y_n) - hf(x_n,y(x_n)) + e_n - \frac{h^2}{2}y''(\xi_n)\right|\\
&\le h|f(x_n,y_n) - f(x_n,y(x_n))| + |e_n| + \frac{h^2}{2}|y''(\xi_n)|\\
&\le hL|y_n - y(x_n)| + |e_n| + \frac{h^2}{2}|y''(\xi_n)|
\end{aligned}$$

$$= (hL+1)|e_n| + \frac{h^2}{2}|y''(\xi_n)| \leq (hL+1)|e_n| + h^2 M(x_n).$$

Dále zřejmě platí $e_0 = y_0 - y(x_0) = y_0 - y_0 = 0$. Nakonec aplikujeme předchozí lemma na případ $C_0 = 0$, $C_n = e_n$, $A = (hL+1)$, $B = h^2 M(x_n)$. Takže

$$|e_n| \leq \frac{(hL+1)^n - 1}{hL+1-1} h^2 M(x_n) = hM(x_n)\frac{(hL+1)^n - 1}{L}.$$

$\square$

Poznámka 18.5 *Můžeme odhadnout*

$$(1+hL)^n = 1 + hLn + \frac{(hL)^2 n(n-1)}{2} + \ldots \leq 1 + hLn + \frac{(hLn)^2}{2} + \ldots = e^{hnL}$$

a navíc $hn = x_n - a$. *Potom platí:*

$$|e_n| \leq hM(x_n)\frac{(hL+1)^n - 1}{L} \leq hM(x_n)\frac{e^{hnL} - 1}{L} = hM(x_n)\frac{e^{L(x_n - a)} - 1}{L}.$$

Poslední výraz se používá častěji, protože umožňuje snadno posoudit velikost chyby v závislosti na integračním kroku.

Poznámka 18.6 *V případě, že řešení rovnice* $y' = f(x,y)$, $x \in [a,b]$, $y(a) = y_0$ *má spojitou druhou derivaci plyne z předchozí věty konvergence Eulerovy metody a rychlost její konvergence je úměrná integračnímu kroku* h. *Nevýhoda odhadu chyby z předchozí věty spočívá jednak v tom, že ve většině případů vede ke značnému nadhodnocení odhadu chyby a jednak v tom, že k výpočtu tohoto odhadu je třeba znalost druhé derivace přesného řešení, které obvykle neznáme. Proto se v praxi většinou k odhadu chyby používá tzv.* **metoda polovičního kroku**. *Tato metoda je založena na tom, že se přibližné řešení* *spočte dvakrát se dvěma různými integračními kroky. Abychom rozlišili přibližná řešení a odhady chyby pro různé délky kroku budeme místo e_n a y_n psát $e_n(h)$ a $y_n(h)$. Protože podle odhadu z předchozí věty platí $e_{2n}(h/2) \approx e_n(h)/2$, dostaneme:*

$$e_n(h) = y_n(h) - y(x_n) = y_n(h) - y_{2n}(h/2) + y_{2n}(h/2) - y(x_n)$$
$$= y_n(h) - y_{2n}(h/2) + e_{2n}(h/2) \approx y_n(h) - y_{2n}(h/2) + e_n(h)/2$$
$$\Rightarrow \qquad \mathbf{e_n(h) \approx 2(y_n(h) - y_{2n}(h/2))}.$$

Příklad 18.7 *Řešme diferenciální rovnici $y' = y$ s počáteční podmínkou $y(0) = 1$. Přesným řešením je funkce e^x. Lipschitzova konstanta je $L = 1$. Zvolíme $h = 1/5$. Přibližné řešení budeme počítat pomocí Eulerovy metody: $y_{n+1} = y_n + hy_n$ (např. $y_1 = y_0 + y_0/5 = 1 + 1/5$). Dále spočítáme přesně*

x_n	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y_n	1,2	1,44	1,728	2,0736	2,48832
e_n	-0,02140	-0,05182	-0,09412	-0,15194	-0,22996
O_{1n}	0.02443	0,06564	0.13265	0.23893	0.40457
O_{2n}	-0,02	-0.0482	-0,08712	-0,13998	-0,21084

chybu e_n, odhad chyby z věty o odhadu chyby

$$O_{1n} = hM(x_n)\frac{(hL+1)^n - 1}{L} = \frac{e^{x_n}}{10}\left(\left(\frac{6}{5}\right)^n - 1\right)$$

a odhad chyby na základě metody polovičního kroku $O_{2n} = 2(y_n(h) - y_{2n}(h/2))$.

2. Obecná jednokroková metoda

Při Eulerově metodě jsme přibližnou hodnotu řešení y_{n+1} v bodě x_{n+1} počítali pouze ze znalosti přibližného řešení y_n v bodě x_n. **Obecnou jednokrokovou metodou** budeme rozumět jakýkoliv algoritmus pro řešení úlohy (18.1), (18.2), v němž se přibližné řešení y_{n+1} v bodě x_{n+1} počítá pouze ze znalosti veličin y_n, x_n a h. Tuto závislost můžeme zapsat v obecném tvaru:

$$\mathbf{y_{n+1} = y_n + h\,\Phi(x_n, y_n, h)},$$

kde Φ je funkce tří proměnných, která závisí na zadané diferenciální rovnici. V případě Eulerovy metody je $\Phi(x_n, y_n, h) = f(x_n, y_n)$.

Nejprve zformujeme obecné požadavky na funkci Φ. Řekneme, že obecná jednokroková metoda je **regulární**, jestliže platí:

- funkce $\Phi(x, y, h)$ je spojitá v oblasti $O = \{[x, y], a \leq x \leq b, 0 \leq h \leq h_0, -\infty < y < \infty\}$ (h_0 je kladná konstanta),
- existuje konstanta $L > 0$ tak, že platí:

  $$|\Phi(x, y, h) - \Phi(x, z, h)| \leq L|y - z|$$

  pro každé dva body $[x, y, h]$ a $[x, z, h]$ z množiny O (tzv. Lipschitzova podmínka).

Řekneme, že obecná jednokroková metoda je **konzistentní**, jestliže platí $\Phi(x, y, 0) = f(x, y)$ pro každý bod $[x, y, 0]$ z množiny O.

Lokální chyba obecné jednokrokové metody je definována výrazem:

$$\mathbf{l(y(x), h) = y(x + h) - y(x) - h\Phi(x, y(x), h)},$$

kde y je přesné řešení úlohy (18.1), (18.2).

Největší celé číslo p, pro něž platí:

$$\mathbf{l(y(x), h) = Ch^{p+1}}, \quad \text{kde } \mathbf{C} \in \mathbb{R}$$

se nazývá **řád** obecné jednokrokové metody.

Řád metody závisí na hladkosti řešení zadané diferenciální rovnice a patří k jejím důležitým charakteristikám. Například pokud řešení úlohy (18.1), (18.2) má spojitou druhou derivaci, dostáváme pro Eulerovu metodu:

$$l(y(x), h) = y(x+h) - y(x) - h\Phi(x, y(x), h)$$
$$= y(x+h) - y(x) - hf(x, y(x)) = \frac{h^2}{2} y''(\xi).$$

Takže Eulerova metoda je jednokroková metoda prvního řádu.

Podobně jako jsme dokázali odhad pro celkovou diskretizační chybu Eulerovy metody můžeme snadno pomocí lemmatu 18.3 dokázat, že pokud platí $|l(y(x), h)| = Ch^{p+1}$, potom pro regulární jednokrokové metody platí:

$$|e_n| \le \frac{(hL+1)^n - 1}{L} Ch^p. \tag{18.5}$$

Z toho plyne, že o celkové diskretizační chybě v podstatě rozhoduje lokální diskretizační chyba. Lokální chyba je tedy důležitou charakteristikou zadané úlohy.

Poznámka 18.8 *Podobně jako u Eulerovy metody je předchozí odhad celkové diskretizační chyby obvykle velmi pesimistický. Proto se opět k odhadu chyby používá tzv.* **metoda polovičního kroku**. *Tato metoda je založena na tom, že se přibližné řešení spočte dvakrát se dvěma různými integračními kroky. Abychom rozlišili přibližná řešení a odhady chyby pro různé délky kroku* *budeme místo e_n a y_n psát $e_n(h)$ a $y_n(h)$. Protože podle odhadu 18.5 platí $e_{2n}(h/2) \approx e_n(h)/2^p$, dostaneme:*

$$\begin{aligned} e_n(h) &= y_n(h) - y(x_n) = y_n(h) - y_{2n}(h/2) + y_{2n}(h/2) - y(x_n) \\ &= y_n(h) - y_{2n}(h/2) + e_{2n}(h/2) \approx y_n(h) - y_{2n}(h/2) + e_n(h)/2^p \\ &\Rightarrow \qquad \mathbf{e_n(h) \approx \frac{2^p}{2^p - 1}(y_n(h) - y_{2n}(h/2))}. \end{aligned}$$

Poznámka 18.9 *Na závěr si ještě „odvodíme" dvě Runge-Kuttovy metody druhého řádu. Postupujeme stejně jako v poznámce 18.1. Integrací rovnice (18.1) od x_n do x_{n+1}, aplikací lichoběžníkového pravidla a Eulerovy metody:*

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx \approx h\frac{f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) + f(x_n, y(x_n))}{2}$$

$$\approx h\frac{f(x_{n+1}, y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))) + f(x_n, y(x_n))}{2}$$

odvodíme: $y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))\right)$.

A integrací rovnice (18.1), aplikací obdélníkového pravidla a Eulerovy metody:

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx \approx hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y\left(x_n + \frac{h}{2}\right)\right)$$

$$\approx hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y(x_n) + \frac{h}{2}f(x_n, y(x_n))\right)$$

odvodíme: $y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{hf(x_n, y_n)}{2}\right)$.

Integrální počet funkcí více proměnných

1. Riemannův integrál na obdélníku

Nejprve zavedeme Riemannův integrál na obdélníku $[a, b] \times [c, d]$. Postup je podobný jako v případě Riemannova integrálu funkce jedné proměnné. Představme si následující problém: Nechť je dána omezená nezáporná funkce $f(x, y)$ v intervalu $[a, b] \times [c, d]$ $(a < b, c < d)$. Nyní sestrojme obrazec P, ohraničený rovinou xy, přímkami $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, a funkcí f. Jak spočítat objem obrazce P? Rozdělíme interval $[a, b]$ na několik dílků dělícími body $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ a interval $[c, d]$ na několik dílků dělícími body $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_n = d$. Každý takto vzniklý

Celá obrazovka
Začátek
Strana 393
Vyhledávání
◀ ▶
Zpět Vpřed
Zavřít
Ukončit

interval $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ $i = 1, 2, \cdots, n$ $j = 1, 2, \cdots, m$ bude tvořit základnu dvou kvádrů. První kvádr bude mít výšku M_{ij} rovnou supremu funkce $f(x, y)$ v intervalu $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ a druhý bude mít výšku m_{ij} rovnou infimu funkce $f(x, y)$ v intervalu $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. Potom součet objemů prvních kvádrů tvoří obrazec opsaný obrazci P a jeho objem je:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Součet objemů druhých kvádrů tvoří obrazec vepsaný obrazci P a jeho objem je:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Definice 19.1 *Nechť $[a, b] \times [c, d]$ $(a < b, c < d)$ je dvourozměrný interval. Je-li dáno $n \in \mathbb{N}$ a $n+1$ dělících bodů intervalu $[a, b]$ a zároveň $m \in \mathbb{N}$ a $m+1$ dělících bodů intervalu $[c, d]$:*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_n = d,$$

říkáme, že množina všech obdélníků

$$I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \quad pro\ i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, m$$

definuje **dělení** *D intervalu $[a, b] \times [c, d]$. Řekneme, že dělení D'* **zjemňuje** *dělení D, jestliže každý bod dělení D je také bodem dělení D'.*

Nyní se dostáváme k jádru naší hypotézy: Budou-li průměry jednotlivých obdélníčků konvergovat k nule, bude objem obou obrazců konvergovat k nějakým limitám. Budou-li se tyto limity navzájem rovnat, budou se zřejmě rovnat i objemu obrazce P. Nejprve se podíváme na vlastnosti horních a dolních součtů.

Definice 19.2 *Nechť funkce f je omezená v intervalu $[a, b] \times [c, d]$ $(a < b, c < d)$. Dále nechť D je dělení tohoto intervalu. Označme symbolem M_{ij} supremum funkce f v intervalu $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ a symbolem m_i infimum funkce f v intervalu $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. Danému dělení D přiřadíme dvě čísla:*

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1}),$$

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1}).$$

První číslo nazveme **horním součtem** *a druhé* **dolním součtem**.

Lemma 19.3 *Nechť funkce f je omezená v intervalu $[a, b] \times [c, d]$ $(a < b, c < d)$. Potom platí následující tři tvrzení:*

- *Je-li M supremum a m infimum funkce f v intervalu $[a, b] \times [c, d]$, potom pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ platí:*

$$m(b - a)(d - c) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq M(b - a)(d - c).$$

- *Je-li dělení D' zjemněním dělení D, je*

$$S(f, D') \leq S(f, D) \qquad a \qquad s(f, D') \geq s(f, D).$$

- *Jsou-li D_1 a D_2 dvě libovolná dělení intervalu $[a, b]$, je*

$$s(f, D_1) \leq S(f, D_2).$$

Příklad 19.4 *Nechť* $a < b$ *a nechť* $\forall x \in [a,b]$, $\forall y \in [c,d]$, *je* $f(x,y) = e$. *Potom pro libovolné dělení* D *je*

$$e(b-a)(d-c) \le s(f,D) \le S(f,D) \le e(b-a)(d-c).$$

Definice 19.5 *Nechť funkce* f *je omezená v intervalu* $I = [a,b] \times [c,d]$ $(a < b, c < d)$. *Potom definujeme*

$$s(f) := \sup_D \, s(f,D) \qquad a \qquad S(f) := \inf_D \, S(f,D).$$

První číslo nazveme **dolním Riemannovým integrálem** *a druhé* **horním Riemannovým integrálem** *funkce* f *přes interval* $[a,b] \times [c,d]$. *Supremum a infimum bereme přes všechna dělení* D *intervalu* $[a,b] \times [c,d]$. *Je-li* $s(f) = S(f)$, *pak řekneme, že funkce* f *má na intervalu* I **Riemannův integrál** *(roven* $s(f) = S(f)$*) a budeme ho značit symbolem*

$$\int_I f(x,y)\,dx\,dy.$$

Poznámka 19.6 *Množiny* $\{s(f,D) : D$ *dělení intervalu* $I = [a,b] \times [c,d]\}$ *a* $\{S(f,D) : D$ *dělení intervalu* $I\}$ *jsou podle lemmatu 19.3 omezené a tedy podle věty o supremu a infimu příslušné supremum a infimum v definici 19.5 existují a jsou konečné.*

Příklad 19.7 *Nechť* $a < b$ *a nechť* $\forall x \in [a,b]$, $\forall y \in [c,d]$, *je* $f(x,y) = e$. *Potom z příkladu 19.4 plyne*

$$e(b-a)(d-c) \le s(e) \le S(e) \le e(b-a)(d-c).$$

Tedy ve všech nerovnostech musí platit rovnost a $\int_I e\,dx\,dy = e(b-a)(d-c)$, *kde* $I = [a,b] \times [c,d]$.

Existuje-li Riemannův integrál $\int_I f(x,y)\,dx\,dy$, můžeme v prvním tvrzení lemmatu 19.3 nahradit dolní a horní součty Riemannovým integrálem.

Lemma 19.8 *Nechť* f *je funkce omezená v intervalu* $I = [a,b] \times [c,d]$ $(a < b, c < d)$. *Označíme-li* $A = \inf_{[x,y]\in I} f(x)$, $B = \sup_{[x,y]\in I} f(x)$ *a* $K = \sup_{[x,y]\in I} |f(x)|$. *Potom platí:*

$$A(b-a)(d-c) \le \int_I f(x,y)\,dx\,dy \le B(b-a)(d-c)$$

Definice 19.9 *Nechť* D *je libovolné dělení intervalu* $I = [a,b] \times [c,d]$. *Označme* $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ $i = 1, 2, \cdots, n$ $j = 1, 2, \cdots, m$ *a*

$$v(D) = \max\{d(I_{ij}, I_{ij}),\ I_{ij} \subseteq I\}.$$

Číslo $v(D)$ *nazveme* **normou dělení** D.

Věta 19.10 **(O existenci Riemannova integrálu.)** *Nechť* f *je spojitá funkce v intervalu* $I = [a,b] \times [c,d]$ $(a < b, c < d)$, *potom* $\int_I f(x,y)\,dx\,dy$ *existuje. Navíc, je-li* D_l *libovolná posloupnost dělení intervalu* I *taková, že* $\lim_{l\to\infty} v(D_l) = 0$. *Potom*

$$\int_{\mathbf{I}} \mathbf{f(x,y)\,dx\,dy} = \lim_{\mathbf{l}\to\infty} \mathbf{s(f, D_l)} = \lim_{\mathbf{l}\to\infty} \mathbf{S(f, D_l)}.$$

2. Vlastnosti Riemannova integrálu

Důkazy v této kapitole jsou takřka identické s obdobnými důkazy vět pro funkce jedné proměnné a proto je nebudeme provádět.

Věta 19.11 **(Linearita Riemannova integrálu.)** *Nechť funkce f a g jsou omezené v intervalu $I = [a, b] \times [c, d]$ $(a < b, c < d)$, které mají na intervalu I Riemannův integrál a $k, l \in \mathbb{R}$. Potom i funkce $kf + lg$ má Riemannův integrál a platí*

$$\int_I (kf(x, y) + lg(x, y))\, dx\, dy = k \int_I f(x, y)\, dx\, dy + l \int_I g(x, y)\, dx\, dy.$$

Větu 19.11 můžeme pomocí indukce snadno rozšířit na libovolný počet sčítanců.

Věta 19.12 *Nechť funkce $f_1, f_2, \ldots, f_l$ jsou omezené v intervalu $I = [a, b] \times [c, d]$ $(a < b, c < d)$ a mají na tomto intervalu Riemannův integrál. Dále nechť $k_1, k_2, \ldots, k_l \in \mathbb{R}$. Potom i funkce $\sum_{i=1}^{l} k_i f_i$ má Riemannův integrál a platí*

$$\int_I \sum_{i=1}^{l} k_i f_i(x, y)\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{l} k_i \int_I f_i(x, y)\, dx\, dy.$$

Definice 19.13 **Charakteristickou funkcí** *množiny $M \subset \mathbb{R}^2$ nazýváme funkci χ_M, definovanou na $\mathbb{R}^2$ předpisem*

$$\chi_M(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } [x, y] \in M, \\ 0 & \text{pro } [x, y] \notin M. \end{cases}$$

Předchozí věta má tento důležitý důsledek:

Věta 19.14 *Nechť $K \cap L = \emptyset$ a funkce f definovaná na množině $M = K \cup L$ má oba Riemannovy integrály $\int_K f(x,y)\,dx\,dy$ a $\int_L f(x,y)\,dx\,dy$, pak existuje i integrál $\int_M f(x,y)\,dx\,dy$ a platí*

$$\int_M f(x,y)\,dx\,dy = \int_K f(x,y)\,dx\,dy + \int_L f(x,y)\,dx\,dy.$$

Důkaz. Protože $K \cap L = \emptyset$, platí

$$\chi_M = \chi_K + \chi_L \quad \text{a také} \quad f \cdot \chi_M = f \cdot \chi_K + f \cdot \chi_L.$$

A protože existují Riemannovy integrály funkcí

$$\int_K f(x,y)\,dx\,dy = \int_M f(x,y)\chi_K(x,y)\,dx\,dy,$$
$$\int_L f(x,y)\,dx\,dy = \int_M f(x,y)\chi_L(x,y)\,dx\,dy,$$

existuje podle věty 19.12 také integrál $\int_M f(x,y)\,dx\,dy$ a platí

$$\int_M f(x,y)\,dx\,dy = \int_K f(x,y)\,dx\,dy + \int_L f(x,y)\,dx\,dy.$$

$\square$

Na závěr této části si ještě uvedeme užitečnou větu o monotonii Riemannova integrálu.

Věta 19.15 **(Monotonie Riemannova integrálu.)** *Nechť funkce f a g jsou omezené v intervalu $I = [a,b] \times [c,d]$ $(a < b, c < d)$. Existují-li integrály $\int_I f(x,y)\,dx\,dy$, $\int_I g(x,y)\,dx\,dy$ a je-li $f(x) \geq g(x)$ pro všechna $[x,y]$ z intervalu I. Potom platí*

$$\int_I f(x,y)\,dx\,dy \geq \int_I g(x,y)\,dx\,dy.$$

Speciálně pokud $g(x,y) = 0$ tak $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

3. Fubiniho věta

Definice 19.16 **Jednoduchou konečnou po částech hladkou rovinnou křivkou** *rozumíme množinu bodů $[x,y]$ v rovině xy, daných parametricky rovnicemi*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

přičemž předpokládáme, že

- *$\varphi(t)$, $\psi(t)$ jsou v intervalu $[\alpha, \beta]$ spojité a mají tam po částech spojité derivace $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$.*
- *Tyto derivace nejsou pro žádné $t \in [\alpha, \beta]$ zároveň rovny nule (v bodech nespojitosti a v koncových bodech intervalu $[\alpha, \beta]$ rozumíme hodnotami funkcí $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ hodnoty jejich spojitého prodloužení).*
- *Pro žádnou dvojici $t_1 \neq t_2$ z $[\alpha, \beta]$ (popřípadě s výjimkou dvojice $t_1 = \alpha$ a $t_2 = \beta$) neplatí zároveň*

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2), \qquad \psi(t_1) = \psi(t_2).$$

Poznámka 19.17 *Poslední podmínka vyjadřuje jednoduchost křivky – tedy křivka sama sebe neprotíná. Je-li $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ a zároveň $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$, říkáme, že křivka je* **uzavřená**. *Geometricky tedy jednoduchá konečná po částech hladká křivka je křivka konečné délky, sama sebe neprotínající a složená z konečného počtu křivek se spojitě se měnící tečnou.*

Příklad 19.18 *Obvod čtverce je jednoduchá konečná po částech hladká uzavřená křivka (skládající se ze čtyř hladkých křivek). Kružnice a elipsa jsou rovněž jednoduché po částech hladké uzavřené křivky.*

Definice 19.19 *Nechť Ω je omezená oblast v rovině. Tvoří-li její hranici konečný počet jednoduchých konečných po částech hladkých křivek, budeme říkat, že* **oblast Ω je typu A**. *Jsou-li tyto křivky navíc uzavřené, mluvíme o* **uzavřené oblasti typu A**.

Věta 19.20 **(Fubiniova.)** *Nechť f je spojitá funkce v intervalu $I = [a, b] \times [c, d]$ $(a < b, c < d)$, potom*

$$\int_{\mathbf{I}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \mathbf{dx}\, \mathbf{dy} = \int_{\mathbf{c}}^{\mathbf{d}} \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \mathbf{dx}\, \mathbf{dy} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \int_{\mathbf{c}}^{\mathbf{d}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \mathbf{dy}\, \mathbf{dx}.$$

Integrál vlevo se nazývá **dvojný** *a oba integrály vpravo se nazývají* **dvojnásobné**.

Poznámka 19.21 *Platí-li $I = [a, b] \times [c, d]$ a $f(x, y) = g(x)h(y)$, potom z Fubiniovy věty plyne*

$$\int_I f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d h(y)\, dy \int_a^b g(x)\, dx.$$

Poznámka 19.22 *Geometrický význam Fubiniovy věty pro spojitou a kladnou funkci: Pro pevné x představuje funkce $F(x) := \int_c^d f(x,y)\,dy$ obsah grafu pod funkcí $f(x,y)$ v bodě x – tedy obsah řezu v bodě x. Další integrací $\int_a^b F(x)\,dx$ sečteme zhruba řečeno obsahy těchto řezů a dostaneme objem tělesa ohraničeného rovinou xy, přímkami $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, a funkcí f.*

Příklad 19.23 *Spočtěte $\int_I 1 - 6x^2y\,dx\,dy$, kde $I = \{[x,y], 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 1\}$.*

Podle Fubiniovy věty

$$\int_I 1 - 6x^2y\,dx\,dy = \int_{-1}^1 \int_0^2 1 - 6x^2y\,dx\,dy = \int_{-1}^1 \left[x - 2x^3y\right]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_{-1}^1 2 - 16y\,dy = \left[2y - 8y^2\right]_{-1}^1 = 4$$

nebo

$$\int_I 1 - 6x^2y\,dx\,dy = \int_0^2 \int_{-1}^1 1 - 6x^2y\,dy\,dx = \int_0^2 \left[y - 3x^3y^2\right]_{y=-1}^{y=1} dy$$

$$= \int_0^2 (1 - 3x^3) - (-1 - 3x^3)\,dx = \int_{-1}^1 2\,dx = 4.$$

Fubiniovu větu lze zobecnit i pro oblasti, které nejsou obdélníkové:

Věta 19.24 (Fubiniova (obecnější).) *Nechť f je spojitá funkce v oblasti $I = \{[x,y],\ a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$, kde funkce g_1 a g_2 jsou spojité v intervalu $[a,b]$. Potom*

$$\int_I \mathbf{f(x,y)\,dx\,dy} = \int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \mathbf{f(x,y)\,dy\,dx}.$$

Nechť f je spojitá funkce v oblasti $I = \{[x,y],\ c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$, kde funkce h_1 a h_2 jsou spojité v intervalu $[c,d]$. Potom

$$\int_I \mathbf{f(x,y)\,dx\,dy} = \int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \mathbf{f(x,y)\,dx\,dy}.$$

Příklad 19.25 *Spočtěte* $\displaystyle\int_I 3 - x - y\,dx\,dy$, *kde* $I = \{[x,y],\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$.

Podle Fubiniovy věty

$$\int_I 3 - x - y\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^x 3 - x - y\,dy\,dx = \int_0^1 \left[3y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 3x - x^2 - \frac{x^2}{2}\,dx = \int_0^1 \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\,dx = 1.$$

Příklad 19.26 *Převeďte dvojný integrál* $\displaystyle\int_I f(x,y)\,dx\,dy$ *na dvojnásobný. Oblast I leží v prvním kvadrantu a je omezena kružnicí se středem v počátku a poloměrem jedna a přímkou $x + y = 1$.*

Nejprve zjistíme průsečíky. Rovnici přímky $y = 1 - x$ dosadíme do rovnice kružnice $x^2 + y^2 = 1$ a dostaneme

$$1 = x^2 + (1-x)^2 = x^2 + x^2 - 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 2x(x-1).$$

Tedy průsečíky obou křivek mají souřadnice $[0,1]$ a $[1,0]$. Dále v prvním kvadrantu platí

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \sqrt{1-x^2}$$

a

$$(g_2(x) :=)\ \sqrt{1-x^2} \geq 1 - x\ (=: g_1(x)) \quad \textit{pro } x \in [0,1].$$

Celkem tedy máme

$$\int_I f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Příklad 19.27 *Zaměňte pořadí integrace v integrálu* $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx.$

Oblast je tedy vymezena nerovnostmi

$$0 \leq x \leq 1, \quad 1 - x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$

a naším cílem je najít popis oblasti, kde souřadnice y bude mít pevné meze a souřadnice x pohyblivé. Vzhledem k tomu, že funkce $y = 1-x$ a $y = \sqrt{1-x^2}$ jsou monotónní, stačí ke zjištění pevných mezí souřadnice y do nich pouze dosadit krajní hodnoty $x = 0$ a $x = 1$ - v obou případech dostaneme $y = 1$ a $y = 0$, takže $0 \leq y \leq 1$. Dále z rovnic $y = 1 - x$ a $y = \sqrt{1-x^2}$ vyjádříme x - v prvním kvadrantu platí

$$y = 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 - y \quad \textit{a} \quad y = \sqrt{1-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{1-y^2}$$

a také nerovnost

$$(h_2(y) :=)\ \sqrt{1-y^2} \geq 1-y\ (=: h_1(y)) \quad \textit{pro } y \in [0,1].$$

Celkem tedy máme

$$\int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

V některých případech může být obtížné najít integrační meze, potom je lepší si nakreslit obrázek. Jak uvidíme v následujícím příkladu na pořadí integrace záleží v tom smyslu, že pokud zvolíme špatné pořadí, tak si v lepším případě ztížíme výpočet a v horším případě nebudeme vůbec schopni zadaný integrál spočítat. Ukážeme si to na následujícím příkladu.

Příklad 19.28 *Spočtěte* $\displaystyle\int_I \frac{\sin x}{x}\,dx\,dy$, *kde* $I = \{[x,y],\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$.

Podle Fubiniovy věty

$$\int_I \frac{\sin x}{x}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{y \sin x}{x}\right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x \sin x}{x}\,dx = \int_0^1 \sin x\,dx = 1 - \cos 1.$$

Nicméně pokud zaměníme pořadí integrace, dostaneme

$$\int_I \frac{\sin x}{x}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x}\,dx\,dy$$

a tento integrál nejsme schopni spočítat.

V případě, že máme zadány křivky ohraničující integrační oblast, určíme nejprve průsečíky křivek a poté oblast rozdělíme na jednotlivé podoblasti tak, aby v každé podoblasti byla horní (dolní) mez popsána jedinou funkcí.

Příklad 19.29 *Určete integrační meze oblasti určené trojúhelníkem s vrcholy* $[0,0]$, $[2,1]$, $[-2,1]$.

Integrační oblast A *je ohraničena přímkami* $2y = x$, $2y = -x$, $y = 1$. *Tedy*

$$A: \ 0 \le y \le 1, \quad -2y \le x \le 2y,$$

nebo pomocí dvou oblastí A_1, A_2

$$A_1: \ 0 \le x \le 2, \quad \frac{x}{2} \le y \le 1, \qquad A_2: \ -2 \le x \le 0, \quad -\frac{x}{2} \le y \le 1.$$

Je-li tedy f *spojitá funkce dvou proměnných, platí*

$$\int_0^1 \int_{-2y}^{2y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_{x/2}^1 f(x,y)\,dy\,dx + \int_{-2}^0 \int_{-x/2}^1 f(x,y)\,dy\,dx.$$

Příklad 19.30 *Zaměňte pořadí integrace v integrálu* $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2\,dy\,dx$.

Hranice je popsána rovnicemi $y = x$ *a* $y = x^2$, *nebo též rovnicemi* $x = y$ *a* $x = \sqrt{y}$ *pro* $x \ge 0$ *(nalezli jsme tedy vlastně inverzní funkce k funkcím popisující původní hranici). Souřadnice průsečíků jsou* $[0,0]$ *a* $[1,1]$. *Oblast tedy můžeme ekvivalentně popsat nerovnicemi* $0 \le y \le 1$, $y \le x \le \sqrt{y}$ *a tedy*

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2\,dy\,dx = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} xy^2\,dx\,dy.$$

4. Substituce v dvojném integrálu

Věta 19.31 **(Substituce v dvojném integrálu.)** *Nechť otevřená oblast N (proměnných u, v) se zobrazí pomocí rovnic*

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v)$$

vzájemně jednoznačně na otevřenou oblast M (proměnných x, y). Nechť N i M jsou typu A, funkce $x(u, v)$, $y(u, v)$ mají v N spojité první parciální derivace a dále nechť jakobián

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} := \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

je v N různý od nuly. Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá v $\overline{M}$. Potom

$$\int_M f(x, y)\, dx\, dy = \int_N f(x(u, v), y(u, v))|J(u, v)|\, du\, dv.$$

Poznámka 19.32 *V případě, že bychom provedli substituci v dvojném integrálu a poté bychom provedli inverzní substituci, musíme dostat opět původní integrál:*

$$\int_M f(x, y)\, dx\, dy = \int_N f(x(u, v), y(u, v))|J(u, v)|\, du\, dv$$

$$= \int_M f(x, y)|J(u(x, y), v(x, y))||J(x, y)|\, dx\, dy = \int_M f(x, y)\, dx\, dy.$$

Proto musí platit $|J(u(x, y), v(x, y))||J(x, y)| = 1$. To můžeme v případě, že je výpočet jakobiánu inverzní substituce jednodušší než výpočet jakobiánu původní transformace, využít k jeho výpočtu.

Poznámka 19.33 *Důkaz je příliš náročný a nebudeme jej provádět. Uveďme si pouze jednoduchou geometrickou interpretaci. Předpokládejme, že integrovaná funkce f je identicky rovna jedné a oblast M je kruh o poloměru jedna a se středem v počátku. Tuto oblast nyní transformujme do polárních souřadnic:*

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r \in (0,1), \quad \varphi \in (0,2\pi),$$
$$J(r,\varphi) = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\varphi \; r\cos\varphi + r\sin\varphi\sin\varphi = r.$$

Potom $\int_M 1\,dx\,dy$ *je roven obsahu kruhu o poloměru jedna (π). A podle věty o substituci platí*

$$\int_M 1\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,d\varphi = \frac{1}{2}2\pi = \pi.$$

Transformace do polárních souřadnic tedy převádí kruh na obdélník a Jakobián transformace můžeme interpretovat jako míru deformace původní oblasti na novou oblast.

Příklad 19.34 *Spočtěte* $\int_I 4x^2 + 3y\,dx\,dy$*, kde* $I = \{[x,y],\, x^2+y^2 \le 9\}$.

Použijeme transformaci do polárních souřadnic. Potom podle věty o substituci platí

$$\int_I 4x^2 + 3y\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^3 (4r^2\cos^2\varphi + 3r\sin\varphi)r\,dr\,d\varphi = 81\pi.$$

Příklad 19.35 *Spočtěte* $\int_I 3y\,dx\,dy$, *kde* $I = \{[x,y],\ x^2+y^2 \le 4x,\ y \ge 0\}$.

Integrační obor je popsán nerovnostmi

$$(x-2)^2 + y^2 \le 2^2, \qquad y \ge 0. \tag{19.1}$$

Je to tedy půlkruh v horní polorovině se středem v bodě $[2,0]$ *a poloměrem* 2. *Použijeme transformaci do zobecněných polárních souřadnic*

$$x = 2 + r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Nyní musíme určit meze nové oblasti – to provedeme tak, že dosadíme $x(r,\varphi)$ *a* $y(r,\varphi)$ *do nerovností (19.1)*

$$(2 + r\cos\varphi - 2)^2 + (r\sin\varphi)^2 \le 2^2, \quad r\sin\varphi \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2 \le 2^2, \quad r\sin\varphi \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad 0 \le r \le 2, \quad r\sin\varphi \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le r \le 2, \quad \sin\varphi \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad 0 \le r \le 2, \quad 0 \le \varphi \le \pi.$$

Potom podle věty o substituci platí

$$\int_I 3y\,dx\,dy = \int_0^\pi \int_0^2 3r\sin\varphi\ r\,dr\,d\varphi = 16.$$

Příklad 19.36 *Spočtěte* $\int_I 3y\,dx\,dy$, *kde* $I = \{[x,y],\ 1 \le x^2 + 4y^2 \le 4,\ y \ge 0,\ x \ge 0\}$.

Použijeme opět transformaci do zobecněných polárních souřadnic

$$x = r\cos\varphi, \quad y = \frac{r}{2}\sin\varphi.$$

Nyní musíme určit meze nové oblasti – to provedeme tak, že dosadíme $x(r,\varphi)$ a $y(r,\varphi)$ do nerovností popisujících oblast I

$$1 \le (r\cos\varphi)^2 + 4\left(\frac{r}{2}\sin\varphi\right)^2 \le 4, \quad r\sin\varphi \ge 0, \quad r\cos\varphi \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \le r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2 \le 4, \quad r\sin\varphi \ge 0, \quad r\cos\varphi \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \le r \le 2, \quad r\sin\varphi \ge 0, \quad r\cos\varphi \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \le r \le 2, \quad \sin\varphi \ge 0, \quad \cos\varphi \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \le r \le 2, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

$$J(r,\varphi) = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\varphi\ \frac{r}{2}\cos\varphi + r\sin\varphi\ \frac{\sin\varphi}{2} = \frac{r}{2}.$$

Potom podle věty o substituci platí

$$\int_I 3y\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\int_1^2 3r\sin\varphi\frac{r}{2}\,dr\,d\varphi = \int_0^{\pi/2}\frac{7}{2}\sin\varphi\,d\varphi = \frac{7}{2}.$$

Příklad 19.37 *Spočtěte* $\int_I xy\,dx\,dy$, *kde I je oblast ohraničená křivkami $x = y^2$, $2x = y^2$, $y = x^2$, $2y = x^2$ a nerovnostmi $x > 0$, $y > 0$.*

Oblast I je tedy omezena nerovnostmi

$$y \le x^2 \le 2y, \quad x \le y^2 \le 2x$$

$$\Leftrightarrow \qquad 1 \le \frac{x^2}{y} \le 2, \quad 1 \le \frac{y^2}{x} \le 2.$$

Potom bude nejvhodnější použít transformaci

$$u = \frac{x^2}{y}, \quad v = \frac{y^2}{x}, \quad 1 \le u \le 2, \quad 1 \le v \le 2.$$

Z toho plyne $uv = xy$, $\dfrac{u}{v} = \dfrac{x^3}{y^3}$ *nebo-li*

$$x = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{u}{v}}uv} = \sqrt[3]{u^2v}, \quad y = \frac{uv}{\sqrt[3]{u^2v}} = \sqrt[3]{uv^2}.$$

Nyní spočteme Jakobián transformace

$$J(u,v) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{u^{-1}v}\frac{2}{3}\sqrt[3]{uv^{-1}} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{u^2v^{-2}}\frac{1}{3}\sqrt[3]{u^{-2}v^2} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

Potom podle věty o substituci platí

$$\int_I xy\,dx\,dy = \int_1^2\int_1^2 \frac{uv}{3}\,du\,dv = \int_0^2 \frac{v}{2}\,dv = \frac{3}{4}.$$

Spočteme tento příklad ještě jednou s využitím jakobiánu inverzní transformace.

Příklad 19.38 *Spočtěte* $\int_I xy\,dx\,dy$, *kde* I *je oblast ohraničená křivkami* $x = y^2$, $2x = y^2$, $y = x^2$, $2y = x^2$ *a nerovnostmi* $x > 0$, $y > 0$.

Oblast I *je tedy omezena nerovnostmi*

$$y \le x^2 \le 2y, \quad x \le y^2 \le 2x$$

$$\Leftrightarrow \qquad 1 \le \frac{x^2}{y} \le 2, \quad 1 \le \frac{y^2}{x} \le 2.$$

Potom bude nejvhodnější použít transformaci

$$u = \frac{x^2}{y}, \quad v = \frac{y^2}{x}, \quad 1 \le u \le 2, \quad 1 \le v \le 2.$$

Nyní spočteme Jakobián inverzní transformace

$$J(x,y) = \frac{2x}{y}\frac{2y}{x} - \frac{-x^2}{y^2}\frac{-y^2}{x^2} = 4 - 1 = 3.$$

Tedy podle poznámky 19.32 je $J(u,v) = \dfrac{1}{J(x(u,v),y(u,v))} = \dfrac{1}{3}$ *a potom podle věty o substituci platí*

$$\int_I xy\,dx\,dy = \int_1^2\int_1^2 \frac{uv}{3}\,du\,dv = \int_0^2 \frac{v}{2}\,dv = \frac{3}{4}.$$