

Matematika 1 (MA1-M) - otázky ke zkoušce I

Václav Finěk (KMD FP TUL)

1 Základní pojmy

Otázka 1.1. *Definujte pojmy: dolní mez množiny, horní mez množiny, supremum, infimum, maximum a minimum. Napište větu o supremu a infimu.*

Otázka 1.2. *Napište tabulku pravdivostních hodnot pro negaci, implikaci, konjunkci, disjunkci a ekvivalenci. Dokažte následující ekvivalenci $\neg(A \Rightarrow B) \iff (A \wedge \neg B)$. Negujte výrok $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 > 2x$.*

Otázka 1.3. *Uveďte příklad přímého důkazu.*

Otázka 1.4. *Uveďte příklad nepřímého důkazu.*

Otázka 1.5. *Uveďte příklad důkazu sporem.*

Otázka 1.6. *Uveďte příklad důkazu matematickou indukcí.*

Otázka 1.7. *Definujte uspořádanou dvojici, kartézský součin, binární relaci. Dále uveďte příklady zobrazení: množiny A do B , z A na B , prosté zobrazení A do B , vzájemně jednoznačné zobrazení mezi A a B a inverzní zobrazení.*

2 Funkce jedné proměnné

Otázka 2.1. *Definujte funkci, její definiční obor a obor hodnot. Dále definujte složenou funkci a funkce rostoucí, klesající, nerostoucí a neklesající v intervalu J , funkce monotónní a ryze monotónní. Napište, kdy jsou dvě funkce totožné.*

Otázka 2.2. *Definujte funkci prostou, inverzní a identickou. Napište větu o existenci a jednoznačnosti inverzní funkce.*

Otázka 2.3. *Definujte funkci zdola omezenou, zhora omezenou, omezenou, sudou, lichou a periodickou.*

Otázka 2.4. *Definujte funkce sinus, kosinus, signum, absolutní hodnotu a celou část. Popište zavedení cyklometrických funkcí.*

Otázka 2.5. *Uveďte čtyři možnosti zadání rovinné křivky a ke každé možnosti uveďte příklad.*

3 Limita posloupnosti

Otázka 3.1. *Definujte posloupnost, monotónní, ryze monotónní a vybranou posloupnost. Dále napište definici vlastní limity posloupnosti. Ověřte, že limita posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ je nula.*

Otázka 3.2. *Napište větu o jednoznačnosti limity posloupnosti a větu o omezenosti konvergentní posloupnosti. Ověřte, že posloupnost $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nemá limitu. Uveďte příklad omezené posloupnosti, která není konvergentní. Dále uveďte příklad posloupností, z nichž jedna je větší než druhá, ale limitu mají stejnou.*

Otázka 3.3. *Napište větu o aritmetice limit posloupností a větu o limitě sevřené posloupnosti. Uveďte výsledek limity $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x}$ pro $x \geq 0$ a výsledek limity $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$ v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.*

Otázka 3.4. *Napište definice obou nevlastních limit posloupností. Ověřte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} -n^2 = -\infty$.*

Otázka 3.5. *Napište větu o limitě neklesající posloupnosti, o limitě nerostoucí posloupnosti a o existenci limity monotónní posloupnosti. Uveďte výsledek limity $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.*

4 Spojitost a limita funkce

Otázka 4.1. *Napište definici spojitosti funkce. Ověřte, že funkce $f(x) = x$ a $g(x) = c$ jsou spojitě $\forall x \in \mathbb{R}$ a funkce $\ln x$ je spojitá pro $x > 0$.*

Otázka 4.2. *Napište větu o spojitosti absolutní hodnoty, součtu, rozdílu, součinu a podílu a větu o spojitosti složené funkce.*

Otázka 4.3. *Napište definici spojitosti zleva, zprava a v intervalu. Dále napište větu o spojitosti inverzní funkce.*

Otázka 4.4. *Napište definici vlastní limity, limity zleva, limity zprava, nevlastních limit a limit v nevlastních bodech. Ověřte, že $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.*

Otázka 4.5. *Napište větu o jednoznačnosti limity funkce, větu o limitě spojitě funkce a dále nutnou a postačující podmínku existence limity. Pozměňte funkci $\frac{\sin x}{x}$ tak, aby byla spojitá $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Otázka 4.6. *Napište větu o limitě sevřené funkce, větu o aritmetice limit funkcí a větu o limitě složené funkce. Spočtěte $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x^2-1} - 1}{x^2 - 1}$.*

5 Derivace

Otázka 5.1. *Napište definici derivace (zleva a zprava) a druhé derivace. Uvedte její geometrický a fyzikální význam. Napište nutnou a postačující podmínku existence derivace. Spočtěte podle definice derivaci funkce x^n pro $n \in \mathbb{N}$.*

Otázka 5.2. *Uvedte příklad funkce, která je ve vybraném bodě spojitá, ale nemá v něm derivaci. Dále uveďte příklad funkce, která má ve vybraném bodě derivaci, ale není v něm spojitá.*

Otázka 5.3. *Napište větu o derivaci součtu, součinu a podílu. Odvoďte derivace funkcí $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$.*

Otázka 5.4. *Napište větu o derivaci inverzní funkce. Odvoďte derivace funkcí: $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$.*

Otázka 5.5. *Napište větu o derivaci složené funkce. Odvoďte derivaci funkce $f(x)^{g(x)}$ pro $f(x) > 0$. Dále napište Leibnizův vzorec a spočtěte derivaci $((ax + b)e^x)^{(n)}$.*

Otázka 5.6. *Napište definici diferenciálu, jeho geometrický význam a nutnou a postačující podmínku existenci diferenciálu. Pomocí diferenciálu spočtěte přibližnou hodnotu $\sqrt{9,2}$.*