

Matematika 1 - příklady k procvičení

Václav Finěk

26. ledna 2026

1 Inverzní funkce

Příklad 1.1 Najděte inverzní funkci k funkci $f(x) = \frac{2 - \operatorname{arccotg}(x-1)}{2}$ a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.

Výsledek: $f^{-1}(x) = 1 + \cotg(2 - 2x)$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left(\frac{2-\pi}{2}, 1\right)$, $R(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$.

Příklad 1.2 Najděte inverzní funkci k funkci $f(x) = \frac{2 - 5 \sin(2x-1)}{2}$ a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.

Výsledek: $f^{-1}(x) = \frac{1 + \arcsin\left(\frac{2-2x}{5}\right)}{2}$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left[\frac{-3}{2}, \frac{7}{2}\right]$, $R(f^{-1}) = D(f) = \left[\frac{2-\pi}{4}, \frac{2+\pi}{4}\right]$.

Příklad 1.3 Najděte inverzní funkci k funkci $f(x) = \frac{1 - 3 \arccos(1-2x)}{4}$ a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.

Výsledek: $f^{-1}(x) = \frac{1 - \cos\left(\frac{1-4x}{3}\right)}{2}$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left[\frac{1-3\pi}{4}, \frac{1}{4}\right]$, $R(f^{-1}) = D(f) = [0, 1]$.

Příklad 1.4 Najděte inverzní funkci k funkci $f(x) = \frac{1 - \operatorname{tg}(x+1)}{3}$ a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.

Výsledek: $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(1-3x)-1$, $D(f^{-1}) = R(f) = \mathbb{R}$, $R(f^{-1}) = D(f) = \left(-\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2} - 1\right)$.

Příklad 1.5 Najděte inverzní funkci k funkci $f(x) = \frac{2 - \operatorname{arctg}(3-2x)}{4}$ a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.

Výsledek: $f^{-1}(x) = \frac{3 - \operatorname{tg}(2-4x)}{2}$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left(\frac{4-\pi}{8}, \frac{4+\pi}{8}\right)$, $R(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$.

Příklad 1.6 Najděte inverzní funkci k funkci $f(x) = \frac{1 - \operatorname{arccotg}(1-x)}{2}$ a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.

Výsledek: $f^{-1}(x) = 1 - \cotg(1-2x)$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left(\frac{1-\pi}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $R(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$.

Příklad 1.7 Najděte inverzní funkci k funkci $f(x) = \frac{1 - \operatorname{arctg}(1-x)}{4}$ a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.

Výsledek: $f^{-1}(x) = 1 - \operatorname{tg}(1-4x)$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left(\frac{2-\pi}{8}, \frac{2+\pi}{8}\right)$, $R(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$.

Příklad 1.8 Najděte inverzní funkci k funkci $f(x) = \frac{3 \arcsin(2x) - 1}{2}$ a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.

Výsledek: $f^{-1}(x) = \frac{\sin(\frac{2x+1}{3})}{2}$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left[\frac{-3\pi-2}{4}, \frac{3\pi-2}{4}\right]$, $R(f^{-1}) = D(f) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Příklad 1.9 Najděte inverzní funkci k funkci $f(x) = \frac{-4 + 3 \operatorname{arctg} x}{2}$ a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.

Výsledek: $f^{-1}(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{2x+4}{3}\right)$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left(\frac{-3\pi-8}{4}, \frac{3\pi-8}{4}\right)$, $R(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$.

Příklad 1.10 Najděte inverzní funkci k funkci $f(x) = \frac{3 - \log_4(2x)}{4}$ a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.

Výsledek: $f^{-1}(x) = \frac{4^{3-4x}}{2}$, $D(f^{-1}) = R(f) = \mathbb{R}$, $R(f^{-1}) = D(f) = (0, \infty)$.

Příklad 1.11 Najděte inverzní funkci k funkci $f(x) = \frac{1 - 3 \sin(4x)}{2}$ a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.

Výsledek: $f^{-1}(x) = \frac{\arcsin(\frac{1-2x}{3})}{4}$, $D(f^{-1}) = R(f) = [-1, 2]$, $R(f^{-1}) = D(f) = \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$.

Příklad 1.12 Najděte inverzní funkci k funkci $f(x) = \frac{\operatorname{arccotg}(2x) - 3}{4}$ a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.

Výsledek: $f^{-1}(x) = \frac{\cotg(4x+3)}{2}$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{\pi-3}{4}\right)$, $R(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$.

Příklad 1.13 Najděte inverzní funkci k funkci $f(x) = \frac{\operatorname{arccotg}(4x) - 3}{2}$ a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.

Výsledek: $f^{-1}(x) = \frac{\cotg(2x+3)}{4}$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{\pi-3}{2}\right)$, $R(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$.

Příklad 1.14 Najděte inverzní funkci k funkci $f(x) = \frac{\arctg(2x) - 1}{4}$ a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.

Výsledek: $f^{-1}(x) = \frac{\operatorname{tg}(4x+1)}{2}$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left(-\frac{\pi+2}{8}, \frac{\pi-2}{8}\right)$, $R(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$.

Příklad 1.15 Najděte inverzní funkci k funkci $f(x) = \frac{-3 + 2 \operatorname{arccotg} x}{4}$ a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.

Výsledek: $f^{-1}(x) = \operatorname{cotg}\left(\frac{4x+3}{2}\right)$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left(\frac{-3}{4}, \frac{2\pi-3}{4}\right)$, $R(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$.

Příklad 1.16 Najděte inverzní funkci k funkci $f(x) = \frac{\operatorname{tg}(x-1) - 3}{4}$ a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.

Výsledek: $f^{-1}(x) = \arctg(4x+3)+1$, $D(f^{-1}) = R(f) = \mathbb{R}$, $R(f^{-1}) = D(f) = \left(1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}\right)$.

Příklad 1.17 Najděte inverzní funkci k funkci $f(x) = \frac{\cos(2-x) + 3}{2}$ a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.

Výsledek: $f^{-1}(x) = 2 - \arccos(2x-3)$, $D(f^{-1}) = R(f) = [1, 2]$, $R(f^{-1}) = D(f) = [2-\pi, 2]$.

Příklad 1.18 Najděte inverzní funkci k funkci $f(x) = \frac{\arctg(x) - 2}{5}$ a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.

Výsledek: $f^{-1}(x) = \operatorname{tg}(5x+2)$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left(\frac{-\pi-4}{10}, \frac{\pi-4}{10}\right)$, $R(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$.

2 Limity

Příklad 2.1 Spočtěte limitu posloupnosti $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2n + 5n^2}{2n - n^2}$ $(-\infty)$.

Příklad 2.2 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln^2(x^2)}$ (∞) .

Příklad 2.3 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x + 5)^2}{x^2 - 25}$ $(\text{Limita neexistuje})$.

Příklad 2.4 Spočtěte limitu posloupnosti $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 3n}{7n - 4n^2}$ (0) .

Příklad 2.5 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x$ (0) .

Příklad 2.6 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 4x + 3}{(x^2 - 9)^2}$ $(\text{Limita neexistuje})$.

Příklad 2.7 Spočtěte limitu posloupnosti $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n - 4n^2}{1 - 3n}$ (∞) .

Příklad 2.8 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \ln^2(x^2)$ (0) .

Příklad 2.9 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x^2 - 4)^3}$ $(-\infty)$.

Příklad 2.10 Spočtěte limitu posloupnosti $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 + 3n^2}{1 - 2n}$ $(-\infty)$.

Příklad 2.11 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos^2 x - 1)^2}{x^4}$ (1) .

Příklad 2.12 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 3)^2}{x^2 - 9}$ $(\text{Limita neexistuje})$.

Příklad 2.13 Spočtěte limitu posloupnosti $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 2n^2}{2 - n}$ $(-\infty)$.

Příklad 2.14 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[4]{x^3} \ln^2 x$ (0) .

Příklad 2.15 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{(9 - x^2)^2}$ $(\text{Limita neexistuje})$.

Příklad 2.16 Spočtěte limitu posloupnosti $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2n + 5n^2}{-2n}$ $(-\infty)$.

Příklad 2.17 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x^2}{x}$ (0) .

Příklad 2.18 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x^2-9)^2}$ (*Limita neexistuje*).

Příklad 2.19 *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+n-3n^2}{n+2n^2}$ $(-\frac{3}{2})$.

Příklad 2.20 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\ln^2 x}$ (∞) .

Příklad 2.21 $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x+5}{(x^2-25)^3}$ $(-\infty)$.

Příklad 2.22 *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2+2n}{1+2n^3}$ (0) .

Příklad 2.23 *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5-5n^3+1}{-5n^4+4n^2-n}$ $(-\infty)$.

Příklad 2.24 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x-4}{x^2-4}$ (*Limita neexistuje*).

Příklad 2.25 *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3-2n^2+1}{1-3n}$ $(-\infty)$.

Příklad 2.26 *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4+2n^3-6n+2}{-4n^4-5n^2-2n}$ $(-\frac{5}{4})$.

Příklad 2.27 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{-2x+8}{(x^2-16)^2}$ (*Limita neexistuje*).

Příklad 2.28 *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5n^2-2n+10}{20n^2+5n+7}$ $(-\frac{1}{4})$.

Příklad 2.29 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x^2+8}{-x^3+x^2+16x+20}$ (*Limita neexistuje*).

Příklad 2.30 *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^8+2n^4+1}{-n^9+2n^5-n}$ (0) .

Příklad 2.31 *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n^2-n+11}{20n-7}$ $(-\infty)$.

Příklad 2.32 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x^2+8}{x^3+x^2-16x+20}$ (*Limita neexistuje*).

Příklad 2.33 *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^8+2n^4+1}{-n^8+2n^5-n}$ (-1) .

Příklad 2.34 *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-n+11}{7-20n}$ $(-\infty)$.

Příklad 2.35 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 8}{e^{2x-1}}$ (0).

Příklad 2.36 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{(9 - x^2)(3 - x)}$ (Limita neexistuje).

Příklad 2.37 Spočtěte limitu posloupnosti $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \sqrt[n]{10^6} + \left(\frac{99}{100}\right)^n \right)$ $(e + 1)$.

Příklad 2.38 Spočtěte limitu posloupnosti $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2 + 2n}{1 + 2n}$ $(-\infty)$.

Příklad 2.39 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{-5x^2}$ $(-\infty)$.

Příklad 2.40 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x - 4}{(x^2 - 4)^2}$ $(-\infty)$.

Příklad 2.41 Spočtěte limitu posloupnosti $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2n}{2n - n^2}$ (0).

Příklad 2.42 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{4x}}{\ln x}$ (∞) .

Příklad 2.43 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)^2}{x^2 - 4}$ (Limita neexistuje).

Příklad 2.44 Spočtěte limitu posloupnosti $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{-3n^4 + 5n^2 + 1}$ (0).

Příklad 2.45 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x^3 - 7x + 1}{-3x^4 + 4x^2 + x}$ $(-\frac{2}{3})$.

Příklad 2.46 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + 4}{(x^2 - 4)^2}$ (Limita neexistuje).

Příklad 2.47 Spočtěte limitu posloupnosti $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n + 2n^2}{2 + 5n - n^2}$ (-2) .

Příklad 2.48 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1 - x)}{(x^2 - 1)^2}$ (Limita neexistuje).

Příklad 2.49 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(1 - x)}{e^x}$ (0).

Příklad 2.50 Spočtěte limitu posloupnosti $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n + 2n^2}{n^2 + 5n - n^4}$ (0).

Příklad 2.51 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x + 1)}{x^2 - 1}$ $(-\frac{1}{2})$.

Příklad 2.52 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - 2x}{(1 - x^2)^2}$ *(Limita neexistuje).*

Příklad 2.53 *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - n^3}{-n^2 - 5n + 1}$ (∞) .

Příklad 2.54 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - 1}{x}$ $(-\frac{1}{3})$.

Příklad 2.55 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 + 2x}{(x^2 - 4)^2}$ *(Limita neexistuje).*

3 Průběh funkce

Příklad 3.1 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x}$ včetně absolutních extrémů.

Výsledek: $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, funkce je spojitá na definičním oboru a je lichá.

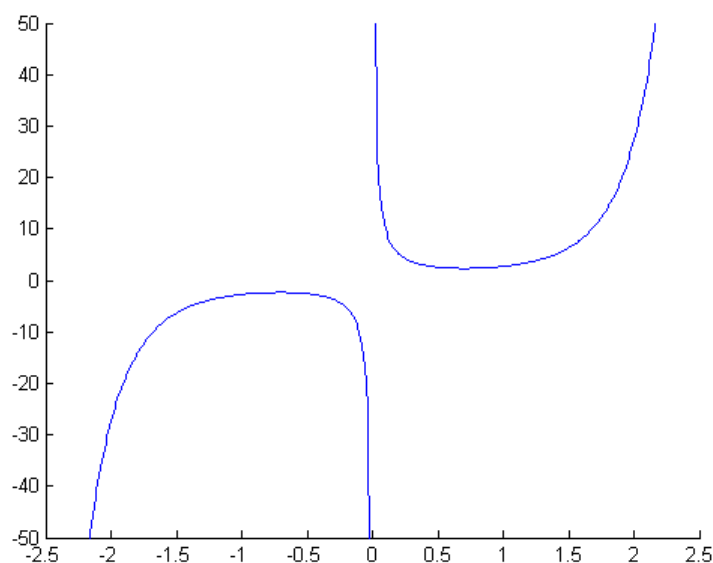
$f'(x) = \frac{e^{x^2}(2x^2 - 1)}{x^2}$, funkce je rostoucí na intervalech $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ a $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \infty\right)$, funkce je klesající na intervalech $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right)$ a $\left(0, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, lokální minimum je v bodě $\sqrt{\frac{1}{2}}$ a lokální maximum je v bodě $-\sqrt{\frac{1}{2}}$.

$f''(x) = \frac{e^{x^2}(4x^4 - 2x^2 + 2)}{x^3}$, funkce je konkávní na intervalu $(-\infty, 0)$, funkce je konvexní na intervalu $(0, \infty)$ a nemá inflexní body.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}}{x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x^2}}{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2}}{x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{x^2}}{x} = -\infty$ a tedy $x = 0$ je asymptota.

Vzhledem k tomu, že výše uvedené limity vyšly $\pm\infty$, nemá funkce absolutní extrémy.

$k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = \infty$, takže funkce nemá žádné další asymptoty.



Obrázek 1: $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x}$.

Příklad 3.2 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ včetně absolutních extrémů.

Výsledek: $D(f) = (0, 1) \cup (1, \infty)$. Funkce je spojitá na definičním oboru.

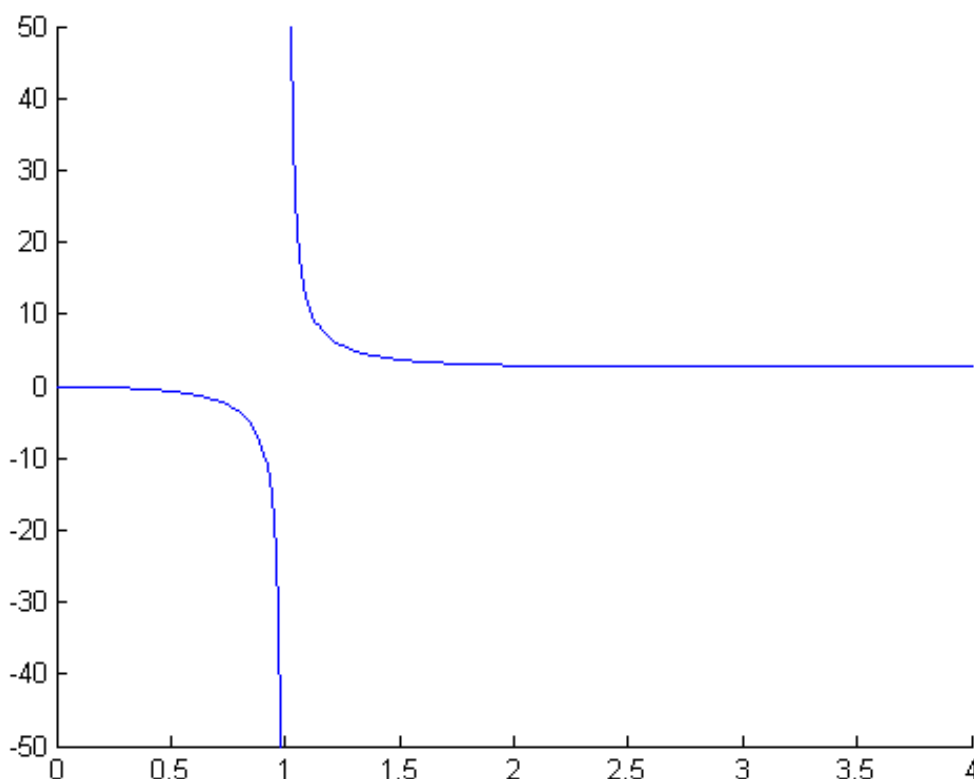
$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, funkce je rostoucí na intervalu (e, ∞) , funkce je klesající na intervalech $(0, 1)$ a $(1, e)$, lokální minimum je v bodě e .

$f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}$, funkce je konkávní na intervalech $(0, 1)$ a (e^2, ∞) , funkce je konvexní na intervalu $(1, e^2)$ a má inflexi v bodě e^2 .

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty$ a tedy $x = 1$ je asymptota.

Vzhledem k tomu, že některé výše uvedené limity vyšly $\pm\infty$, nemá funkce absolutní extrémy.

$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \ln x} = 0$ a $q = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{\ln x} - kx \right) = \infty$, takže funkce nemá žádné další asymptoty.



Obrázek 2: $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

Příklad 3.3 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x^3 \ln x^2$ včetně absolutních extrémů.

Výsledek: $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Funkce je spojitá na definičním oboru a je lichá.

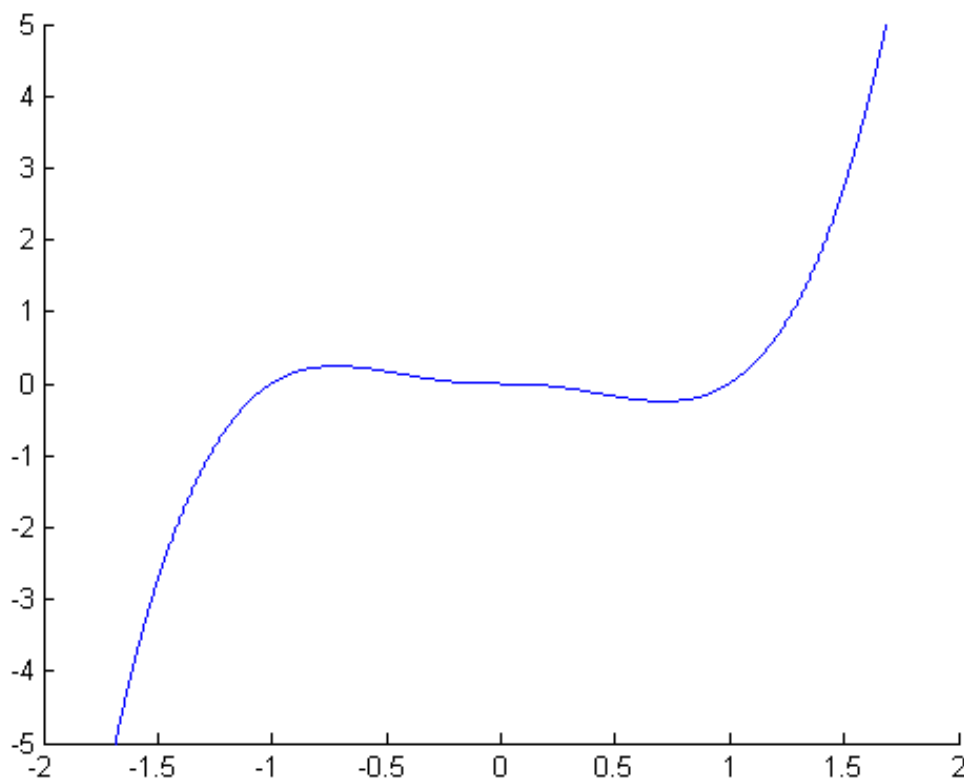
$f'(x) = x^2(3 \ln x^2 + 2)$, funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty, -e^{-1/3})$ a $(e^{-1/3}, \infty)$, funkce je klesající na intervalech $(-e^{-1/3}, 0)$ a $(0, e^{-1/3})$, lokální minimum je v bodě $e^{-1/3}$ a lokální maximum je v bodě $-e^{-1/3}$.

$f''(x) = 2x(3 \ln x^2 + 5)$, funkce je konvexní na intervalech $(-e^{-5/6}, 0)$ a $(e^{-5/6}, \infty)$, funkce je konkávní na intervalech $(-\infty, -e^{-5/6})$ a $(0, e^{-5/6})$ a má inflexi v bodech $-e^{-5/6}$ a $e^{-5/6}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \ln x^2 = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \ln x^2 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \ln x^2 = -\infty.$$

Vzhledem k tomu, že některé výše uvedené limity vyšly $\pm\infty$, nemá funkce absolutní extrémy.

$$k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 \ln x^2}{x} = \infty, \text{ takže funkce nemá žádné asymptoty.}$$



Obrázek 3: $f(x) = x^3 \ln x^2$.

Příklad 3.4 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{x^2 - 1}{e^x}$ včetně absolutních extrémů.

Výsledek: $D(f) = (-\infty, \infty)$. Funkce je spojitá na definičním oboru.

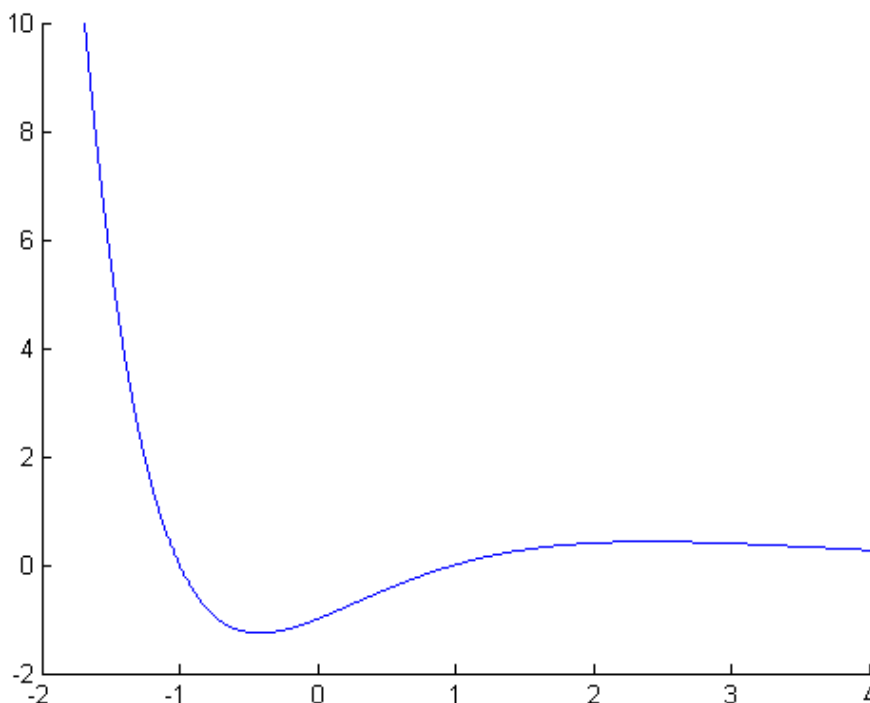
$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{e^x}$, funkce je rostoucí na intervalu $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$, funkce je klesající na intervalech $(-\infty, 1 - \sqrt{2})$ a $(1 + \sqrt{2}, \infty)$, lokální minimum je v bodě $1 - \sqrt{2}$ a lokální maximum je v bodě $1 + \sqrt{2}$.

$f''(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{e^x}$, funkce je konvexní na intervalech $(-\infty, 2 - \sqrt{3})$ a $(2 + \sqrt{3}, \infty)$, funkce je konkávní na intervalu $(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ a má inflexi v bodech $2 - \sqrt{3}$ a $2 + \sqrt{3}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{e^x} = \infty.$$

Vzhledem k tomu, že jedna výše uvedená limita vyšla ∞ , nemá funkce absolutní maximum. Absolutní minimum funkce nabývá v bodě $1 - \sqrt{2}$.

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{xe^x} = 0, \text{ takže funkce má asymptotu } y = 0.$$



Obrázek 4: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{e^x}$.

Příklad 3.5 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$ včetně absolutních extrémů.

Výsledek: $D(f) = (-\infty, \infty)$. Funkce je spojitá na definičním oboru.

$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x - 1}{e^x}$, funkce je klesající na celém definičním oboru a nemá tedy lokální extrémy.

$f''(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{e^x}$, funkce je konvexní na intervalech $(-\infty, 1)$ a $(3, \infty)$, funkce je konkávní na intervalu $(1, 3)$ a má inflexi v bodech 1 a 3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x} = \infty.$$

Vzhledem k tomu, že funkce je definována na otevřeném intervalu a je klesající, nemá absolutní extrémy.

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{xe^x} = 0, \text{ takže funkce má asymptotu } y = 0.$$

Příklad 3.6 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{e^{x^2/2-1}}{x}$ včetně absolutních extrémů.

Výsledek: $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Funkce je spojitá na definičním oboru.

$f'(x) = \frac{e^{x^2/2-1}(x^2 - 1)}{x^2}$, funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$, funkce je klesající na intervalech $(-1, 0)$ a $(0, 1)$, lokální minimum je v bodě 1 a lokální maximum je v bodě -1 .

$f''(x) = \frac{e^{x^2/2-1}(x^4 - x^2 + 2)}{x^3}$, funkce je konvexní na intervalu $(0, \infty)$, funkce je konkávní na intervalu $(-\infty, 0)$ a nemá tedy inflexní body.

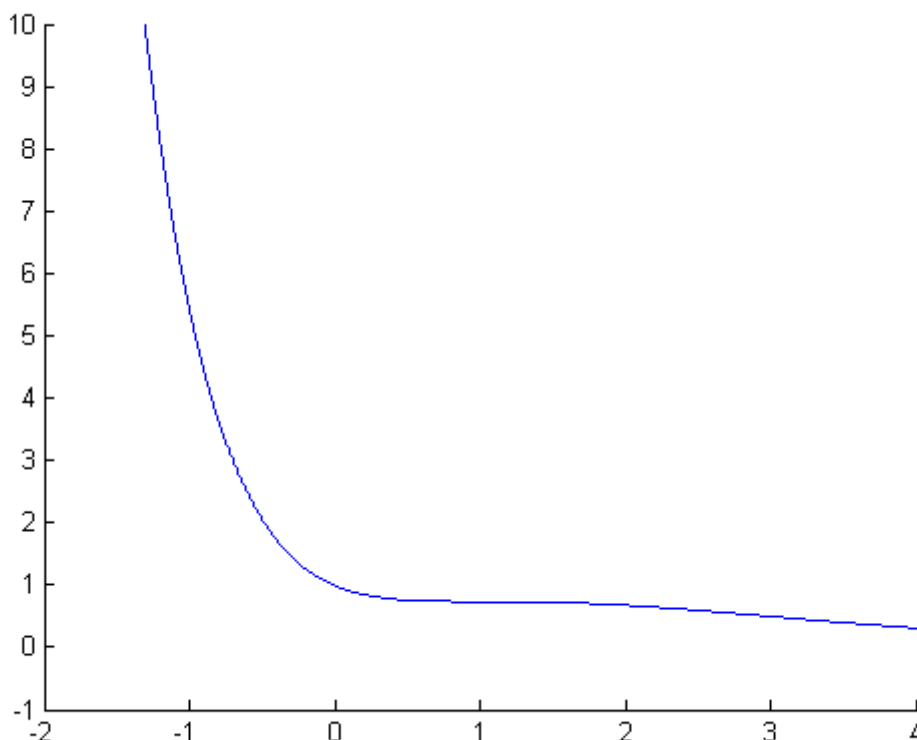
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{x^2/2-1}}{x} = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{e^{x^2/2-1}}{x} = \pm\infty$ a tedy $x = 0$ je asymptota.

Vzhledem k tomu, že některé výše uvedené limity vyšly $\pm\infty$, nemá funkce absolutní extrémy.

$k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{x^2/2-1}}{x^2} = \infty$, takže funkce nemá další asymptoty.

Příklad 3.7 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 9}{x^2 - 9}$ včetně absolutních extrémů.

Výsledek: $D(f) = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$. Funkce je spojitá na definičním oboru.



Obrázek 5: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$.

$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 27)}{(x^2 - 9)^2}$, funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty, -\sqrt{27})$ a $(\sqrt{27}, \infty)$, funkce je klesající na intervalech $(-\sqrt{27}, -3)$, $(-3, 3)$ a $(3, \sqrt{27})$, lokální minimum je v bodě $\sqrt{27}$ a lokální maximum je v bodě $-\sqrt{27}$.

$f''(x) = \frac{18x(x^2 + 27)}{(x^2 - 9)^3}$, funkce je konvexní na intervalech $(-3, 0)$ a $(3, \infty)$, funkce je konkávní na intervalech $(-\infty, -3)$ a $(0, 3)$ a má inflexi v bodě 0.

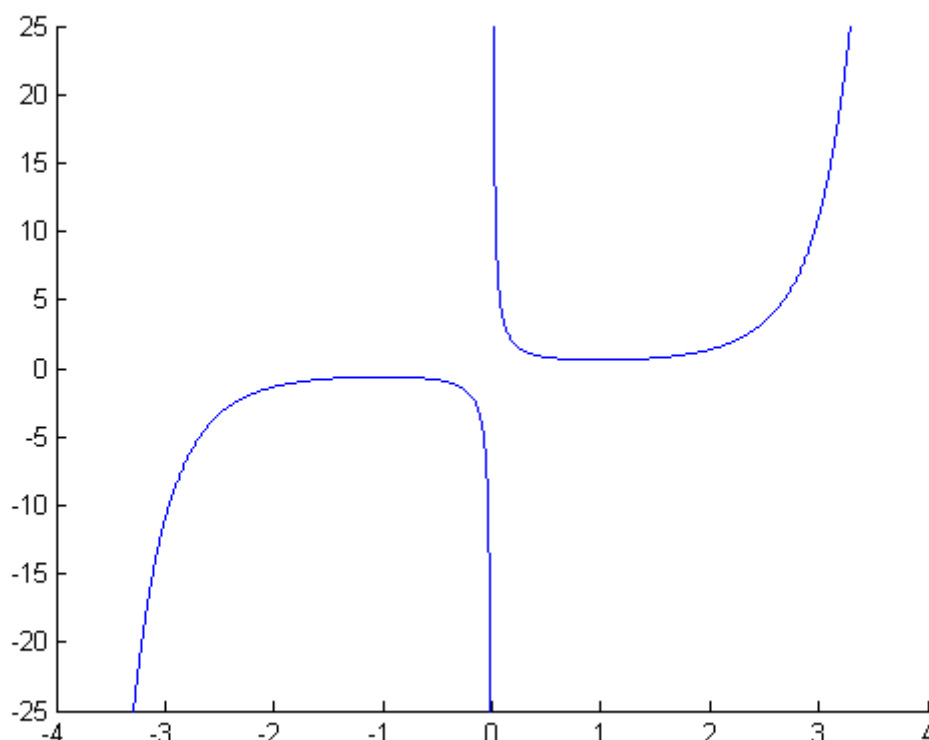
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - x^2 + 9}{x^2 - 9} = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow -3^\pm} \frac{x^3 - x^2 + 9}{x^2 - 9} = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^\pm} \frac{x^3 - x^2 + 9}{x^2 - 9} = \pm\infty$, takže funkce má asymptoty $x = \pm 3$.

Vzhledem k tomu, že některé výše uvedené limity vyšly $\pm\infty$, nemá funkce absolutní extrémy.

$k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - x^2 + 9}{x(x^2 - 9)} = 1$ a $q_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 - x^2 + 9}{(x^2 - 9)} - x \right) = -1$ takže funkce má ještě asymptotu $y = x - 1$.

Příklad 3.8 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{x}{x^2 - 16}$ včetně absolutních extrémů.

Výsledek: $D(f) = (-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, \infty)$. Funkce je lichá a spojitá na definičním oboru.



Obrázek 6: $f(x) = \frac{e^{x^2/2-1}}{x}$.

$f'(x) = \frac{-x^2 - 16}{(x^2 - 16)^2}$, funkce je klesající na intervalech $(-\infty, -4)$, $(-4, 4)$ a $(4, \infty)$ a nemá tedy lokální extrémy.

$f''(x) = \frac{2x(x^2 + 48)}{(x^2 - 16)^3}$, funkce je konvexní na intervalech $(-4, 0)$ a $(4, \infty)$, funkce je konkávní na intervalech $(-\infty, -4)$ a $(0, 4)$ a má inflexi v bodě 0.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 16} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -4^\pm} \frac{x}{x^2 - 16} = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow 4^\pm} \frac{x}{x^2 - 16} = \pm\infty$, takže funkce má asymptoty $x = \pm 4$.

Vzhledem k tomu, že některé výše uvedené limity vyšly $\pm\infty$, nemá funkce absolutní extrémy.

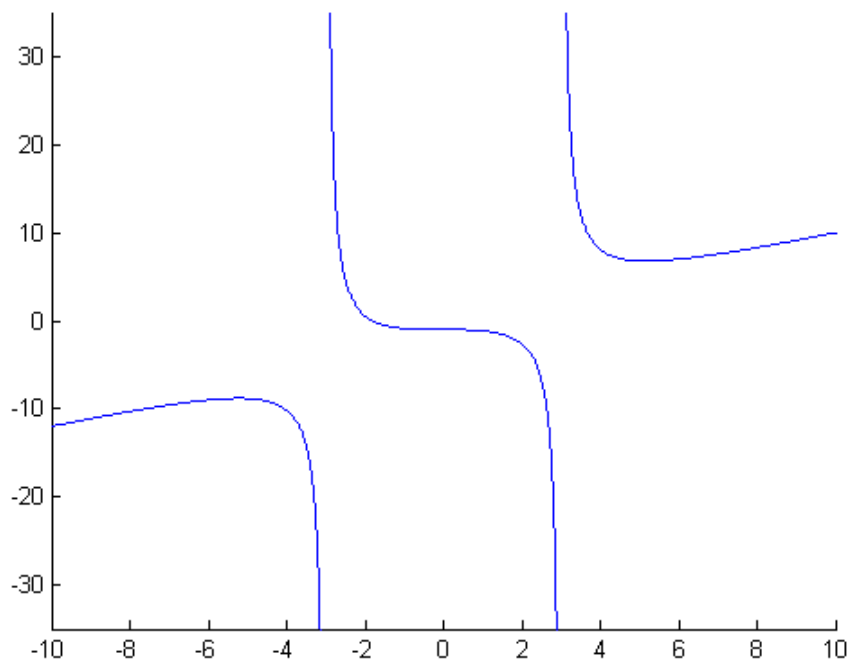
$k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x(x^2 - 16)} = 0$ a $q_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 16} = 0$, takže funkce má ještě asymptotu $y = 0$.

Příklad 3.9 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{-x^2 + x + 9}{9 - x^2}$ včetně absolutních extrémů.

Výsledek: $D(f) = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$. Funkce je spojitá na definičním oboru.

$f'(x) = \frac{x^2 + 9}{(9 - x^2)^2}$, funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$ a $(3, \infty)$ a nemá tedy lokální extrémy.

$f''(x) = \frac{2x(x^2 + 27)}{(9 - x^2)^3}$, funkce je konvexní na intervalech $(-\infty, -3)$ a $(0, 3)$, funkce je konkávní na intervalech $(-3, 0)$ a $(3, \infty)$ a má inflexi v bodě 0.



Obrázek 7: $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 9}{x^2 - 9}$.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2 + x + 9}{9 - x^2} = 1$, $\lim_{x \rightarrow -3^\pm} \frac{-x^2 + x + 9}{9 - x^2} = \mp\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^\pm} \frac{-x^2 + x + 9}{9 - x^2} = \mp\infty$, takže funkce má asymptoty $y = 1$ a $x = \pm 3$.

Vzhledem k tomu, že některé výše uvedené limity vyšly $\pm\infty$, nemá funkce absolutní extrémy.

Příklad 3.10 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{4 - x^2}$ včetně absolutních extrémů a bez vyšetření konvergence a konkávnosti.

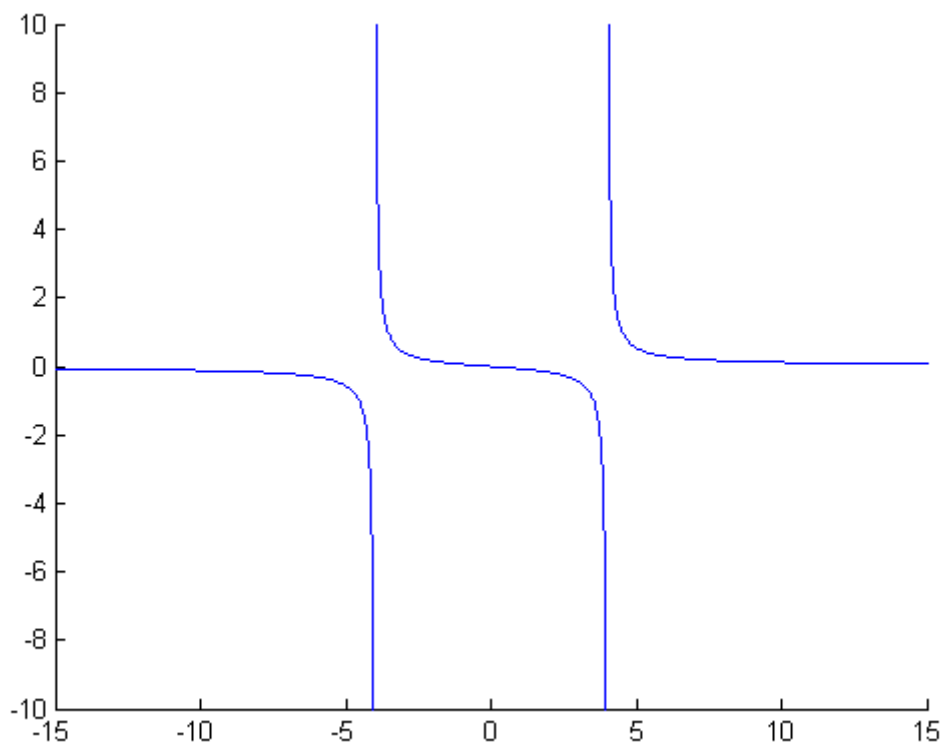
Výsledek: $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$. Funkce je spojitá na definičním oboru.

$f'(x) = \frac{x^2 - 14x + 4}{(4 - x^2)^2}$, funkce je tedy rostoucí na intervalech $(-\infty, -2)$, $(-2, 7 - 3\sqrt{5})$ a $(7 + 3\sqrt{5}, \infty)$ a klesající na intervalech $(7 - 3\sqrt{5}, 2)$ a $(2, 7 + 3\sqrt{5})$ a má lokální maximum v bodě $7 - 3\sqrt{5}$ a lokální minimum v bodě $7 + 3\sqrt{5}$ (není v grafu zřetelné).

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 42x^2 + 24x - 56}{(4 - x^2)^3}.$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 + x + 1}{4 - x^2} = 2$, $\lim_{x \rightarrow -2^\pm} \frac{-2x^2 + x + 1}{4 - x^2} = \mp\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{-2x^2 + x + 1}{4 - x^2} = \pm\infty$, takže funkce má asymptoty $y = 2$ a $x = \pm 2$.

Vzhledem k tomu, že některé výše uvedené limity vyšly $\pm\infty$, nemá funkce absolutní extrémy.



Obrázek 8: $f(x) = \frac{x}{x^2 - 16}$.

Příklad 3.11 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{-x^2 - 2x - 1}{e^x}$ včetně absolutních extrémů.

Výsledek: $D(f) = (-\infty, \infty)$. Funkce je spojitá na definičním oboru.

$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{e^x}$, funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$, funkce je klesající na intervalu $(-1, 1)$, lokální minimum je v bodě 1 a lokální maximum je v bodě -1 .

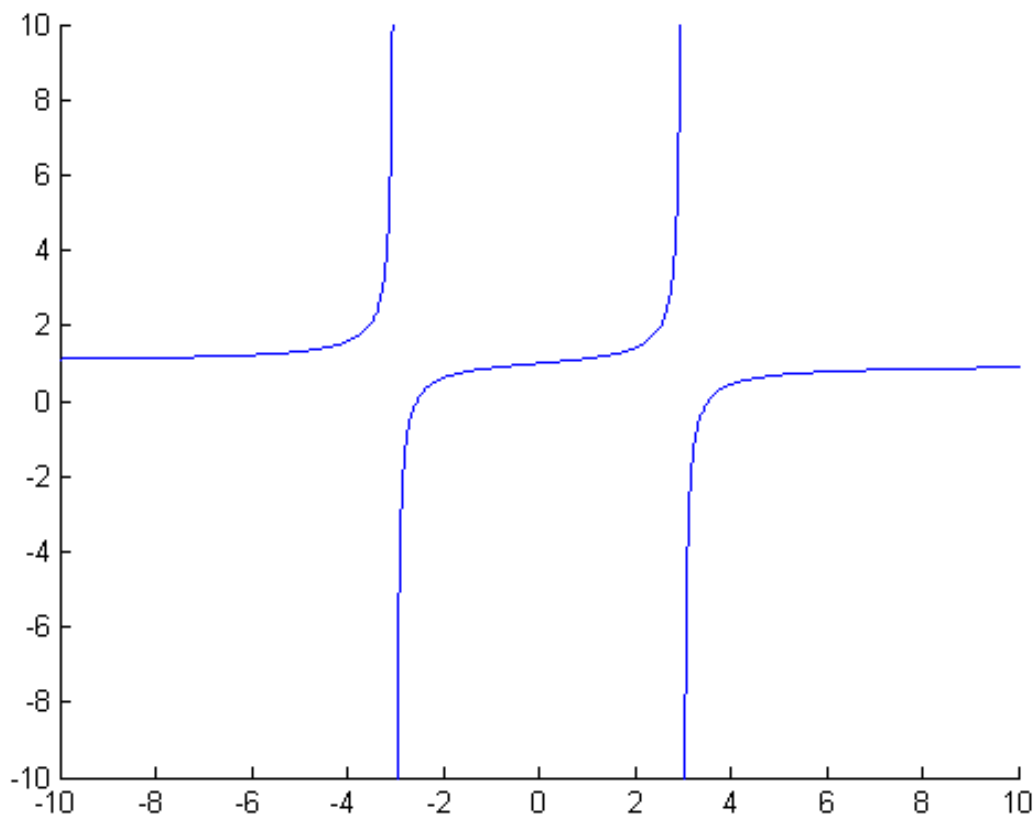
$f''(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{e^x}$, funkce je konvexní na intervalu $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$, funkce je konkávní na intervalech $(-\infty, 1 - \sqrt{2})$ a $(1 + \sqrt{2}, \infty)$ a má inflexi v bodech $1 - \sqrt{2}$ a $1 + \sqrt{2}$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 - 2x - 1}{e^x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 - 2x - 1}{e^x} = -\infty$, takže funkce má asymptotu $y = 0$.

Vzhledem k tomu, že jedna výše uvedená limita vyšla $-\infty$, nemá funkce absolutní minimum. Absolutní maximum funkce nabývá v bodě -1 .

Příklad 3.12 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{-2x^2}{1 - x^2}$ včetně absolutních extrémů.

Výsledek: $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. Funkce je sudá a spojitá na definičním oboru.



Obrázek 9: $f(x) = \frac{-x^2 + x + 9}{9 - x^2}$.

$f'(x) = \frac{-4x}{(1-x^2)^2}$, funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, 0)$ a klesající na intervalech $(0, 1)$ a $(1, \infty)$ a má lokální maximum v bodě 0.

$f''(x) = \frac{-4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$, funkce je konvexní na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$ a konkávní na intervalu $(-1, 1)$ a nemá tedy inflexní body.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{1-x^2} = 2$, $\lim_{x \rightarrow -1^\pm} \frac{-2x^2}{1-x^2} = \mp\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{-2x^2}{1-x^2} = \pm\infty$, takže funkce má asymptoty $y = 2$ a $x = \pm 1$.

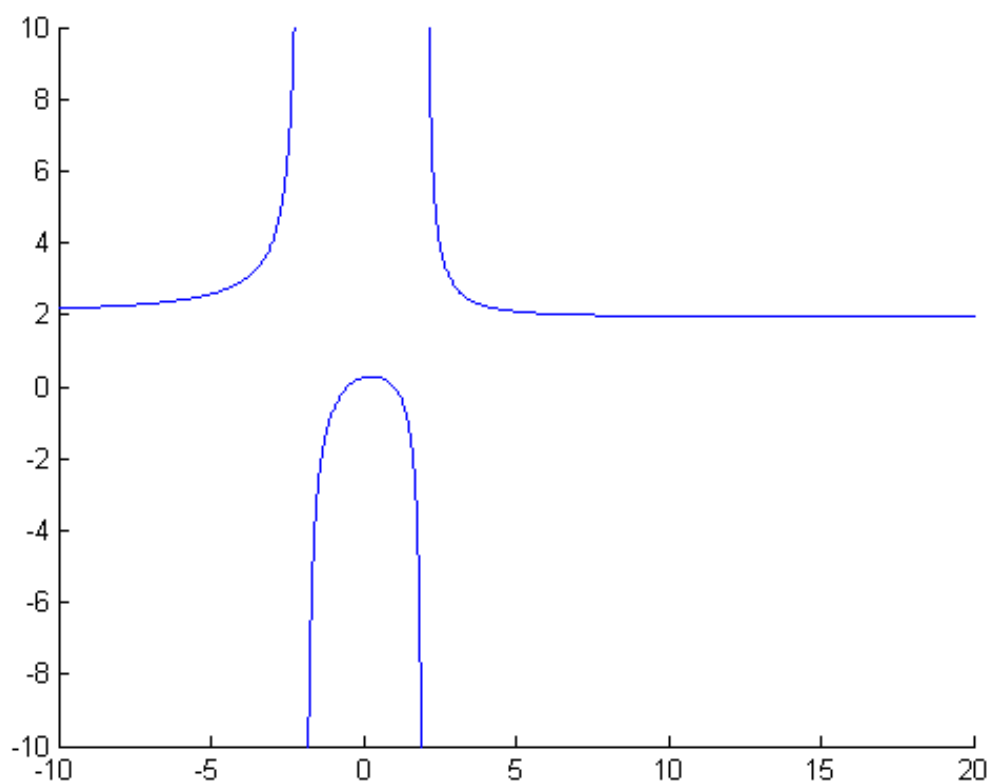
Vzhledem k tomu, že některé výše uvedené limity vyšly $\pm\infty$, nemá funkce absolutní extrémy.

Příklad 3.13 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{-x^2 + x + 16}{16 - x^2}$ včetně absolutních extrémů.

Výsledek: $D(f) = (-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, \infty)$. Funkce je spojitá na definičním oboru.

$f'(x) = \frac{16+x^2}{(16-x^2)^2}$, funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty, -4)$, $(-4, 4)$ a $(4, \infty)$ a nemá tedy lokální extrémy.

$f''(x) = \frac{2x(x^2+48)}{(16-x^2)^3}$, funkce je konvexní na intervalech $(-\infty, -4)$ a $(0, 4)$, funkce je konkávní na intervalech $(-4, 0)$ a $(4, \infty)$ a má inflexi v bodě 0.



Obrázek 10: $f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{4 - x^2}$.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2 + x + 16}{16 - x^2} = 1$, $\lim_{x \rightarrow -4^\pm} \frac{-x^2 + x + 16}{16 - x^2} = \mp\infty$, $\lim_{x \rightarrow 4^\pm} \frac{-x^2 + x + 16}{16 - x^2} = \mp\infty$, takže funkce má asymptoty $y = 1$ a $x = \pm 4$.

Vzhledem k tomu, že některé výše uvedené limity vyšly $\pm\infty$, nemá funkce absolutní extrémy.

Příklad 3.14 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{-x^2 - x + 9}{x^2 - 9}$ včetně absolutních extrémů.

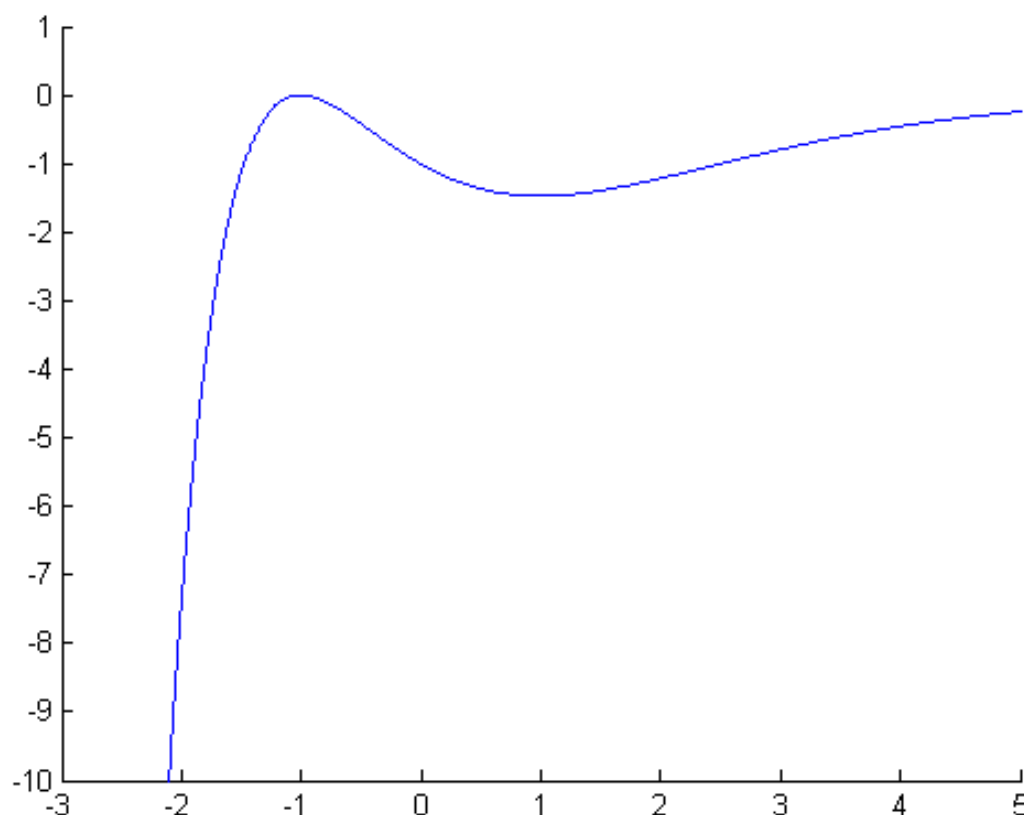
Výsledek: $D(f) = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$. Funkce je spojitá na definičním oboru.

$f'(x) = \frac{x^2 + 9}{(x^2 - 9)^2}$, funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$ a $(3, \infty)$ a nemá tedy lokální extrémy.

$f''(x) = \frac{-2x(x^2 + 27)}{(x^2 - 9)^3}$, funkce je konvexní na intervalech $(-\infty, -3)$ a $(0, 3)$, funkce je konkávní na intervalech $(-3, 0)$ a $(3, \infty)$ a má inflexi v bodě 0.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2 - x + 9}{x^2 - 9} = -1$, $\lim_{x \rightarrow -3^\pm} \frac{-x^2 - x + 9}{x^2 - 9} = \mp\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^\pm} \frac{-x^2 - x + 9}{x^2 - 9} = \mp\infty$, takže funkce má asymptoty $y = -1$ a $x = \pm 3$.

Vzhledem k tomu, že některé výše uvedené limity vyšly $\pm\infty$, nemá funkce absolutní extrémy.



Obrázek 11: $f(x) = \frac{-x^2 - 2x - 1}{e^x}$.

Příklad 3.15 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 8}{x^2 + 4}$ včetně absolutních extrémů.

Výsledek: $D(f) = \mathbb{R}$. Funkce je spojitá na definičním oboru.

$f'(x) = \frac{8x^2 - 32}{(x^2 + 4)^2}$, funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty, -2)$ a $(2, \infty)$ a klesající na intervalu $(-2, 2)$ a má lokální maximum v bodě -2 a lokální minimum v bodě 2 .

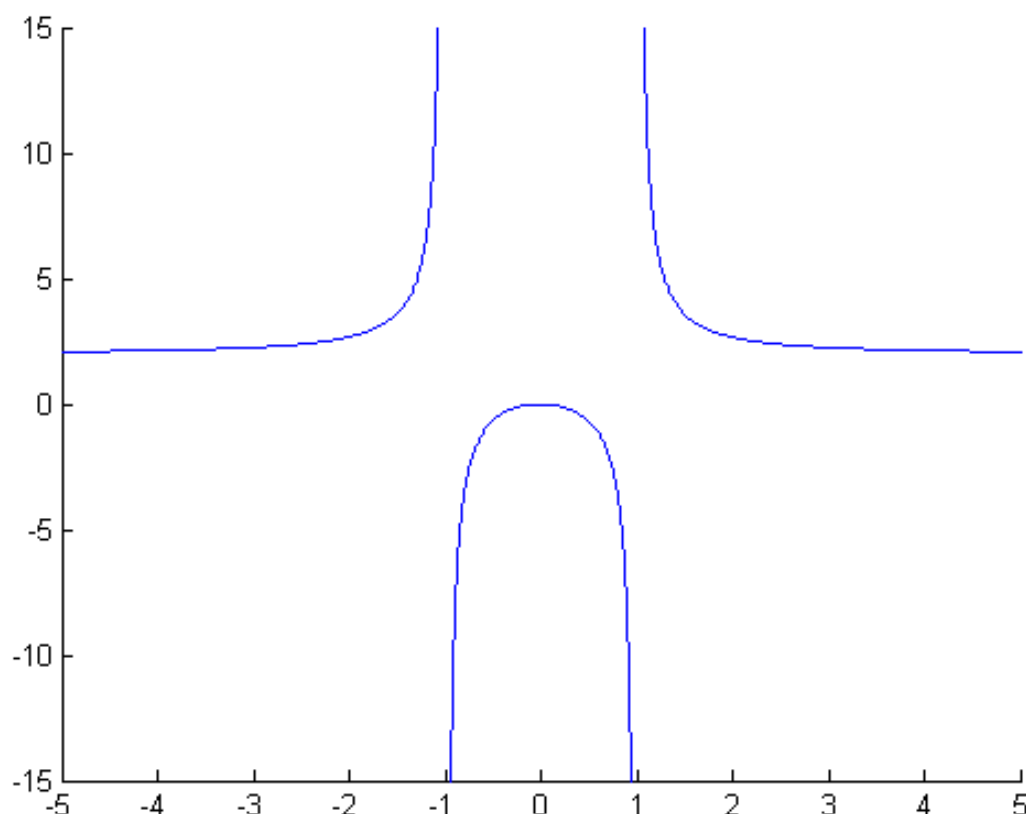
$f''(x) = \frac{16x(12 - x^2)}{(x^2 + 4)^3}$, funkce je konvexní na intervalech $(-\infty, -\sqrt{12})$ a $(0, \sqrt{12})$ a konkávní na intervalech $(-\sqrt{12}, 0)$ a $(\sqrt{12}, \infty)$ a má tedy inflexi v bodech $\pm\sqrt{12}$ a 0 .

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - 8x + 8}{x^2 + 4} = 2$, takže funkce má asymptotu $y = 2$.

Absolutní maximum je v bodě -2 a absolutní minimum je v bodě 2 .

Příklad 3.16 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{e^x}{x}$ včetně absolutních extrémů.

Výsledek: $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Funkce je spojitá na definičním oboru.



Obrázek 12: $f(x) = \frac{-2x^2}{1 - x^2}$.

$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, funkce je rostoucí na intervalu $(1, \infty)$, funkce je klesající na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, 1)$, lokální minimum je v bodě 1.

$f''(x) = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$, funkce je konvexní na intervalu $(0, \infty)$, funkce je konkávní na intervalu $(-\infty, 0)$ a nemá tedy inflexní body.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{e^x}{x} = \pm\infty$ a tedy $x = 0$ a $y = 0$ jsou asymptoty.

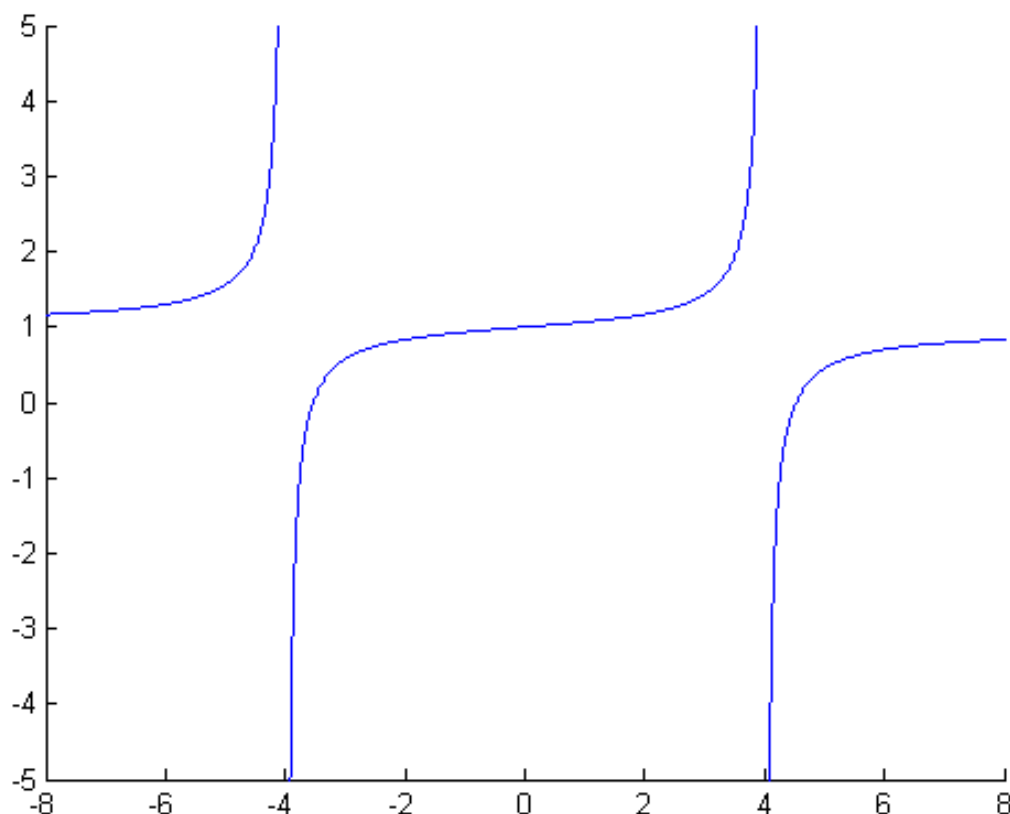
Vzhledem k tomu, že některé výše uvedené limity vyšly $\pm\infty$, nemá funkce absolutní extrémy.

$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty$, takže funkce nemá další asymptotu.

Příklad 3.17 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = e^{-x}|x|$ včetně absolutních extrémů.

Výsledek: $D(f) = (-\infty, \infty)$. Funkce je spojitá na definičním oboru.

$f'(x) = \begin{cases} e^{-x}(1-x) & x > 0 \\ e^{-x}(x-1) & x < 0 \end{cases}$, funkce je rostoucí na intervalu $(0, 1)$, funkce je klesající na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(1, \infty)$, lokální maximum je v bodě 1 a minimum v bodě 0.



Obrázek 13: $f(x) = \frac{-x^2 + x + 16}{16 - x^2}$.

$f''(x) = \begin{cases} e^{-x}(x-2) & x > 0 \\ e^{-x}(2-x) & x < 0 \end{cases}$, funkce je konkávní na intervalu $(0, 2)$, funkce je konvexní na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(2, \infty)$ a má tedy inflexi v bodě 2.

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}|x| = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}|x| = \infty$ a tedy $y = 0$ je asymptota.

Vzhledem k tomu, že jedna výše uvedená limita vyšla ∞ , nemá funkce absolutní maximum. Absolutní minimum je v bodě 0.

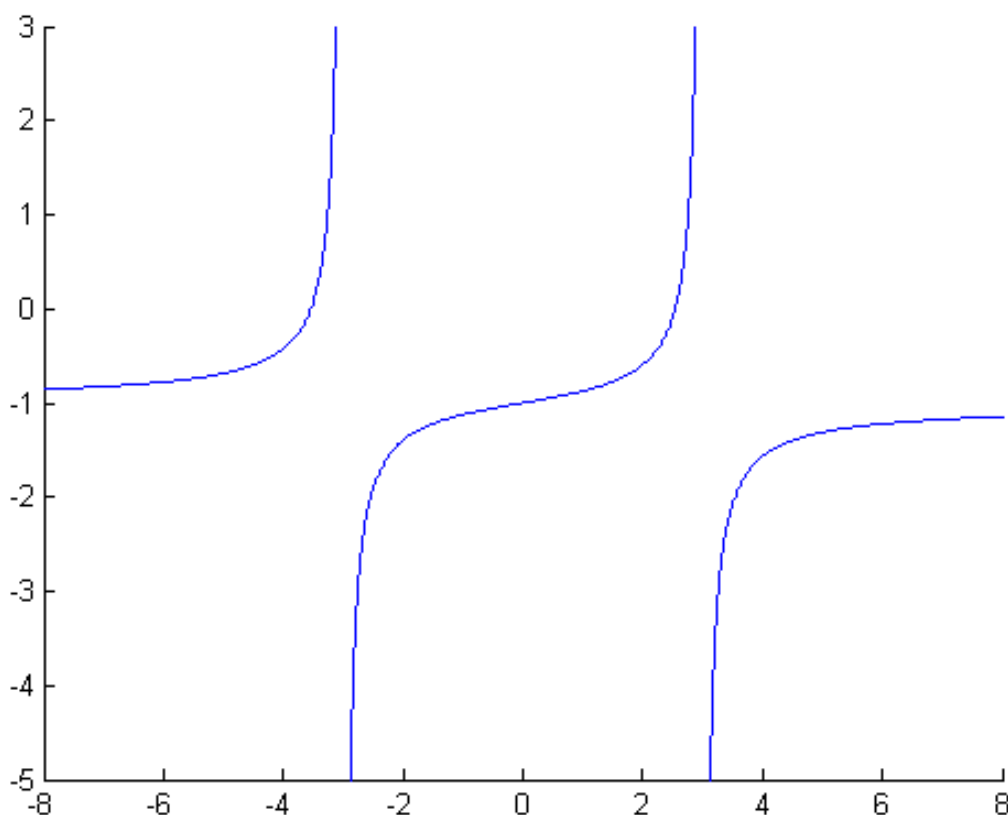
$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}|x|}{x} = -\infty$, takže funkce nemá další asymptotu.

Příklad 3.18 Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x^2 e^{2x}$ včetně absolutních extrémů.

Výsledek: $D(f) = (-\infty, \infty)$. Funkce je spojitá na definičním oboru.

$f'(x) = 2(x^2 + x)e^{2x}$, funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(0, \infty)$, funkce je klesající na intervalu $(-1, 0)$, lokální maximum je v bodě -1 a minimum v bodě 0.

$f''(x) = 2(2x^2 + 4x + 1)e^{2x}$, funkce je konkávní na intervalu $\left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, funkce je konvexní na intervalech $\left(-\infty, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ a $\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ a má tedy inflexi v bodech



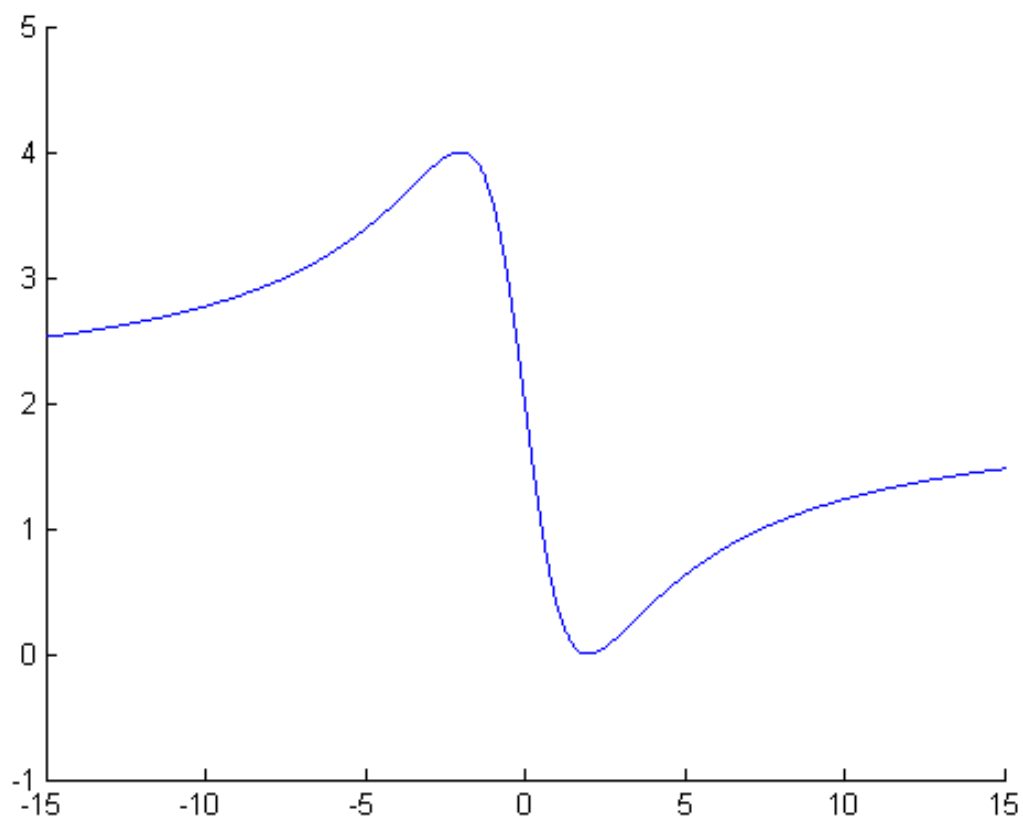
Obrázek 14: $f(x) = \frac{-x^2 - x + 9}{x^2 - 9}$.

$$-1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{2x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{2x} = 0 \text{ a tedy } y = 0 \text{ je asymptota.}$$

Vzhledem k tomu, že jedna výše uvedená limita vyšla ∞ , nemá funkce absolutní maximum. Absolutní minimum je v bodě 0.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{2x}}{x} = \infty, \text{ takže funkce nemá další asymptotu.}$$



Obrázek 15: $f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 8}{x^2 + 4}$.

4 Integrály

Příklad 4.1 $\int_0^{1/2} 4x \operatorname{arctg}(2x) dx$ $\left(\operatorname{arctg}(1) - \frac{1}{2} \right).$

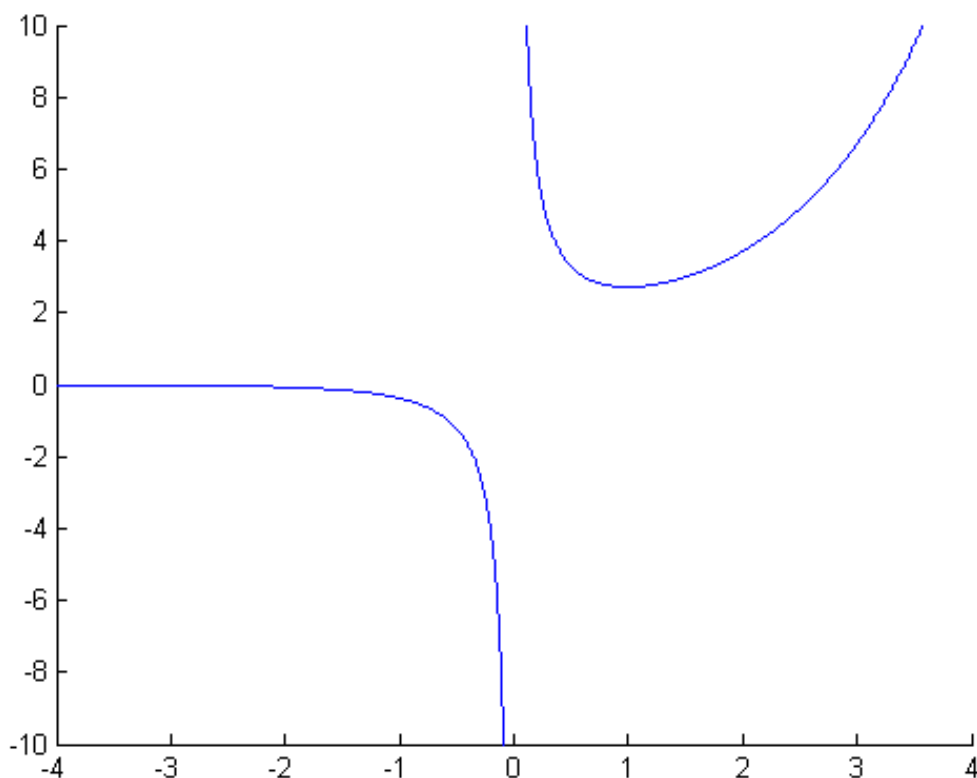
Příklad 4.2 $\int_0^1 \frac{x^4}{(e^{x^5})^5} dx$ $\left(\frac{1 - e^{-5}}{25} \right).$

Příklad 4.3 $\int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin x \cos x dx}{25 + 10 \sin x + \sin^2 x}$ $\left(\ln \left(\frac{5}{4} \right) - \frac{1}{4} \right).$

Příklad 4.4 Spočtěte obsah obrazce ohraničeného funkcí $\ln x$ a přímkou procházející body $[1, -1]$, $[2, 0]$ na intervalu $[1, 2]$ $\left(2 \ln(2) - \frac{1}{2} \right).$

Příklad 4.5 $\int_0^{\pi/2} 8x \cos(2x) dx$ $(-4).$

Příklad 4.6 $\int_0^{\sqrt[4]{\pi/4}} \frac{4x^3(1 - \operatorname{tg}(x^4))^3 dx}{\cos^2(x^4)}$ $\left(\frac{1}{4} \right).$



Obrázek 16: $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

Příklad 4.7 $\int_e^{e^4} \frac{(\ln^2 x + 2 \ln x + 1) dx}{x (\ln^2 x + 5 \ln x + 4)} \quad \left(3 - 3 \ln \left(\frac{8}{5}\right)\right).$

Příklad 4.8 *Spočtěte obsah obrazce ohraničeného funkcí $\operatorname{arctg} x$ a přímkou procházející body $[0, -2], [2, -1]$ na intervalu $[0, 1]$* $\left(\operatorname{arctg}(1) - \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{7}{4}\right).$

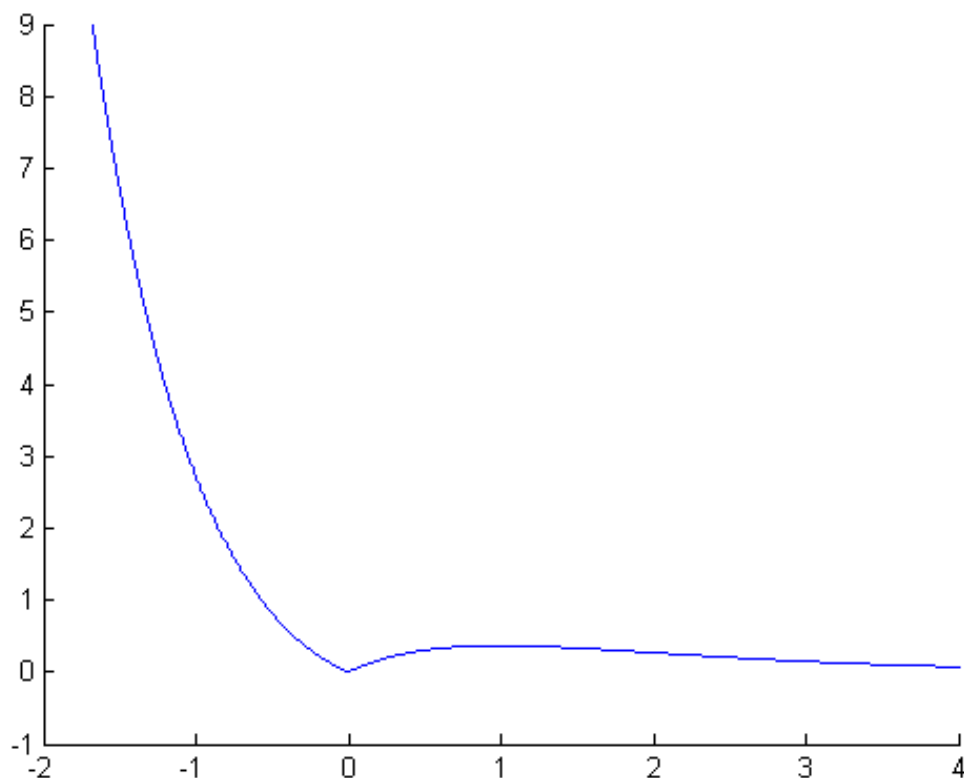
Příklad 4.9 $\int_0^{1/2} x e^{2x} dx \quad \left(\frac{1}{4}\right).$

Příklad 4.10 $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{2 + x^2} \quad \left(\frac{\operatorname{arctg}(1)}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right).$

Příklad 4.11 $\int_e^{e^2} \frac{(\ln^3 x + \ln^2 x + \ln x + 1) dx}{x (\ln^2 x + 4 \ln x + 4)} \quad \left(9 \ln \left(\frac{4}{3}\right) - \frac{23}{12}\right).$

Příklad 4.12 *Spočtěte obsah obrazce ohraničeného funkcí $(x+1) \ln(x+1)$ a přímkou procházející body $[-5, -4], [7, 8]$* $\left(\frac{e^2}{4}\right).$

Příklad 4.13 $\int_{-1/2}^0 4x \operatorname{arctg}(-2x) dx \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$



Obrázek 17: $f(x) = e^{-x}|x|$.

Příklad 4.14 $\int_0^{1/3} \frac{dx}{9+x^2} \qquad \left(\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{9} \right) \right).$

Příklad 4.15 $\int_{-\pi}^0 \frac{-\sin x \cos^4 x \, dx}{50 + 15 \cos x + \cos^2 x} \qquad \left(\frac{2}{3} + 350 - 2000 \ln \left(\frac{11}{9} \right) + 125 \ln \left(\frac{3}{2} \right) \right).$

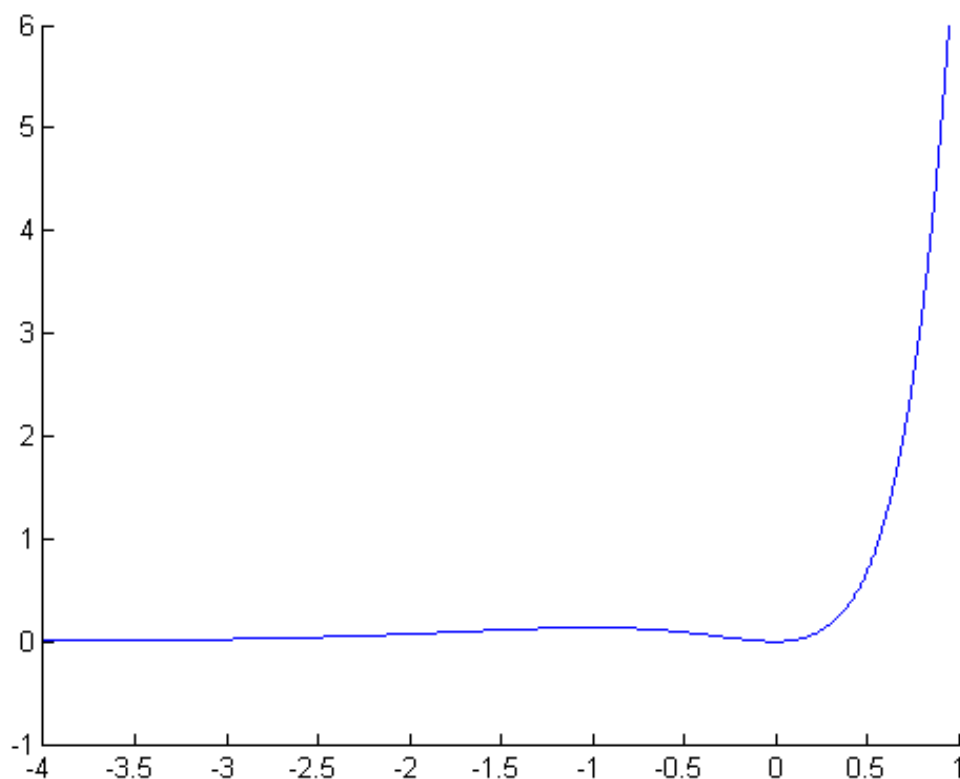
Příklad 4.16 *Spočtěte obsah obrazce ohraničeného funkcemi $-\ln(x+1)$ a e^{-2x-2} na intervalu $[0, 1]$*
 $\left(2 \ln 2 + \frac{e^{-2} - e^{-4}}{2} - 1 \right).$

Příklad 4.17 $\int_0^{1/4} x \operatorname{arctg}(4x) \, dx \qquad \left(\frac{\pi}{64} - \frac{1}{32} \right).$

Příklad 4.18 $\int_0^{\pi/8} \frac{(1 - \operatorname{tg}(2x))^3 dx}{\cos^2(2x)} \qquad \left(\frac{1}{8} \right).$

Příklad 4.19 $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x(20 + 23e^x + 9e^{2x} + e^{3x}) \, dx}{15 + 8e^x + e^{2x}} \qquad \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2} \ln \left(\frac{15}{14} \right) \right).$

Příklad 4.20 *Spočtěte obsah obrazce ohraničeného funkcemi $\operatorname{arctg} x$ a $-\operatorname{arctg} x$ a přímkou $x = 1$*
 $\left(\frac{\pi}{2} - \ln 2 \right).$



Obrázek 18: $f(x) = x^2 e^{2x}$.

$$\text{Příklad 4.21} \quad \int_0^{1/3} 9x \operatorname{arccotg}(3x) dx \quad \left(\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Příklad 4.22} \quad \int_1^2 \frac{12x^2 dx}{x^3 \ln^4 x^3} \quad (\text{Integrál neexistuje}).$$

$$\text{Příklad 4.23} \quad \int_{-\pi/4}^0 \frac{\sin(2x) \cos(2x) dx}{16 + 8 \sin(2x) + \sin^2(2x)} \quad \left(\frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{3}\right)\right).$$

$$\text{Příklad 4.24} \quad \int_0^2 3xe^{-4x} dx \quad \left(\frac{3}{16} - \frac{27}{16e^8}\right).$$

$$\text{Příklad 4.25} \quad \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(e^{x^3})^4} \quad \left(\frac{1}{12} (1 - e^{-4})\right).$$

$$\text{Příklad 4.26} \quad \int_{e^2}^{e^4} \frac{(\ln^3 x + \ln^2 x + \ln x + 1) dx}{x (\ln^2 x - 1)} \quad (8 + 2 \ln 3).$$

$$\text{Příklad 4.27} \quad \int_{e^2}^{e^4} \frac{(\ln^3 x + \ln^2 x + \ln x + 3) dx}{x (\ln^2 x - 1)} \quad (8 + 4 \ln 3 - \ln 5).$$

$$\text{Příklad 4.28} \quad \text{Spočítejte obsah obrazce ohraničeného funkcí } \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) \text{ a přímkou procházející body} \\ [1, -1] \text{ a } [-1, -3] \text{ na intervalu } [1, 2] \quad \left(-\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{27}{8}\right)\right).$$

$$\text{Příklad 4.29} \quad \int_0^1 (2x + 2)e^{-2x} dx \quad \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2e^2}\right).$$

$$\text{Příklad 4.30} \quad \int_0^1 \frac{\operatorname{arccotg}(x) dx}{1 + x^2} \quad \left(\frac{3\pi^2}{32}\right).$$

$$\text{Příklad 4.31} \quad \int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos x dx}{12 + 7 \sin x + \sin^2 x} \quad \left(\ln\left(\frac{9}{8}\right)\right).$$

$$\text{Příklad 4.32} \quad \int_{1/4}^{e/4} 36(1 + x^2) \ln(4x) dx \quad \left(\frac{1}{16} + 9 + \frac{e^3}{8}\right).$$

$$\text{Příklad 4.33} \quad \int_0^1 \frac{(\operatorname{arctg} x)^2 + 1}{1 + x^2} dx \quad \left(\frac{\pi^3}{192} + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{Příklad 4.34} \quad \int_0^{\ln(2)} \frac{5e^x dx}{15 + 8e^x + e^{2x}} \quad \left(\frac{5}{2} \ln\left(\frac{15}{14}\right)\right).$$

$$\text{Příklad 4.35} \quad \int_0^1 x \operatorname{arccotg}(x) dx \quad \left(\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Příklad 4.36} \quad \int_0^1 \frac{1 - \arccos x}{\sqrt{1 - x^2}} dx \quad \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{8}\right).$$

Příklad 4.37 $\int_e^{e^2} \frac{(2 + \ln x) dx}{x (\ln^2 x + 2 \ln x + 1)} \quad \left(\frac{1}{6} + \ln \left(\frac{3}{2} \right) \right).$

Příklad 4.38 *Spočtěte obsah obrazce ohraničeného funkcemi xe^x a $x(x-1)$ na intervalu $[0, 1]$ $\left(\frac{7}{6} \right).$*

Příklad 4.39 $\int_0^1 \operatorname{arccotg}(x) dx \quad \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(2) \right).$

Příklad 4.40 $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2x \cos(x^2)(1 - \sin(x^2)) dx \quad \left(\frac{1}{2} \right).$

Příklad 4.41 $\int_0^1 \frac{(2 + \operatorname{arctg} x) dx}{(1 + x^2)(\operatorname{arctg}^2 x + 4)} \quad \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{\pi}{8} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\left(\frac{\pi}{4} \right)^2 + 4 \right) - \frac{1}{2} \ln 4 \right).$

Příklad 4.42 *Spočtěte obsah obrazce ohraničeného funkcemi $x \sin(\pi x)$ a $x^2(x^2-1)$ $\left(\frac{2}{\pi} + \frac{4}{15} \right).$*

Příklad 4.43 $\int_0^{\pi/2} 4x \sin(2x) dx \quad (\pi).$

Příklad 4.44 $\int_0^{\sqrt{\pi/4}} \frac{2x(1 - \operatorname{tg}(x^2)) dx}{\cos^2(x^2)} \quad \left(\frac{1}{2} \right).$

Příklad 4.45 $\int_0^\infty \frac{-(2 + \operatorname{arccotg}(x))^2 dx}{(1 + x^2)(\operatorname{arccotg}^2(x) + \operatorname{arccotg}(x) - 12)} \quad \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{25}{7} \ln \left(\frac{6}{6 - \pi} \right) + \frac{4}{7} \ln \left(\frac{8 + \pi}{8} \right) \right).$

Příklad 4.46 *Spočtěte obsah obrazce ohraničeného funkcemi $\cos \left(\frac{\pi x}{2} \right)$ a $x^2 - 1$ $\left(\frac{4}{\pi} + \frac{4}{3} \right).$*

Příklad 4.47 $\int_0^1 x \operatorname{arctg}(x) dx \quad \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right).$

Příklad 4.48 $\int_0^1 \frac{2 - 3 \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx \quad \left(\pi - \frac{3\pi^2}{8} \right).$

Příklad 4.49 $\int_e^{e^2} \frac{(2 + \ln x) dx}{x (\ln^2 x + 4 \ln x + 4)} \quad \left(\ln \left(\frac{4}{3} \right) \right).$

Příklad 4.50 *Spočtěte obsah obrazce ohraničeného funkcemi $x \sin(x)$ a $x(x - \pi)$ $\left(\pi + \frac{\pi^3}{6} \right).$*

Příklad 4.51 $\int_0^1 4xe^{-2x} dx \quad (-3e^{-2} + 1).$

$$\text{Příklad 4.52} \quad \int_0^1 2x \left(e^{x^2} \right)^2 dx \quad \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right).$$

$$\text{Příklad 4.53} \quad \int_{e^2}^{e^4} \frac{(1 + \ln x - \ln^2 x) dx}{x (\ln^2 x - 1)} \quad \left(\frac{\ln(5)}{2} - 2 \right).$$

$$\text{Příklad 4.54} \quad \text{Spočítejte obsah obrazce ohraničeného funkcí } x^2 \text{ a přímkou procházející body } [-1, 1] \text{ a } [1, 5] \quad \left(11 - \frac{1}{3} \right).$$

$$\text{Příklad 4.55} \quad \int_1^2 (x - 2) \ln(4x) dx \quad \left(\frac{5}{4} - 3 \ln(2) \right).$$

$$\text{Příklad 4.56} \quad \int_0^2 \frac{-4x}{4 + x^2} dx \quad (-2 \ln(2)).$$

$$\text{Příklad 4.57} \quad \int_0^\pi \frac{\sin x (5 - 3 \cos x + \cos^2 x) dx}{4 - 4 \cos x + \cos^2 x} \quad (4 - \ln(3)).$$

$$\text{Příklad 4.58} \quad \int_0^1 8x \operatorname{arctg}(2x) dx \quad (5 \operatorname{arctg}(2) - 2).$$

$$\text{Příklad 4.59} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \sqrt[3]{\arccos x}} dx \quad \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{4}} \right).$$

$$\text{Příklad 4.60} \quad \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^{3x} + e^{2x} dx}{4 - 4e^x + e^{2x}} \quad (6 + 5 \ln(3)).$$

$$\text{Příklad 4.61} \quad \int_1^e 4x \ln(2x) dx \quad (e^2 + 1 + (2e^2 - 2) \ln 2).$$

$$\text{Příklad 4.62} \quad \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}} dx \quad (\sqrt{\pi}).$$

$$\text{Příklad 4.63} \quad \int_1^e \frac{\ln x dx}{x(1 + 2 \ln x + \ln^2 x)} \quad \left(\ln(2) - \frac{1}{2} \right).$$

$$\text{Příklad 4.64} \quad \int_0^\pi 2x^2 \cos(2x) dx \quad (\pi).$$

$$\text{Příklad 4.65} \quad \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \arccos x} dx \quad (\ln(2)).$$

$$\text{Příklad 4.66} \quad \int_{-\infty}^0 \frac{e^{2x} dx}{1 + 4e^{4x}} \quad \left(\frac{\operatorname{arctg}(2)}{4} \right).$$