

Matematika 1 (MA1-M) - otázky ke zkoušce II

Václav Finěk (KMD FP TUL)

1 Obecné věty o spojitosti a derivaci

Otázka 1.1. *Napište větu o omezenosti spojitě funkce. Uvedte příklad funkce, která je spojitá na otevřeném intervalu, ale není tam omezená. Dále napište větu o nabývání minima a maxima a větu o nabývání hodnot. Uvedte příklad funkce, která zobrazuje interval na jednobodovou množinu.*

Otázka 1.2. *Definujte funkci rostoucí v bodě a funkci klesající v bodě. Popište význam znaménka první derivace pro průběh funkce. Napište Rolleovu větu a načrtněte její geometrickou interpretaci. Dále napište větu o derivaci parametricky zadané funkce.*

Otázka 1.3. *Napište větu o střední hodnotě a načrtněte její geometrickou interpretaci. Dále napište zobecněnou větu o střední hodnotě a l'Hospitalovo pravidlo. Spočtěte $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$,*

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}.$$

Otázka 1.4. *Napište definici bodu ležícího nad (pod) přímkou, funkce konvexní, konkávní, ryze konvexní a ryze konkávní v intervalu. Uvedte vztah mezi konvexností a konkávností funkcí f a $-f$. Popište význam znaménka druhé derivace pro průběh funkce.*

Otázka 1.5. *Napište definice funkce ryze konvexní v bodě, funkce ryze konkávní v bodě a inflexního bodu. Dále napište větu o významu znaménka druhé derivace a nutnou a postačující podmínku existence inflexe.*

Otázka 1.6. *Napište definice globálního minima, globálního maxima, lokálního minima, lokálního maxima. Dále uveďte větu o hledání absolutních extrémů a nutnou a postačující podmínku existence lokálního extrému.*

Otázka 1.7. *Uvedte příklad funkce, která má v bodě 0 derivaci rovnu nule (nemá v bodě 0 derivaci) a (ne)má v tomto bodě lokální extrém. Dále napište definici (svislé) asymptoty a vzorce pro výpočet asymptot.*

2 Určitý nebo-li Riemannův integrál

Otázka 2.1. *Definujte dělení, zjemňující dělení, horní součet, dolní součet, dolní a horní Riemannův integrál a Riemannův integrál včetně geometrické interpretace.*

Otázka 2.2. Definujte normu dělení. Spočítejte dolní a horní Riemannův integrál funkce x přes interval $[0, 1]$ a uveďte věty nutné k jejich výpočtu. Dále uveďte další zobecnění těchto vět, které umožňuje přímo spočítat určitý integrál.

Otázka 2.3. Uveďte základní vlastnosti určitého integrálu. Linearitu vzhledem k integrandu, aditivitu integračních mezí a základní nerovnosti.

Otázka 2.4. Popište vlastnosti integrálu jako funkce horní meze a napište větu o existenci určitého integrálu.

3 Neurčitý integrál nebo-li primitivní funkce

Otázka 3.1. Definujte primitivní funkci a uveďte, jak je to s její existencí a jednoznačností. Dále napište větu o její linearitě vzhledem k integrandu, větu o substituci a odvoďte integraci per partes.

Otázka 3.2. Spočítejte $\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ $n \in \mathbb{N}$ a následně $\int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$.

Otázka 3.3. Spočítejte $\int \sin(ax)e^{bx} dx$ $a, b \in \mathbb{R}$ a $a \neq 0$. Napište větu o souvislosti primitivní funkce s určitým integrálem.

4 Integrace vybraných funkcí

Otázka 4.1. Rozložte funkci $\frac{x^7 + 5x^6 + 5x^5 + 9x^3 + 24x^2 - 9x + 9}{x^3(x^2 + 3)^2}$ na parciální zlomky.

Otázka 4.2. Spočítejte $\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx$, kde $\frac{p^2}{4} - q < 0$, $N, M \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$.

Otázka 4.3. Spočítejte integrál $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x - 1}}$.

Otázka 4.4. Spočítejte integrál $\int \frac{dx}{x - 1 + \sqrt{-x^2 + 4x - 3}}$.

Otázka 4.5. S pomocí Ostrogradského vzorce

$$\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{px^2 + rx + s}} \stackrel{c}{=} Q_{n-1}(x)\sqrt{px^2 + rx + s} + \int \frac{k dx}{\sqrt{px^2 + rx + s}}$$

spočítejte integrál $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Otázka 4.6. Spočítejte integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x} dx$.

5 Dodatky a aplikace

Otázka 5.1. *Napište definice všech variant zobecněných Riemannových integrálů. Spočítejte zobecněný integrál $\int_{-1}^1 x^{-2/3} dx$.*

Otázka 5.2. *Popište vlastnosti obsahu a napište větu o výpočtu obsahu plochy pod grafem nezáporné funkce a větu o výpočtu obsahu plochy nad grafem nekladné funkce. Vypočítejte například obsah obrazce ohraničeného funkcemi $x^3 - 4x$ a $4x - x^3$.*

Otázka 5.3. *Popište odvození délky křivky (dělení, délka lomené čáry, vztah mezi zjemněným dělením a délkou lomené čáry). Dále napište definici délky křivky a větu o výpočtu délky křivky. Podle této věty spočítejte obvod kružnice o poloměru R .*

Otázka 5.4. *Definujte metrický prostor, ekvivalentní metriky, dolní a horní vzdálenost bodu od množiny, dolní a horní vzdálenost dvou množin a průměr množiny. Uveďte tři příklady metrik v prostoru \mathbb{R}^n .*

Otázka 5.5. *Definujte uzávěr množiny, uzavřenou množinu, okolí bodu a prstencové okolí bodu, vnitřní bod, vnitřek množiny, otevřenou množinu a hranici množiny. Ukažte, jak vypadají jednotková okolí bodu $[0, 0]$ ve třech metrikách v prostoru \mathbb{R}^2 . Dále uveďte příklad otevřené a uzavřené množiny v prostoru \mathbb{R}^2 .*