Matematika 1 - příklady k procvičení

Václav Finěk (KMD FP TUL)

1 Inverzní funkce

Příklad 1.1. *Najděte inverzní funkci k funkci* $f(x) = \dfrac{2 - \operatorname{arccotg}(x-1)}{2}$ *a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.*

Výsledek: $f^{-1}(x) = 1 + \operatorname{cotg}(2-2x)$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left(\dfrac{2-\pi}{2}, 1\right)$, $R(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$.

Příklad 1.2. *Najděte inverzní funkci k funkci* $f(x) = \dfrac{2 - 5\sin(2x-1)}{2}$ *a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.*

Výsledek: $f^{-1}(x) = \dfrac{1 + \arcsin\left(\frac{2-2x}{5}\right)}{2}$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left[\dfrac{-3}{2}, \dfrac{7}{2}\right]$, $R(f^{-1}) = D(f) = \left[\dfrac{2-\pi}{4}, \dfrac{2+\pi}{4}\right]$.

Příklad 1.3. *Najděte inverzní funkci k funkci* $f(x) = \dfrac{1 - 3\arccos(1-2x)}{4}$ *a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.*

Výsledek: $f^{-1}(x) = \dfrac{1 - \cos\left(\frac{1-4x}{3}\right)}{2}$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left[\dfrac{1-3\pi}{4}, \dfrac{1}{4}\right]$, $R(f^{-1}) = D(f) = [0, 1]$.

Příklad 1.4. *Najděte inverzní funkci k funkci* $f(x) = \dfrac{1 - \operatorname{tg}(x+1)}{3}$ *a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.*
Výsledek: $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(1-3x) - 1$, $D(f^{-1}) = R(f) = \mathbb{R}$, $R(f^{-1}) = D(f) = \left(-\dfrac{\pi}{2} - 1, \dfrac{\pi}{2} - 1\right)$.

Příklad 1.5. *Najděte inverzní funkci k funkci* $f(x) = \dfrac{2 - \operatorname{arctg}(3-2x)}{4}$ *a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.*
Výsledek: $f^{-1}(x) = \dfrac{3 - \operatorname{tg}(2-4x)}{2}$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left(\dfrac{4-\pi}{8}, \dfrac{4+\pi}{8}\right)$, $R(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$.

Příklad 1.6. *Najděte inverzní funkci k funkci* $f(x) = \dfrac{1 - \operatorname{arccotg}(1-x)}{2}$ *a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.*

Výsledek: $f^{-1}(x) = 1 - \operatorname{cotg}(1-2x)$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left(\dfrac{1-\pi}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $R(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$.

Příklad 1.7. *Najděte inverzní funkci k funkci* $f(x) = \dfrac{1 - \operatorname{arctg}(1-x)}{4}$ *a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.*

Výsledek: $f^{-1}(x) = 1 - \operatorname{tg}(1-4x)$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left(\dfrac{2-\pi}{8}, \dfrac{2+\pi}{8}\right)$, $R(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$.

Příklad 1.8. *Najděte inverzní funkci k funkci* $f(x) = \dfrac{3\arcsin(2x) - 1}{2}$ *a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.*

Výsledek: $f^{-1}(x) = \dfrac{\sin(\frac{2x+1}{3})}{2}$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left[\dfrac{-3\pi-2}{4}, \dfrac{3\pi-2}{4}\right]$, $R(f^{-1}) = D(f) = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

Příklad 1.9. *Najděte inverzní funkci k funkci* $f(x) = \dfrac{-4 + 3\operatorname{arctg} x}{2}$ *a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.*

Výsledek: $f^{-1}(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{2x+4}{3}\right)$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left(\dfrac{-3\pi-8}{4}, \dfrac{3\pi-8}{4}\right)$, $R(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$.

Příklad 1.10. *Najděte inverzní funkci k funkci* $f(x) = \dfrac{3 - \log_4(2x)}{4}$ *a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.*

Výsledek: $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{4^{3-4x}}{2}\right)$, $D(f^{-1}) = R(f) = \mathbb{R}$, $R(f^{-1}) = D(f) = (0, \infty)$.

Příklad 1.11. *Najděte inverzní funkci k funkci* $f(x) = \dfrac{1 - 3\sin(4x)}{2}$ *a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.*

Výsledek: $f^{-1}(x) = \dfrac{\arcsin(\frac{1-2x}{3})}{4}$, $D(f^{-1}) = R(f) = [-1, 2]$, $R(f^{-1}) = D(f) = \left[-\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{\pi}{8}\right]$.

Příklad 1.12. *Najděte inverzní funkci k funkci* $f(x) = \dfrac{\operatorname{arccotg}(2x) - 3}{4}$ *a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.*

Výsledek: $f^{-1}(x) = \dfrac{\operatorname{cotg}(4x+3)}{2}$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left(-\dfrac{3}{4}, \dfrac{\pi-3}{4}\right)$, $R(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$.

Příklad 1.13. *Najděte inverzní funkci k funkci* $f(x) = f(x) = \dfrac{\operatorname{arccotg}(4x) - 3}{2}$ *a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.*

Výsledek: $f^{-1}(x) = \dfrac{\operatorname{cotg}(2x+3)}{4}$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{\pi - 3}{2}\right)$, $R(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$.

Příklad 1.14. *Najděte inverzní funkci k funkci* $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(2x) - 1}{4}$ *a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.*

Výsledek: $f^{-1}(x) = \dfrac{\operatorname{tg}(4x+1)}{2}$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left(-\dfrac{\pi + 2}{8}, \dfrac{\pi - 2}{8}\right)$, $R(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$.

Příklad 1.15. *Najděte inverzní funkci k funkci* $f(x) = \dfrac{-3 + 2\operatorname{arccotg} x}{4}$ *a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.*

Výsledek: $f^{-1}(x) = \operatorname{cotg}\left(\dfrac{4x+3}{2}\right)$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left(\dfrac{-3}{4}, \dfrac{2\pi - 3}{4}\right)$, $R(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$.

Příklad 1.16. *Najděte inverzní funkci k funkci* $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}(x-1) - 3}{4}$ *a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.*

Výsledek: $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(4x+3)+1$, $D(f^{-1}) = R(f) = \mathbb{R}$, $R(f^{-1}) = D(f) = \left(1 - \dfrac{\pi}{2}, 1 + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Příklad 1.17. *Najděte inverzní funkci k funkci* $f(x) = \dfrac{\cos(2-x) + 3}{2}$ *a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.*

Výsledek: $f^{-1}(x) = 2 - \arccos(2x-3)$, $D(f^{-1}) = R(f) = [1, 2]$, $R(f^{-1}) = D(f) = [2 - \pi, 2]$.

Příklad 1.18. *Najděte inverzní funkci k funkci* $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(x) - 2}{5}$ *a určete definiční obory a obory hodnot tak, aby na těchto oborech byly tyto funkce navzájem inverzní.*

Výsledek: $f^{-1}(x) = \operatorname{tg}(5x+2)$, $D(f^{-1}) = R(f) = \left(\dfrac{-\pi - 4}{10}, \dfrac{\pi - 4}{10}\right)$, $R(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$.

2 Limity

Příklad 2.1. *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2n+5n^2}{2n-n^2}$ (-5).

Příklad 2.2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\ln^2(x^2)}$ (∞).

Příklad 2.3. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{(x+5)^2}{x^2-25}$ *(Limita neexistuje).*

Příklad 2.4. *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-3n}{7n-4n^2}$ (0).

Příklad 2.5. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$ (0).

Příklad 2.6. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+4x+3}{(x^2-9)^2}$ *(Limita neexistuje).*

Příklad 2.7. *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n-4n^2}{1-3n}$ (∞).

Příklad 2.8. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{x}\ln^2(x^2)$ (0).

Příklad 2.9. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{(x^2-4)^3}$ $(-\infty)$.

Příklad 2.10. *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7+3n^2}{1-2n}$ $(-\infty)$.

Příklad 2.11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cos^2 x-1)^2}{x^4}$ (1).

Příklad 2.12. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(x-3)^2}{x^2-9}$ *(Limita neexistuje).*

Příklad 2.13. *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+2n^2}{2-n}$ $(-\infty)$.

Příklad 2.14. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[4]{x^3}\ln^2 x$ (0).

Příklad 2.15. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{(9-x^2)^2}$ *(Limita neexistuje).*

Příklad 2.16. *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2n+5n^2}{-2n}$ $(-\infty)$.

Příklad 2.17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln^2 x^2}{x}$ (0).

Příklad 2.18. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{(x^2-9)^2}$ *(Limita neexistuje).*

Příklad 2.19. *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4+n-3n^2}{n+2n^2}$ $\left(-\frac{3}{2}\right).$

Příklad 2.20. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{\ln^2 x}$ $(\infty).$

Příklad 2.21. $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x+5}{(x^2-25)^3}$ $(-\infty).$

Příklad 2.22. *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-n^2+2n}{1+2n^3}$ $(0).$

Příklad 2.23. *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^5-5n^3+1}{-5n^4+4n^2-n}$ $(-\infty).$

Příklad 2.24. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-2x-4}{x^2-4}$ *(Limita neexistuje).*

Příklad 2.25. *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3-2n^2+1}{1-3n}$ $(-\infty).$

Příklad 2.26. *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^4+2n^3-6n+2}{-4n^4-5n^2-2n}$ $\left(-\frac{5}{4}\right).$

Příklad 2.27. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{-2x+8}{(x^2-16)^2}$ *(Limita neexistuje).*

Příklad 2.28. *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-5n^2-2n+10}{20n^2+5n+7}$ $\left(-\frac{1}{4}\right).$

Příklad 2.29. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-2x^2+8}{-x^3+x^2+16x+20}$ *(Limita neexistuje).*

Příklad 2.30. *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^8+2n^4+1}{-n^9+2n^5-n}$ $(0).$

Příklad 2.31. *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-4n^2-n+11}{20n-7}$ $(-\infty).$

Příklad 2.32. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-2x^2+8}{x^3+x^2-16x+20}$ *(Limita neexistuje).*

Příklad 2.33. *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^8+2n^4+1}{-n^8+2n^5-n}$ $(-1).$

Příklad 2.34. *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-n+11}{7-20n}$ $(-\infty).$

Příklad 2.35. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x^2+8}{e^{2x-1}}$ (0).

Příklad 2.36. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x^2-7x-6}{(9-x^2)(3-x)}$ *(Limita neexistuje).*

Příklad 2.37. *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n + \sqrt[n]{10^6} + \left(\dfrac{99}{100}\right)^n\right)$ $(e+1)$.

Příklad 2.38. *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-n^2+2n}{1+2n}$ $(-\infty)$.

Příklad 2.39. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{2x}}{-5x^2}$ $(-\infty)$.

Příklad 2.40. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x-4}{(x^2-4)^2}$ $(-\infty)$.

Příklad 2.41. *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2n}{2n-n^2}$ (0).

Příklad 2.42. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{4x}}{\ln x}$ (∞).

Příklad 2.43. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x+2)^2}{x^2-4}$ *(Limita neexistuje).*

Příklad 2.44. *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+1}{-3n^4+5n^2+1}$ (0).

Příklad 2.45. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4+x^3-7x+1}{-3x^4+4x^2+x}$ $\left(-\frac{2}{3}\right)$.

Příklad 2.46. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x+4}{(x^2-4)^2}$ *(Limita neexistuje).*

Příklad 2.47. *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-4n+2n^2}{2+5n-n^2}$ (-2).

Příklad 2.48. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(1-x)}{(x^2-1)^2}$ *(Limita neexistuje).*

Příklad 2.49. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(1-x)}{e^x}$ (0).

Příklad 2.50. *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-4n+2n^2}{n^2+5n-n^4}$ (0).

Příklad 2.51. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sin(x+1)}{x^2-1}$ $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Příklad 2.52. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2-2x}{(1-x^2)^2}$ *(Limita neexistuje).*

Příklad 2.53. *Spočtěte limitu posloupnosti* $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n-n^3}{-n^2-5n+1}$ (∞).

Příklad 2.54. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1-x}-1}{x}$ $\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Příklad 2.55. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4+2x}{(x^2-4)^2}$ *(Limita neexistuje).*

3 Průběh funkce

Příklad 3.1. *Vyšetřete průběh funkce* $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x}$ *včetně absolutních extrémů.*

Výsledek: $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, *funkce je spojitá na definičním oboru a je lichá.*

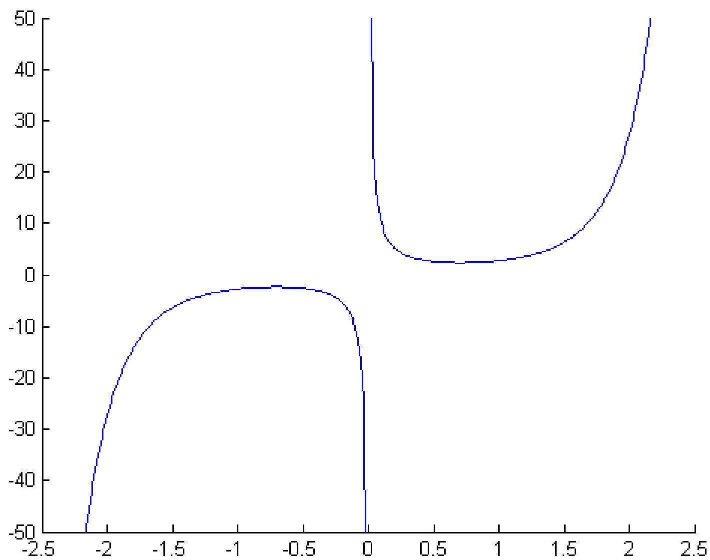
$f'(x) = \dfrac{e^{x^2}(2x^2-1)}{x^2}$, *funkce je rostoucí na intervalech* $\left(-\infty, -\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)$ *a* $\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}, \infty\right)$, *funkce je klesající na intervalech* $\left(-\sqrt{\dfrac{1}{2}}, 0\right)$ *a* $\left(0, \sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)$, *lokální minimum je v bodě* $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ *a lokální maximum je v bodě* $-\sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

$f''(x) = \dfrac{e^{x^2}(4x^4-2x^2+2)}{x^3}$, *funkce je konkávní na intervalu* $(-\infty, 0)$, *funkce je konvexní na intervalu* $(0, \infty)$ *a nemá inflexní body.*

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{x^2}}{x} = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{x^2}}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{x^2}}{x} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{x^2}}{x} = -\infty$ *a tedy* $x = 0$ *je asymptota.*

Vzhledem k tomu, že výše uvedené limity vyšly $\pm\infty$, *nemá funkce absolutní extrémy.*

$k_{1,2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{e^{x^2}}{x^2} = \infty$, *takže funkce nemá žádné další asymptoty.*



Obrázek 1: $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x}$.

Příklad 3.2. *Vyšetřete průběh funkce* $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ *včetně absolutních extrémů.*

Výsledek: $D(f) = (0,1) \cup (1,\infty)$. *Funkce je spojitá na definičním oboru.*

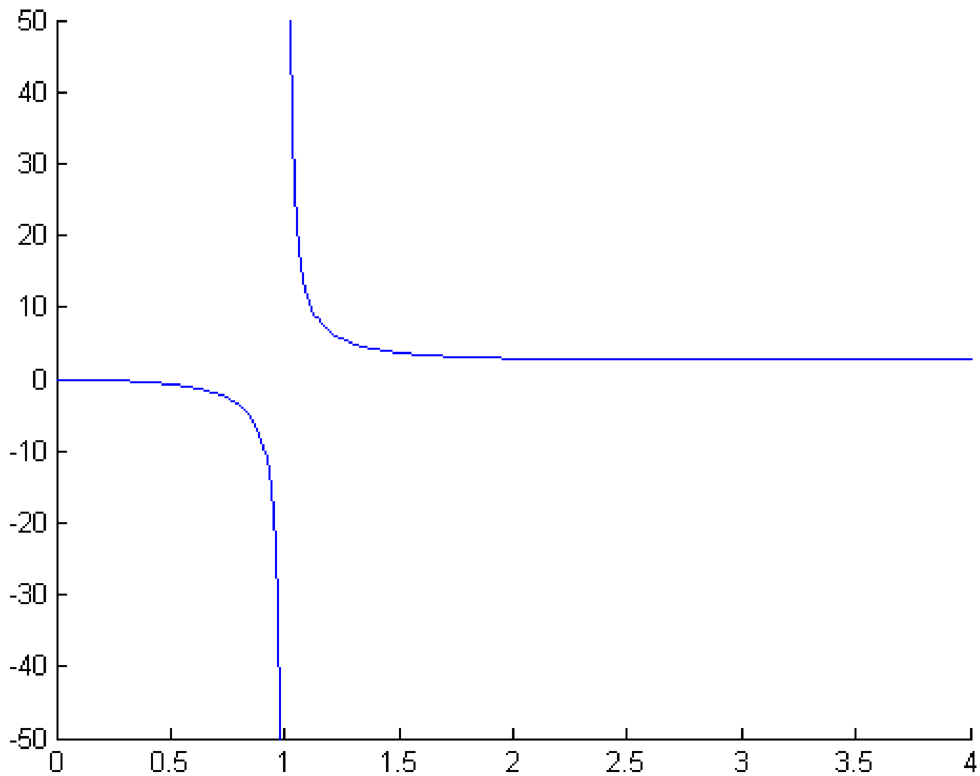
$f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, *funkce je rostoucí na intervalu* (e,∞) , *funkce je klesající na intervalech* $(0,1)$ *a* $(1,e)$, *lokální minimum je v bodě e.*

$f''(x) = \dfrac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}$, *funkce je konkávní na intervalech* $(0,1)$ *a* $\left(e^2,\infty\right)$, *funkce je konvexní na intervalu* $\left(1,e^2\right)$ *a má inflexi v bodě* e^2.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\ln x} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\ln x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{\ln x} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{\ln x} = -\infty$ *a tedy* $x = 1$ *je asymptota.*

Vzhledem k tomu, že některé výše uvedené limity vyšly $\pm\infty$, *nemá funkce absolutní extrémy.*

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x \ln x} = 0$ *a* $q = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{\ln x} - kx\right) = \infty$, *takže funkce nemá žádné další asymptoty.*



Obrázek 2: $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

Příklad 3.3. *Vyšetřete průběh funkce* $f(x) = x^3 \ln x^2$ *včetně absolutních extrémů.*

Výsledek: $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. *Funkce je spojitá na definičním oboru a je lichá.*

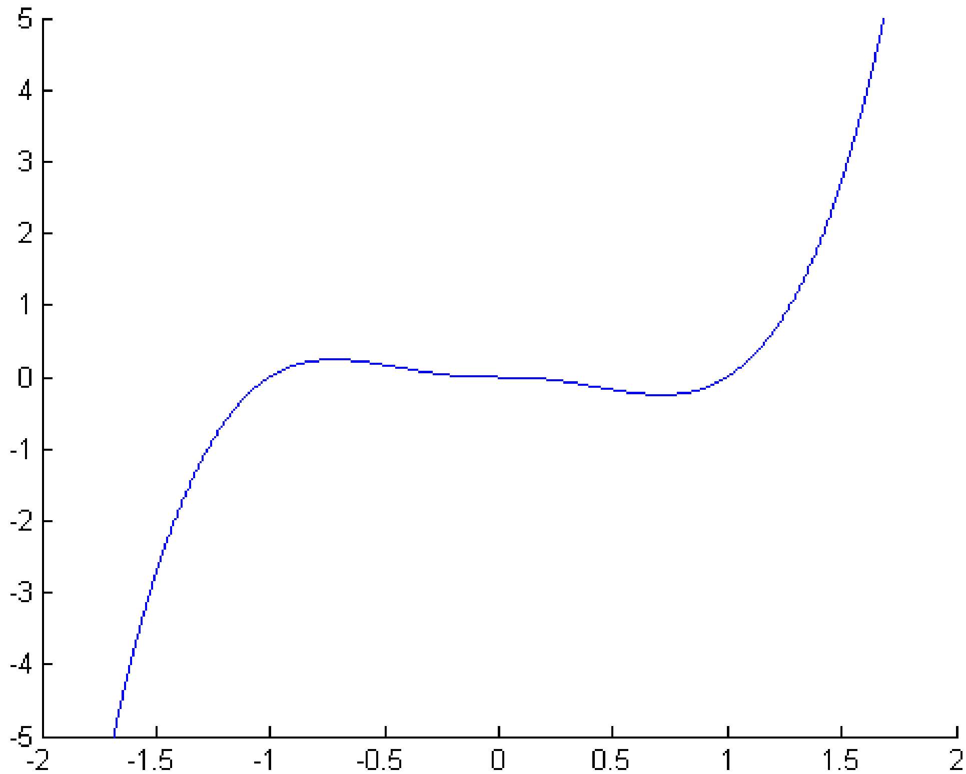
$f'(x) = x^2(3\ln x^2 + 2)$, *funkce je rostoucí na intervalech* $\left(-\infty, -e^{-1/3}\right)$ *a* $\left(e^{-1/3}, \infty\right)$, *funkce je klesající na intervalech* $\left(-e^{-1/3}, 0\right)$ *a* $\left(0, e^{-1/3}\right)$, *lokální minimum je v bodě* $e^{-1/3}$ *a lokální maximum je v bodě* $-e^{-1/3}$.

$f''(x) = 2x(3\ln x^2 + 5)$, *funkce je konvexní na intervalech* $\left(-e^{-5/6}, 0\right)$ *a* $\left(e^{-5/6}, \infty\right)$, *funkce je konkávní na intervalech* $\left(-\infty, -e^{-5/6}\right)$ *a* $\left(0, e^{-5/6}\right)$ *a má inflexi v bodech* $-e^{-5/6}$ *a* $e^{-5/6}$.

$\lim\limits_{x\to\infty} x^3 \ln x^2 = \infty,\ \lim\limits_{x\to 0} x^3 \ln x^2 = 0,\ \lim\limits_{x\to -\infty} x^3 \ln x^2 = -\infty.$

Vzhledem k tomu, že některé výše uvedené limity vyšly $\pm\infty$, *nemá funkce absolutní extrémy.*

$k_{1,2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3 \ln x^2}{x} = \infty$, *takže funkce nemá žádné asymptoty.*



Obrázek 3: $f(x) = x^3 \ln x^2$.

Příklad 3.4. *Vyšetřete průběh funkce* $f(x) = \dfrac{x^2-1}{e^x}$ *včetně absolutních extrémů.*

Výsledek: $D(f) = (-\infty, \infty)$. *Funkce je spojitá na definičním oboru.*

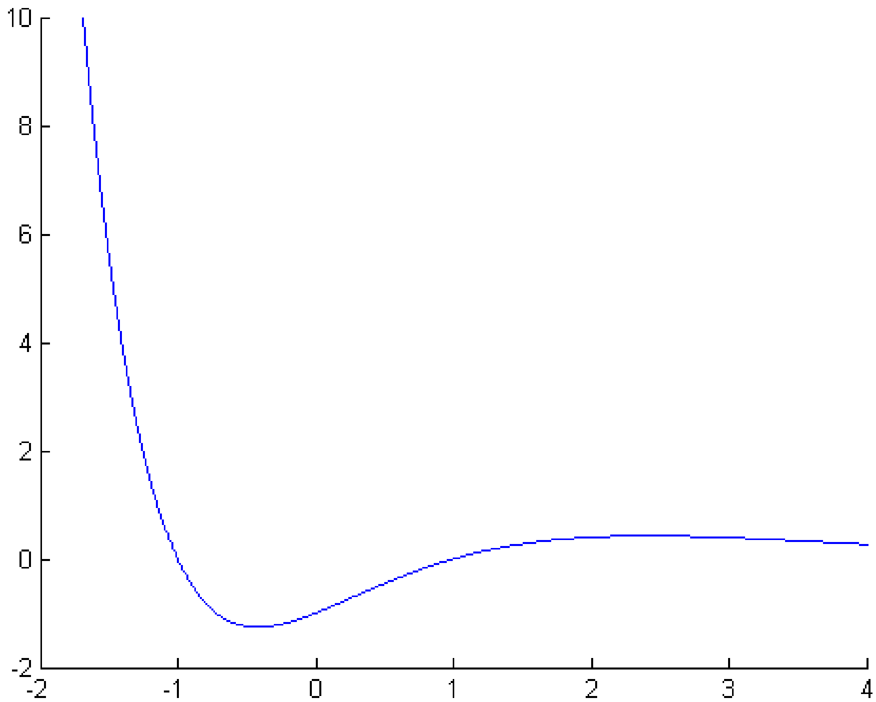
$f'(x) = \dfrac{-x^2+2x+1}{e^x}$, *funkce je rostoucí na intervalu* $\left(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right)$, *funkce je klesající na intervalech* $\left(-\infty, 1-\sqrt{2}\right)$ *a* $\left(1+\sqrt{2}, \infty\right)$, *lokální minimum je v bodě* $1-\sqrt{2}$ *a lokální maximum je v bodě* $1+\sqrt{2}$.

$f''(x) = \dfrac{x^2-4x+1}{e^x}$, *funkce je konvexní na intervalech* $\left(-\infty, 2-\sqrt{3}\right)$ *a* $\left(2+\sqrt{3}, \infty\right)$, *funkce je konkávní na intervalu* $\left(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right)$ *a má inflexi v bodech* $2-\sqrt{3}$ *a* $2+\sqrt{3}$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{e^x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-1}{e^x} = \infty$.

Vzhledem k tomu, že jedna výše uvedená limita vyšla ∞, *nemá funkce absolutní maximum. Absolutní minimum funkce nabývá v bodě* $1-\sqrt{2}$.

$k_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{xe^x} = 0$, *takže funkce má asymptotu* $y = 0$.



Obrázek 4: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{e^x}$.

Příklad 3.5. *Vyšetřete průběh funkce* $f(x) = \dfrac{x^2+1}{e^x}$ *včetně absolutních extrémů.*

Výsledek: $D(f) = (-\infty, \infty)$. *Funkce je spojitá na definičním oboru.*

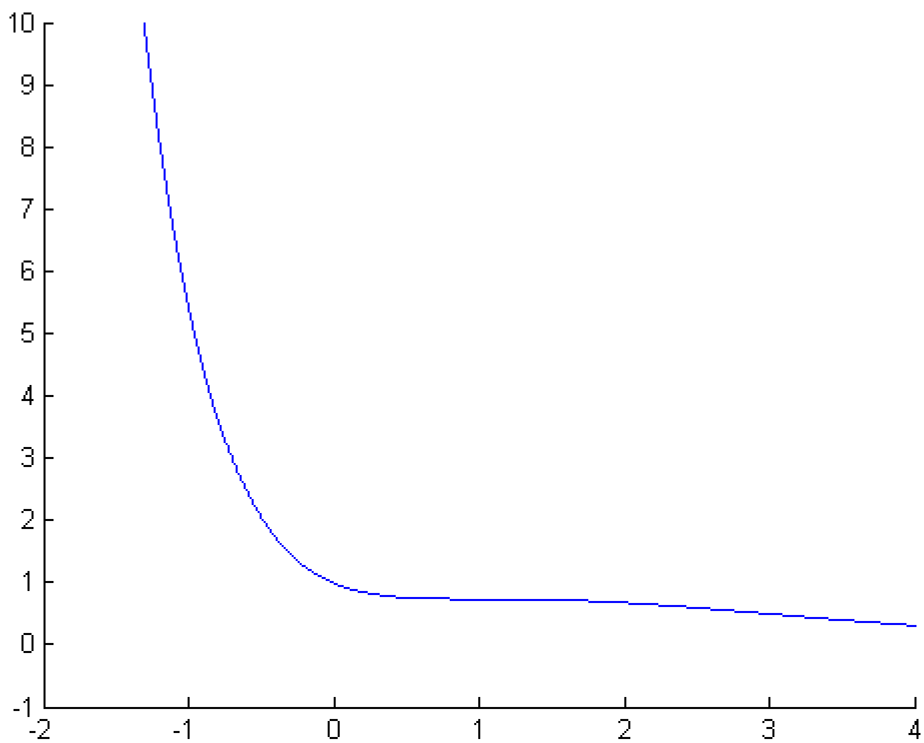
$f'(x) = \dfrac{-x^2+2x-1}{e^x}$, *funkce je klesající na celém definičním oboru a nemá tedy lokální extrémy.*

$f''(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{e^x}$, *funkce je konvexní na intervalech* $(-\infty, 1)$ *a* $(3, \infty)$, *funkce je konkávní na intervalu* $(1, 3)$ *a má inflexi v bodech* 1 *a* 3.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{e^x} = 0,\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+1}{e^x} = \infty.$

Vzhledem k tomu, že funkce je definována na otevřeném intervalu a je klesající, nemá absolutní extrémy.

$k_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{xe^x} = 0$, *takže funkce má asymptotu* $y = 0$.



Obrázek 5: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{e^x}$.

Příklad 3.6. *Vyšetřete průběh funkce* $f(x) = \dfrac{e^{x^2/2-1}}{x}$ *včetně absolutních extrémů.*

Výsledek: $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. *Funkce je spojitá na definičním oboru.*

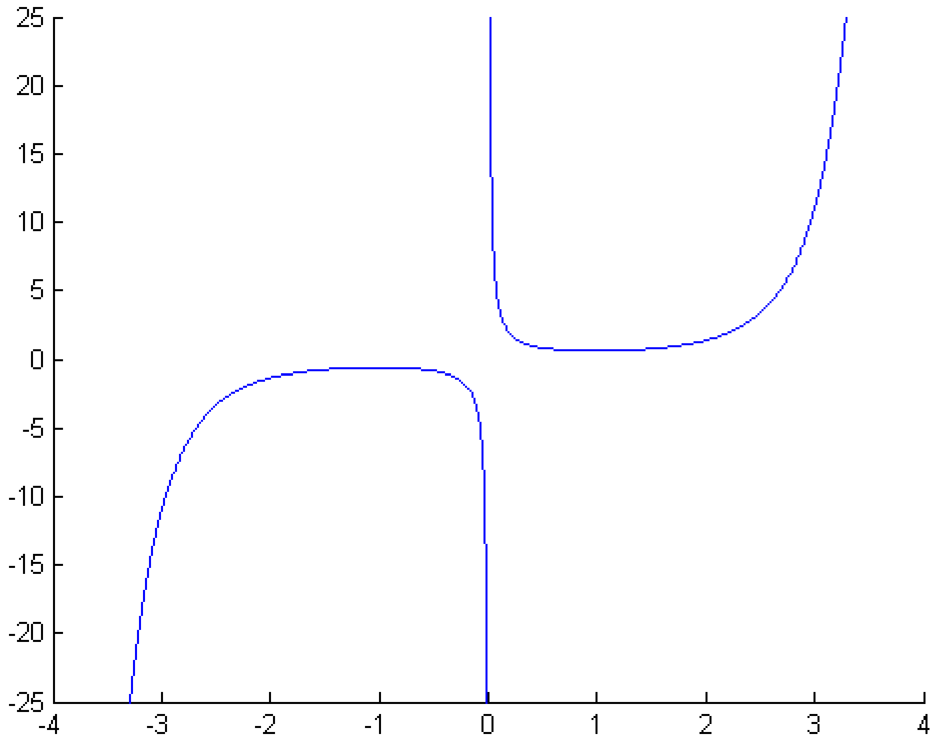
$f'(x) = \dfrac{e^{x^2/2-1}(x^2-1)}{x^2}$, *funkce je rostoucí na intervalech* $(-\infty, -1)$ *a* $(1, \infty)$, *funkce je klesající na intervalech* $(-1, 0)$ *a* $(0, 1)$, *lokální minimum je v bodě* 1 *a lokální maximum je v bodě* -1.

$f''(x) = \dfrac{e^{x^2/2-1}(x^4-x^2+2)}{x^3}$, *funkce je konvexní na intervalu* $(0, \infty)$, *funkce je konkávní na intervalu* $(-\infty, 0)$ *a nemá tedy inflexní body.*

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{e^{x^2/2-1}}{x} = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^\pm} \dfrac{e^{x^2/2-1}}{x} = \pm\infty$ *a tedy* $x = 0$ *je asymptota.*

Vzhledem k tomu, že některé výše uvedené limity vyšly $\pm\infty$, *nemá funkce absolutní extrémy.*

$k_{1,2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{e^{x^2/2-1}}{x^2} = \infty$, *takže funkce nemá další asymptoty.*



Obrázek 6: $f(x) = \dfrac{e^{x^2/2-1}}{x}$.

Příklad 3.7. *Vyšetřete průběh funkce* $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 9}{x^2 - 9}$ *včetně absolutních extrémů.*

Výsledek: $D(f) = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$. *Funkce je spojitá na definičním oboru.*

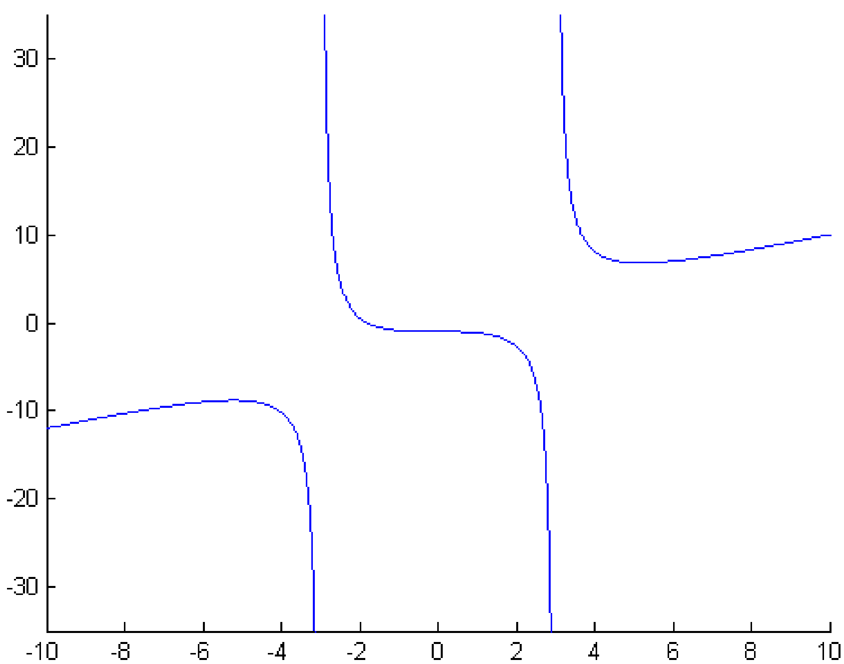
$f'(x) = \dfrac{x^2(x^2 - 27)}{(x^2 - 9)^2}$, *funkce je rostoucí na intervalech* $\left(-\infty, -\sqrt{27}\right)$ *a* $\left(\sqrt{27}, \infty\right)$, *funkce je klesající na intervalech* $\left(\sqrt{27}, -3\right)$, $(-3, 3)$ *a* $\left(3, \sqrt{27}\right)$, *lokální minimum je v bodě* $\sqrt{27}$ *a lokální maximum je v bodě* $-\sqrt{27}$.

$f''(x) = \dfrac{18x(x^2 + 27)}{(x^2 - 9)^3}$, *funkce je konvexní na intervalech* $(-3, 0)$ *a* $(3, \infty)$, *funkce je konkávní na intervalech* $(-\infty, -3)$ *a* $(0, 3)$ *a má inflexi v bodě* 0.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^3 - x^2 + 9}{x^2 - 9} = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to -3^\pm} \dfrac{x^3 - x^2 + 9}{x^2 - 9} = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to 3^\pm} \dfrac{x^3 - x^2 + 9}{x^2 - 9} = \pm\infty$, *takže funkce má asymptoty* $x = \pm 3$.

Vzhledem k tomu, že některé výše uvedené limity vyšly $\pm\infty$, *nemá funkce absolutní extrémy.*

$k_{1,2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^3 - x^2 + 9}{x(x^2 - 9)} = 1$ *a* $q_{1,2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{x^3 - x^2 + 9}{(x^2 - 9)} - x \right) = -1$ *takže funkce má ještě asymptotu* $y = x - 1$.



Obrázek 7: $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 9}{x^2 - 9}$.

Příklad 3.8. *Vyšetřete průběh funkce* $f(x) = \dfrac{x}{x^2-16}$ *včetně absolutních extrémů.*

Výsledek: $D(f) = (-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, \infty)$. *Funkce je lichá a spojitá na definičním oboru.*

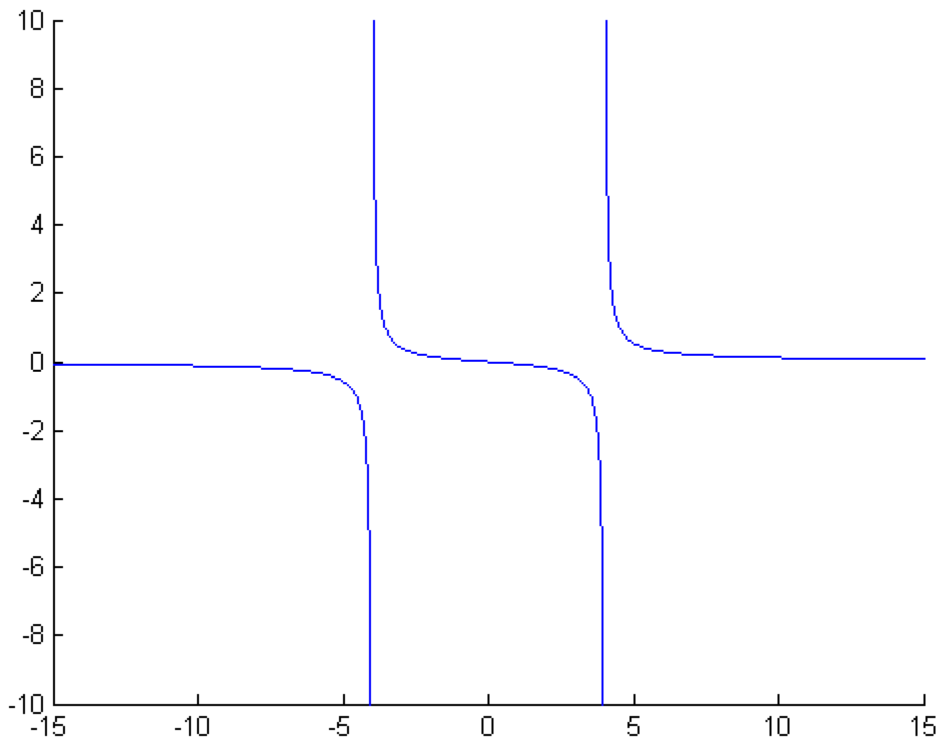
$f'(x) = \dfrac{-x^2-16}{(x^2-16)^2}$, *funkce je klesající na intervalech* $(-\infty, -4)$, $(-4, 4)$ *a* $(4, \infty)$ *a nemá tedy lokální extrémy.*

$f''(x) = \dfrac{2x(x^2+48)}{(x^2-16)^3}$, *funkce je konvexní na intervalech* $(-4, 0)$ *a* $(4, \infty)$, *funkce je konkávní na intervalech* $(-\infty, -4)$ *a* $(0, 4)$ *a má inflexi v bodě* 0.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x^2-16} = 0$, $\lim\limits_{x\to -4^\pm} \dfrac{x}{x^2-16} = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to 4^\pm} \dfrac{x}{x^2-16} = \pm\infty$, *takže funkce má asymptoty* $x = \pm 4$.

Vzhledem k tomu, že některé výše uvedené limity vyšly $\pm\infty$, *nemá funkce absolutní extrémy.*

$k_{1,2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x(x^2-16)} = 0$ *a* $q_{1,2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x^2-16} = 0$, *takže funkce má ještě asymptotu* $y = 0$.



Obrázek 8: $f(x) = \dfrac{x}{x^2-16}$.

Příklad 3.9. *Vyšetřete průběh funkce* $f(x) = \dfrac{-x^2+x+9}{9-x^2}$ *včetně absolutních extrémů.*

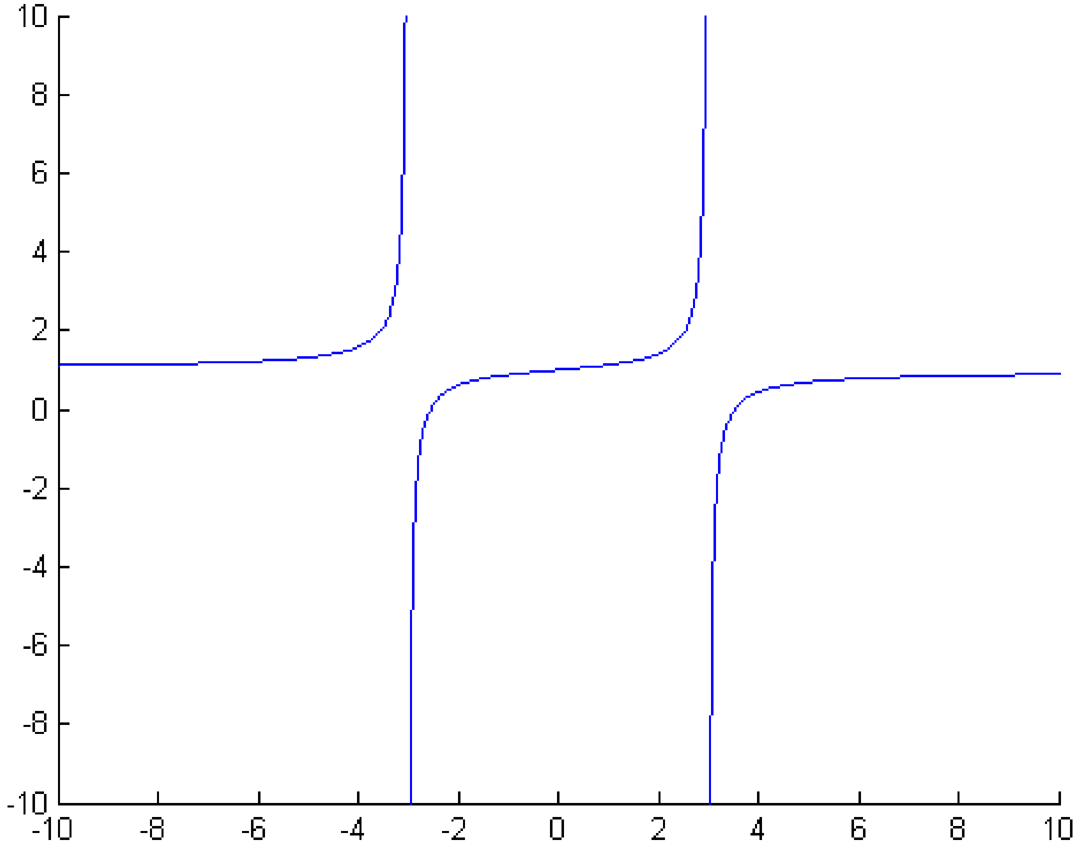
Výsledek: $D(f) = (-\infty,-3) \cup (-3,3) \cup (3,\infty)$. *Funkce je spojitá na definičním oboru.*

$f'(x) = \dfrac{x^2+9}{(9-x^2)^2}$, *funkce je rostoucí na intervalech* $(-\infty,-3)$, $(-3,3)$ *a* $(3,\infty)$ *a nemá tedy lokální extrémy.*

$f''(x) = \dfrac{2x(x^2+27)}{(9-x^2)^3}$, *funkce je konvexní na intervalech* $(-\infty,-3)$ *a* $(0,3)$, *funkce je konkávní na intervalech* $(-3,0)$ *a* $(3,\infty)$ *a má inflexi v bodě* 0.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x^2+x+9}{9-x^2} = 1$, $\lim\limits_{x\to-3^\pm} \dfrac{-x^2+x+9}{9-x^2} = \mp\infty$, $\lim\limits_{x\to3^\pm} \dfrac{-x^2+x+9}{9-x^2} = \mp\infty$, *takže funkce má asymptoty* $y=1$ *a* $x=\pm3$.

Vzhledem k tomu, že některé výše uvedené limity vyšly $\pm\infty$, *nemá funkce absolutní extrémy.*



Obrázek 9: $f(x) = \dfrac{-x^2+x+9}{9-x^2}$.

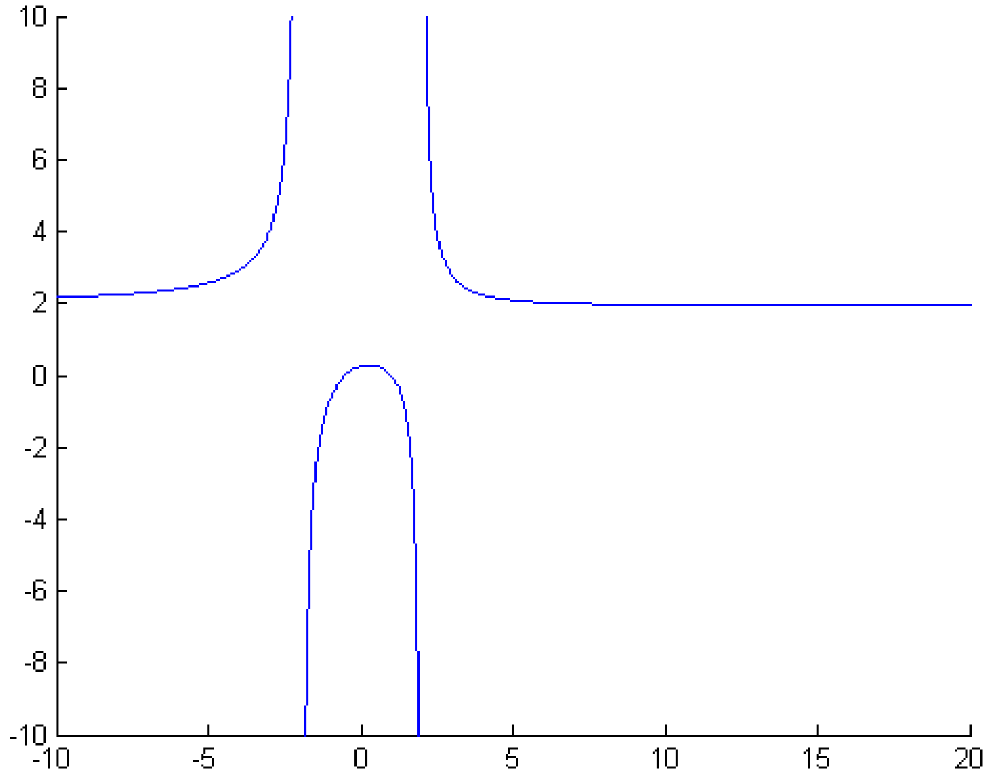
Příklad 3.10. *Vyšetřete průběh funkce* $f(x) = \dfrac{-2x^2+x+1}{4-x^2}$ *včetně absolutních extrémů a bez vyšetření konvexnosti a konkávnosti.*

Výsledek: $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$. *Funkce je spojitá na definičním oboru.* $f'(x) = \dfrac{x^2-14x+4}{(4-x^2)^2}$, *funkce je tedy rostoucí na intervalech* $(-\infty, -2)$, $\left(-2, 7-3\sqrt{5}\right)$ *a* $\left(7+3\sqrt{5}, \infty\right)$ *a klesající na intervalech* $\left(7-3\sqrt{5}, 2\right)$ *a* $\left(2, 7+3\sqrt{5}\right)$ *a má lokální maximum v bodě* $7-3\sqrt{5}$ *a lokální minimum v bodě* $7+3\sqrt{5}$ *(není v grafu zřetelné).*

$f''(x) = \dfrac{2x^3-42x^2+24x-56}{(4-x^2)^3}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-2x^2+x+1}{4-x^2} = 2$, $\lim\limits_{x\to-2^{\pm}} \dfrac{-2x^2+x+1}{4-x^2} = \mp\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^{\pm}} \dfrac{-2x^2+x+1}{4-x^2} = \pm\infty$, *takže funkce má asymptoty* $y = 2$ *a* $x = \pm 2$.

Vzhledem k tomu, že některé výše uvedené limity vyšly $\pm\infty$, *nemá funkce absolutní extrémy.*



Obrázek 10: $f(x) = \dfrac{-2x^2+x+1}{4-x^2}$.

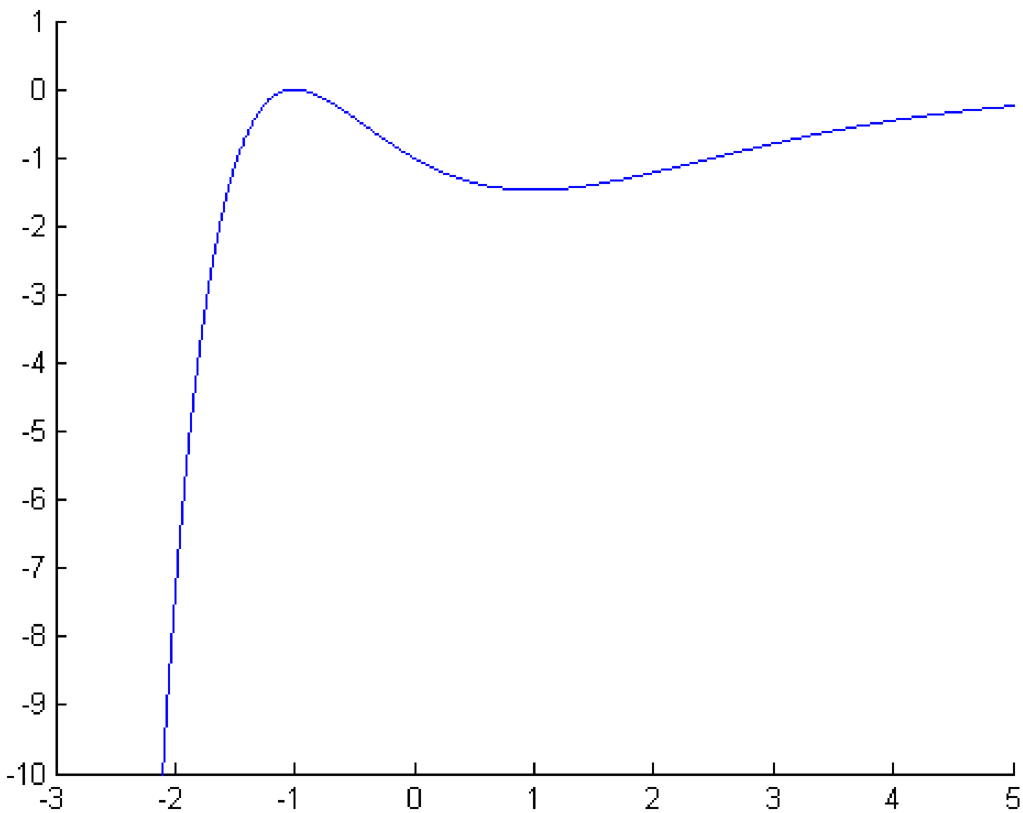
Příklad 3.11. *Vyšetřete průběh funkce* $f(x) = \dfrac{-x^2 - 2x - 1}{e^x}$ *včetně absolutních extrémů.*

Výsledek: $D(f) = (-\infty, \infty)$. *Funkce je spojitá na definičním oboru.*

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{e^x}$, *funkce je rostoucí na intervalech* $(-\infty, -1)$ *a* $(1, \infty)$, *funkce je klesající na intervalu* $(-1, 1)$, *lokální minimum je v bodě* 1 *a lokální maximum je v bodě* -1.

$f''(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 1}{e^x}$, *funkce je konvexní na intervalu* $\left(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right)$, *funkce je konkávní na intervalech* $\left(-\infty, 1 - \sqrt{2}\right)$ *a* $\left(1 + \sqrt{2}, \infty\right)$ *a má inflexi v bodech* $1 - \sqrt{2}$ *a* $1 + \sqrt{2}$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-x^2 - 2x - 1}{e^x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^2 - 2x - 1}{e^x} = -\infty$, *takže funkce má asymptotu* $y = 0$.
Vzhledem k tomu, že jedna výše uvedená limita vyšla $-\infty$, *nemá funkce absolutní minimum. Absolutní maximum funkce nabývá v bodě* -1.



Obrázek 11: $f(x) = \dfrac{-x^2 - 2x - 1}{e^x}$.

Příklad 3.12. *Vyšetřete průběh funkce* $f(x) = \dfrac{-2x^2}{1-x^2}$ *včetně absolutních extrémů.*

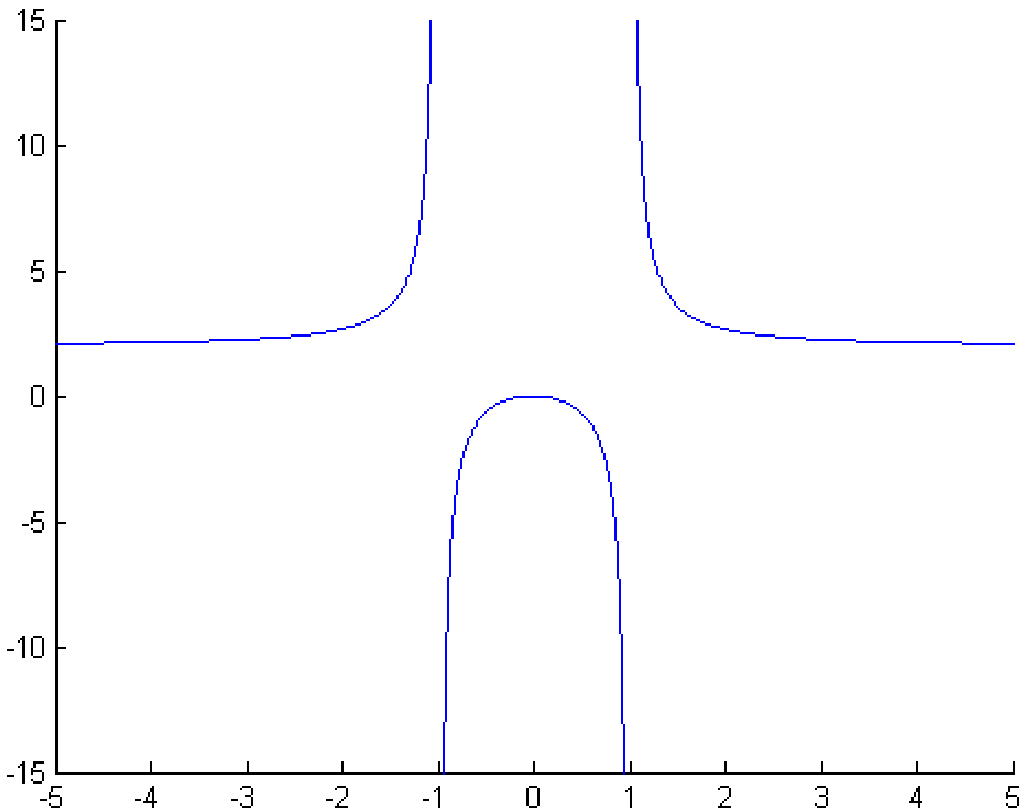
Výsledek: $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. *Funkce je sudá a spojitá na definičním oboru.*

$f'(x) = \dfrac{-4x}{(1-x^2)^2}$, *funkce je rostoucí na intervalech* $(-\infty, -1)$ *a* $(-1, 0)$ *a klesající na intervalech* $(0, 1)$ *a* $(1, \infty)$ *a má lokální maximum v bodě* 0.

$f''(x) = \dfrac{-4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$, *funkce je konvexní na intervalech* $(-\infty, -1)$ *a* $(1, \infty)$ *a konkávní na intervalu* $(-1, 1)$ *a nemá tedy inflexní body.*

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-2x^2}{1-x^2} = 2$, $\lim\limits_{x\to-1^\pm} \dfrac{-2x^2}{1-x^2} = \mp\infty$, $\lim\limits_{x\to1^\pm} \dfrac{-2x^2}{1-x^2} = \pm\infty$, *takže funkce má asymptoty* $y = 2$ *a* $x = \pm 1$.

Vzhledem k tomu, že některé výše uvedené limity vyšly $\pm\infty$, *nemá funkce absolutní extrémy.*



Obrázek 12: $f(x) = \dfrac{-2x^2}{1-x^2}$.

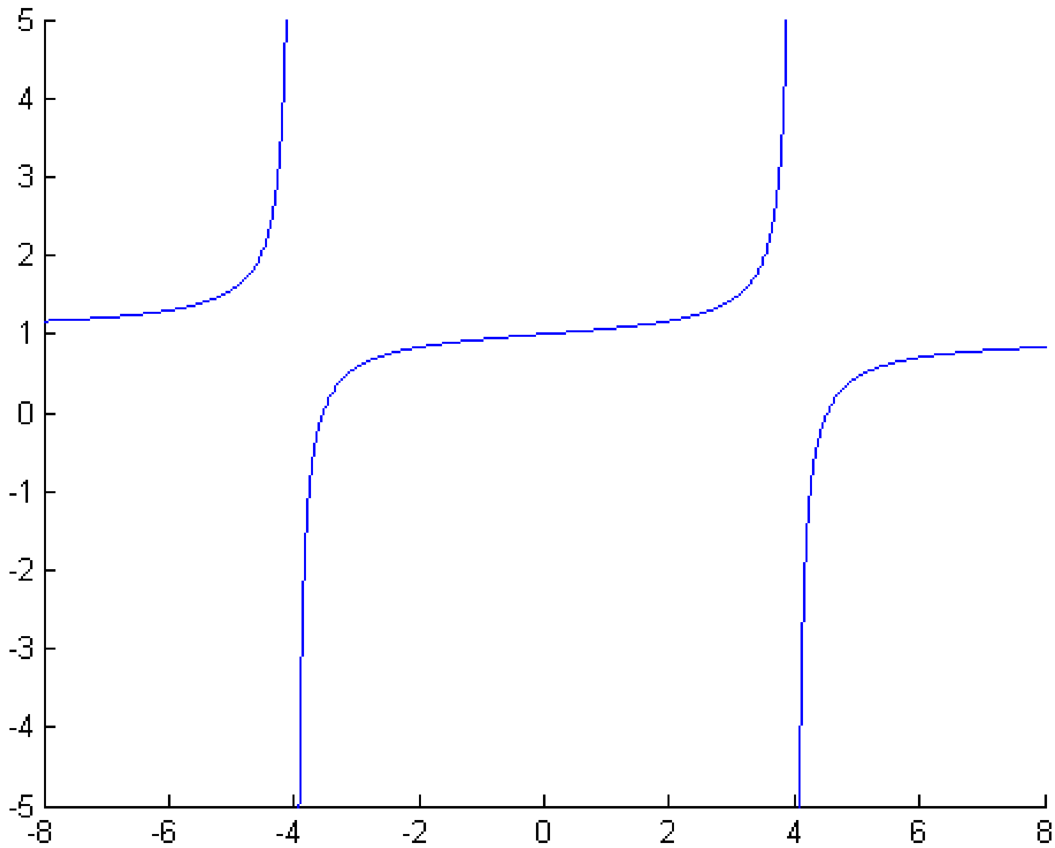
Příklad 3.13. *Vyšetřete průběh funkce* $f(x) = \dfrac{-x^2+x+16}{16-x^2}$ *včetně absolutních extrémů.*

Výsledek: $D(f) = (-\infty,-4) \cup (-4,4) \cup (4,\infty)$. *Funkce je spojitá na definičním oboru.* $f'(x) = \dfrac{16+x^2}{(16-x^2)^2}$, *funkce je rostoucí na intervalech* $(-\infty,-4)$, $(-4,4)$ *a* $(4,\infty)$ *a nemá tedy lokální extrémy.*

$f''(x) = \dfrac{2x(x^2+48)}{(16-x^2)^3}$, *funkce je konvexní na intervalech* $(-\infty,-4)$ *a* $(0,4)$, *funkce je konkávní na intervalech* $(-4,0)$ *a* $(4,\infty)$ *a má inflexi v bodě* 0.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x^2+x+16}{16-x^2} = 1$, $\lim\limits_{x\to-4^\pm} \dfrac{-x^2+x+16}{16-x^2} = \mp\infty$, $\lim\limits_{x\to4^\pm} \dfrac{-x^2+x+16}{16-x^2} = \mp\infty$, *takže funkce má asymptoty* $y=1$ *a* $x=\pm4$.

Vzhledem k tomu, že některé výše uvedené limity vyšly $\pm\infty$, *nemá funkce absolutní extrémy.*



Obrázek 13: $f(x) = \dfrac{-x^2+x+16}{16-x^2}$.

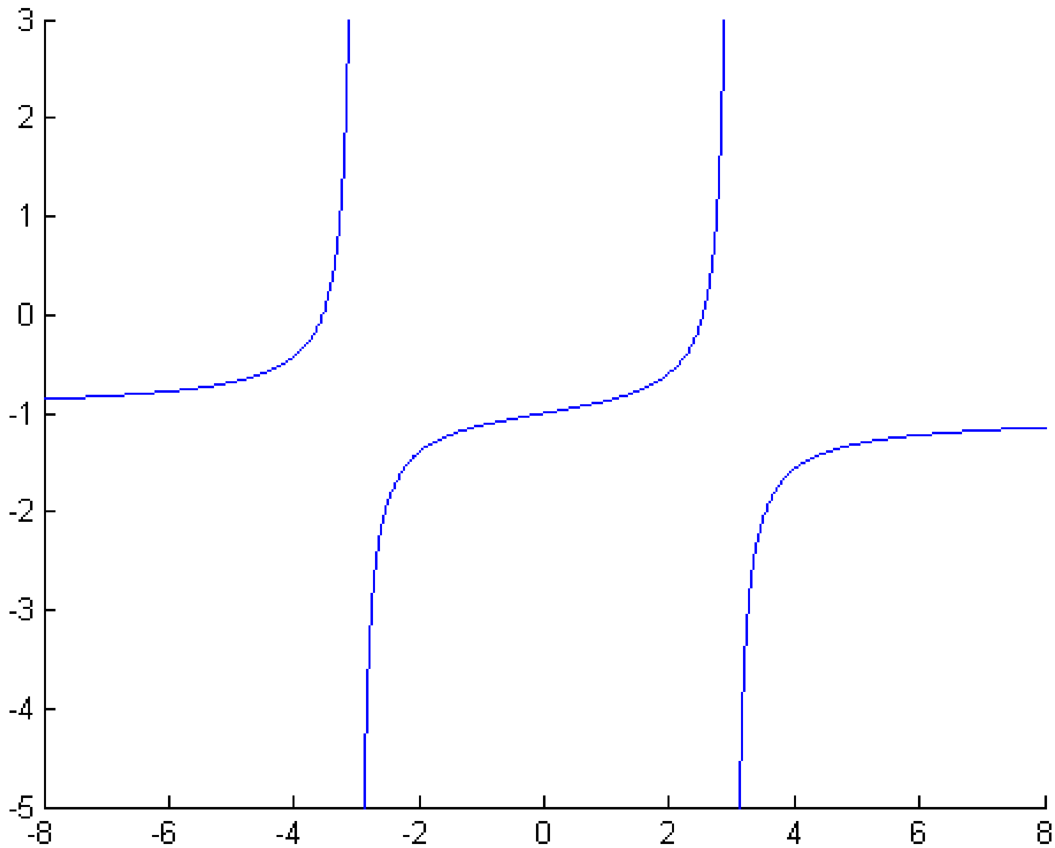
Příklad 3.14. *Vyšetřete průběh funkce* $f(x) = \dfrac{-x^2 - x + 9}{x^2 - 9}$ *včetně absolutních extrémů.*

Výsledek: $D(f) = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$. *Funkce je spojitá na definičním oboru.*
$f'(x) = \dfrac{x^2 + 9}{(x^2 - 9)^2}$, *funkce je rostoucí na intervalech* $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$ *a* $(3, \infty)$ *a nemá tedy lokální extrémy.*

$f''(x) = \dfrac{-2x(x^2 + 27)}{(x^2 - 9)^3}$, *funkce je konvexní na intervalech* $(-\infty, -3)$ *a* $(0, 3)$, *funkce je konkávní na intervalech* $(-3, 0)$ *a* $(3, \infty)$ *a má inflexi v bodě* 0.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x^2 - x + 9}{x^2 - 9} = -1$, $\lim\limits_{x\to-3^\pm} \dfrac{-x^2 - x + 9}{x^2 - 9} = \mp\infty$, $\lim\limits_{x\to3^\pm} \dfrac{-x^2 - x + 9}{x^2 - 9} = \mp\infty$, *takže funkce má asymptoty* $y = -1$ *a* $x = \pm 3$.

Vzhledem k tomu, že některé výše uvedené limity vyšly $\pm\infty$, *nemá funkce absolutní extrémy.*



Obrázek 14: $f(x) = \dfrac{-x^2 - x + 9}{x^2 - 9}$.

Příklad 3.15. *Vyšetřete průběh funkce* $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8x + 8}{x^2 + 4}$ *včetně absolutních extrémů.*

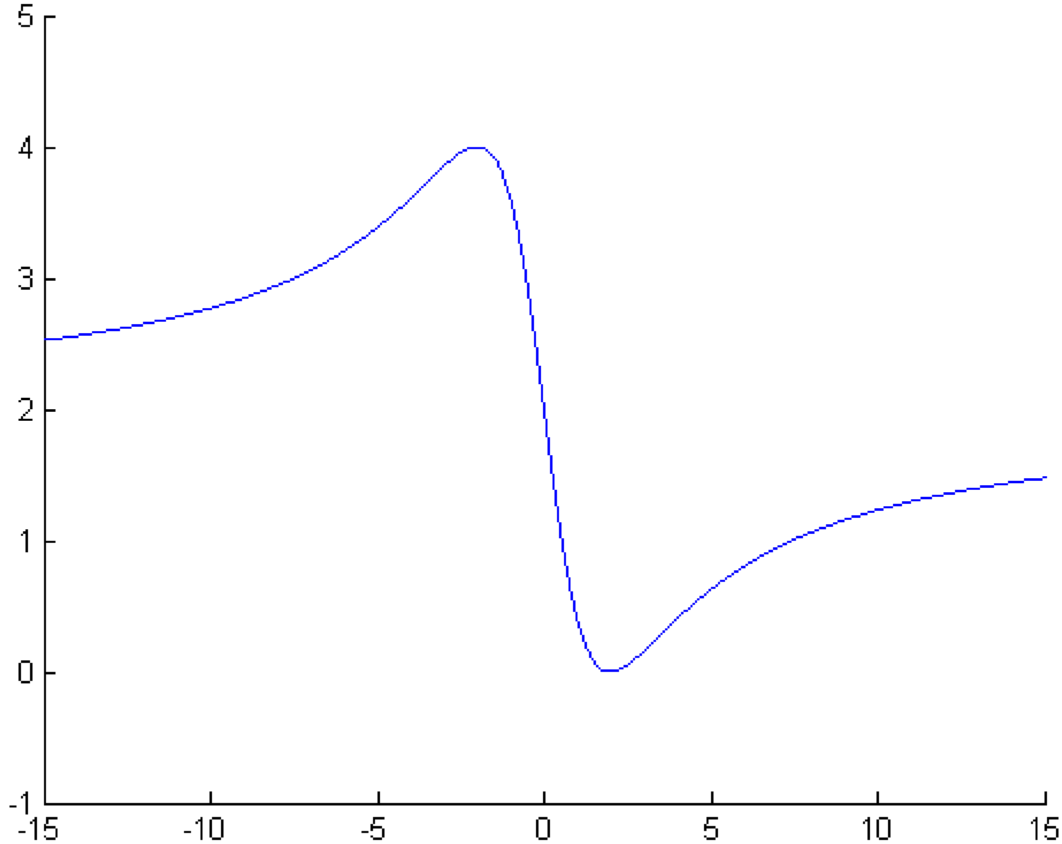
Výsledek: $D(f) = \mathbb{R}$. *Funkce je spojitá na definičním oboru.*

$f'(x) = \dfrac{8x^2 - 32}{(x^2+4)^2}$, *funkce je rostoucí na intervalech* $(-\infty, -2)$ *a* $(2, \infty)$ *a klesající na intervalu* $(-2, 2)$ *a má lokální maximum v bodě* -2 *a lokální minimum v bodě* 2.

$f''(x) = \dfrac{16x(12 - x^2)}{(x^2+4)^3}$, *funkce je konvexní na intervalech* $\left(-\infty, -\sqrt{12}\right)$ *a* $\left(0, \sqrt{12}\right)$ *a konkávní na intervalech* $\left(-\sqrt{12}, 0\right)$ *a* $\left(\sqrt{12}, -\infty\right)$ *a má tedy inflexi v bodech* $\pm\sqrt{12}$ *a* 0.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2 - 8x + 8}{x^2 + 4} = 2$, *takže funkce má asymptotu* $y = 2$.

Absolutní maximum je v bodě -2 *a absolutní minimum je v bodě* 2.



Obrázek 15: $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8x + 8}{x^2 + 4}$.

Příklad 3.16. *Vyšetřete průběh funkce* $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ *včetně absolutních extrémů.*

Výsledek: $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. *Funkce je spojitá na definičním oboru.*

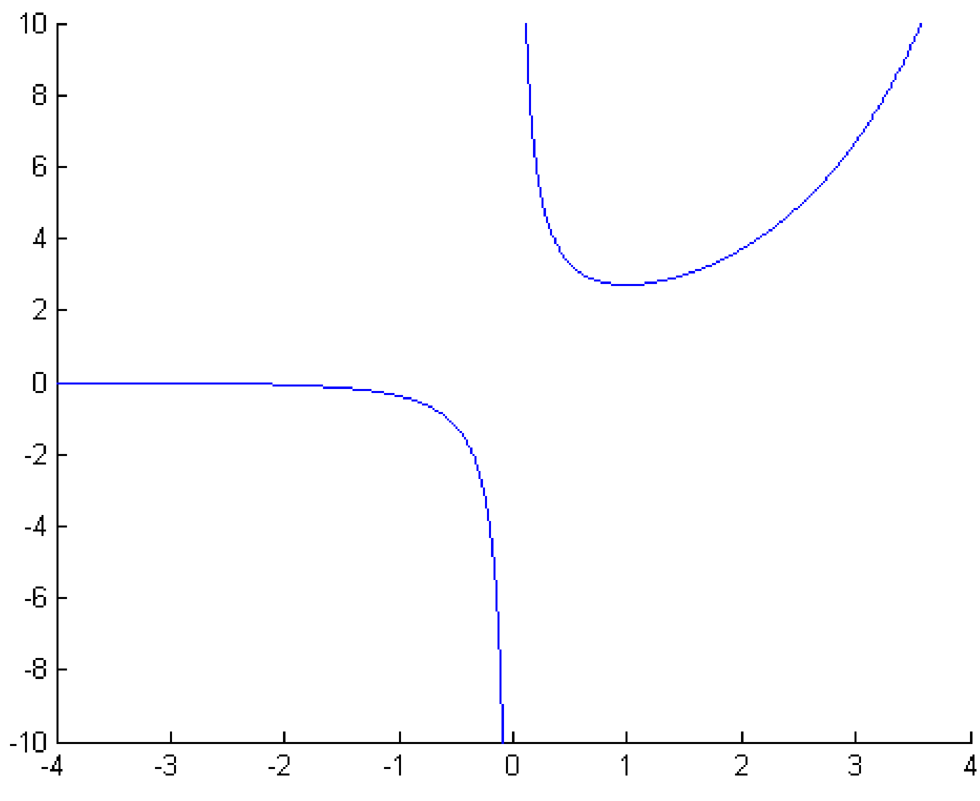
$f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$, *funkce je rostoucí na intervalu* $(1, \infty)$, *funkce je klesající na intervalech* $(-\infty, 0)$ *a* $(0, 1)$, *lokální minimum je v bodě* 1.

$f''(x) = \dfrac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$, *funkce je konvexní na intervalu* $(0, \infty)$, *funkce je konkávní na intervalu* $(-\infty, 0)$ *a nemá tedy inflexní body.*

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x} = \infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0,\ \lim\limits_{x\to 0^\pm} \dfrac{e^x}{x} = \pm\infty$ *a tedy* $x = 0$ *a* $y = 0$ *jsou asymptoty.*

Vzhledem k tomu, že některé výše uvedené limity vyšly $\pm\infty$, *nemá funkce absolutní extrémy.*

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = \infty$, *takže funkce nemá další asymptotu.*



Obrázek 16: $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

Příklad 3.17. *Vyšetřete průběh funkce* $f(x) = e^{-x}|x|$ *včetně absolutních extrémů.*

Výsledek: $D(f) = (-\infty, \infty)$. *Funkce je spojitá na definičním oboru.*

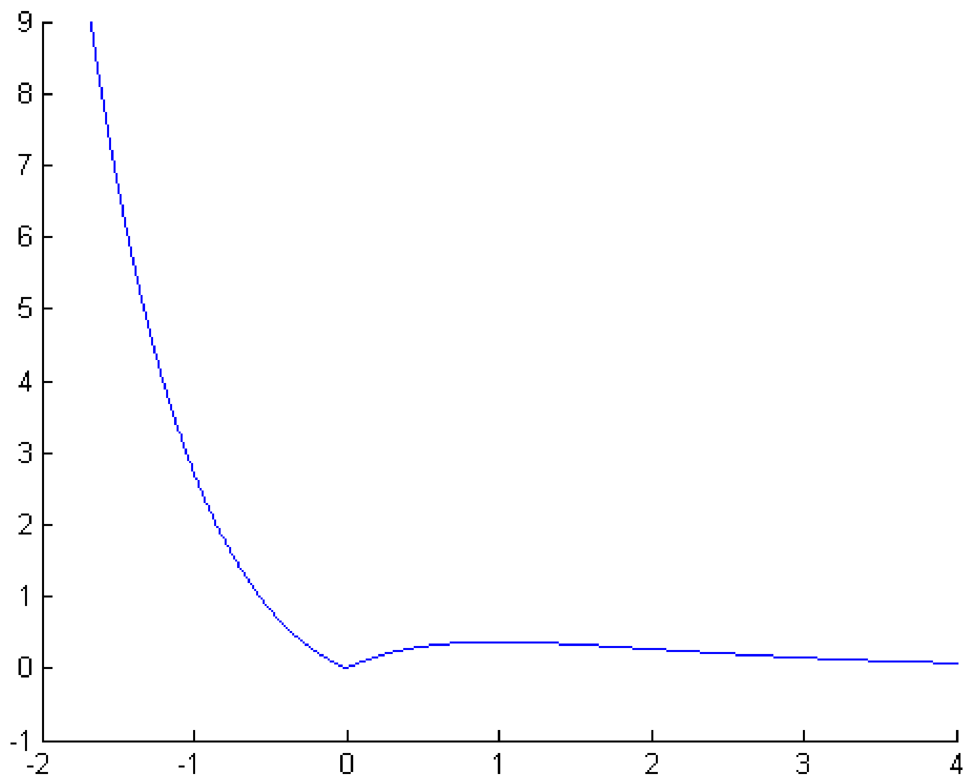
$f'(x) = \begin{cases} e^{-x}(1-x) & x > 0 \\ e^{-x}(x-1) & x < 0 \end{cases}$, *funkce je rostoucí na intervalu* $(0,1)$, *funkce je klesající na intervalech* $(-\infty, 0)$ *a* $(1, \infty)$, *lokální maximum je v bodě* 1 *a minimum v bodě* 0.

$f''(x) = \begin{cases} e^{-x}(x-2) & x > 0 \\ e^{-x}(2-x) & x < 0 \end{cases}$, *funkce je konkávní na intervalu* $(0,2)$, *funkce je konvexní na intervalech* $(-\infty, 0)$ *a* $(2, \infty)$ *a má tedy inflexi v bodě* 2.

$\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}|x| = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}|x| = \infty$ *a tedy* $y = 0$ *je asymptota.*

Vzhledem k tomu, že jedna výše uvedená limita vyšla ∞, *nemá funkce absolutní maximum. Absolutní minimum je v bodě* 0.

$k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}|x|}{x} = -\infty$, *takže funkce nemá další asymptotu.*



Obrázek 17: $f(x) = e^{-x}|x|$.

Příklad 3.18. *Vyšetřete průběh funkce* $f(x) = x^2 e^{2x}$ *včetně absolutních extrémů.*

Výsledek: $D(f) = (-\infty, \infty)$. *Funkce je spojitá na definičním oboru.*

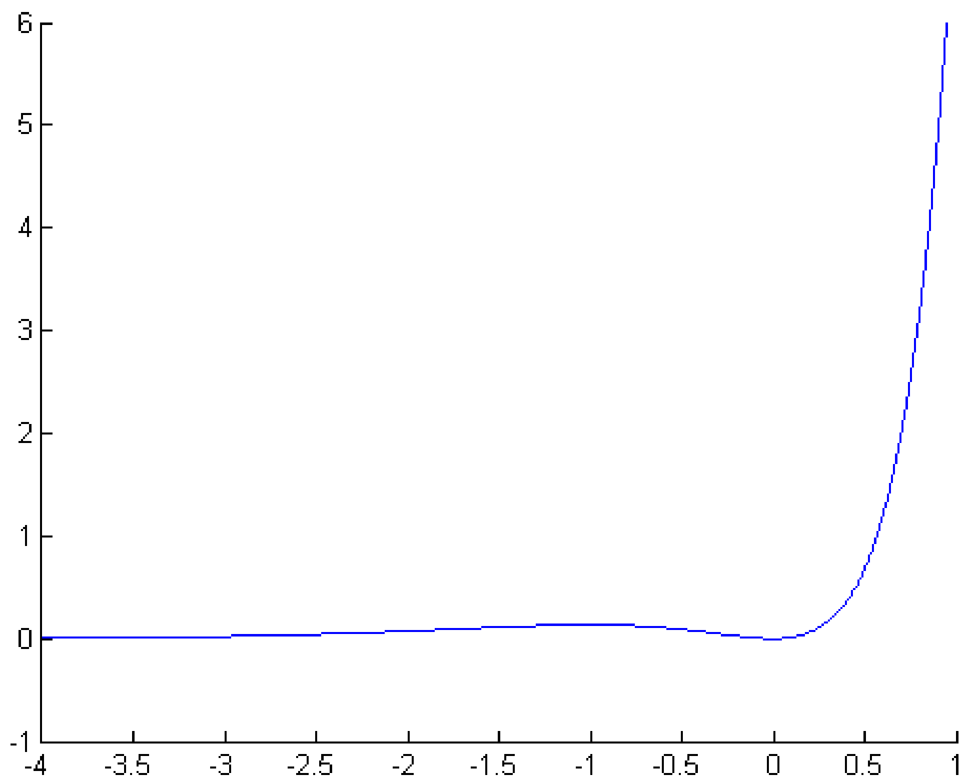
$f'(x) = 2(x^2 + x)e^{2x}$, *funkce je rostoucí na intervalech* $(-\infty, -1)$ *a* $(0, \infty)$, *funkce je klesající na intervalu* $(-1, 0)$, *lokální maximum je v bodě* -1 *a minimum v bodě* 0.

$f''(x) = 2(2x^2+4x+1)e^{2x}$, *funkce je konkávní na intervalu* $\left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, *funkce je konvexní na intervalech* $\left(-\infty, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *a* $\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ *a má tedy inflexi v bodech* $-1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{2x} = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^{2x} = 0$ *a tedy* $y = 0$ *je asymptota.*

Vzhledem k tomu, že jedna výše uvedená limita vyšla ∞, *nemá funkce absolutní maximum. Absolutní minimum je v bodě* 0.

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 e^{2x}}{x} = \infty$, *takže funkce nemá další asymptotu.*



Obrázek 18: $f(x) = x^2 e^{2x}$.

4 Integrály

Příklad 4.1. $\displaystyle\int_0^{1/2} 4x\ \mathrm{arctg}(2x)\,dx$ $\qquad\left(\mathrm{arctg}(1) - \dfrac{1}{2}\right).$

Příklad 4.2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^4}{\left(e^{x^5}\right)^5}\,dx$ $\qquad\left(\dfrac{1-e^{-5}}{25}\right).$

Příklad 4.3. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{0} \frac{\sin x\cos x\,dx}{25+10\sin x+\sin^2 x}$ $\qquad\left(\ln\left(\dfrac{5}{4}\right) - \dfrac{1}{4}\right).$

Příklad 4.4. *Spočtěte obsah obrazce ohraničeného funkcí* $\ln x$ *a přímkou procházející body* $[1,-1]$, $[2,0]$ *na intervalu* $[1,2]$ $\qquad\left(2\ln(2) - \dfrac{1}{2}\right).$

Příklad 4.5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 8x\cos(2x)\,dx$ $\qquad(-4).$

Příklad 4.6. $\displaystyle\int_0^{\sqrt[4]{\pi/4}} \frac{4x^3(1-\mathrm{tg}(x^4))^3\,dx}{\cos^2(x^4)}$ $\qquad\left(\dfrac{1}{4}\right).$

Příklad 4.7. $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{(\ln^2 x+2\ln x+1)\,dx}{x\,(\ln^2 x+5\ln x+4)}$ $\qquad\left(3-3\ln\left(\dfrac{8}{5}\right)\right).$

Příklad 4.8. *Spočtěte obsah obrazce ohraničeného funkcí* $\mathrm{arctg}\,x$ *a přímkou procházející body* $[0,-2]$, $[2,-1]$ *na intervalu* $[0,1]$ $\qquad\left(\mathrm{arctg}(1) - \dfrac{1}{2}\ln(2) + \dfrac{7}{4}\right).$

Příklad 4.9. $\displaystyle\int_0^{1/2} xe^{2x}\,dx$ $\qquad\left(\dfrac{1}{4}\right).$

Příklad 4.10. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{2+x^2}$ $\qquad\left(\dfrac{\mathrm{arctg}\,(1)}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}\right).$

Příklad 4.11. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{(\ln^3 x+\ln^2 x+\ln x+1)\,dx}{x\,(\ln^2 x+4\ln x+4)}$ $\qquad\left(9\ln\left(\dfrac{4}{3}\right) - \dfrac{23}{12}\right).$

Příklad 4.12. *Spočtěte obsah obrazce ohraničeného funkcí* $(x+1)\ln(x+1)$ *a přímkou procházející body* $[-5,-4]$, $[7,8]$ $\qquad\left(\dfrac{e^2}{4}\right).$

Příklad 4.13. $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} 4x\ \mathrm{arctg}(-2x)\,dx$ $\qquad\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right).$

Příklad 4.14. $\displaystyle\int_0^{1/3} \frac{dx}{9+x^2}$ $\qquad\left(\dfrac{1}{3}\mathrm{arctg}\,\left(\dfrac{1}{9}\right)\right).$

Příklad 4.15. $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} \frac{-\sin x \cos^4 x\, dx}{50 + 15\cos x + \cos^2 x}$ $\quad \left(\frac{2}{3} + 350 - 2000 \ln\left(\frac{11}{9}\right) + 125 \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right).$

Příklad 4.16. *Spočtěte obsah obrazce ohraničeného funkcemi* $-\ln(x+1)$ *a* e^{-2x-2} *na intervalu* $[0,1]$ $\quad \left(2\ln 2 + \frac{e^{-2} - e^{-4}}{2} - 1\right).$

Příklad 4.17. $\displaystyle\int_{0}^{1/4} x \operatorname{arctg}(4x)\, dx$ $\quad \left(\frac{\pi}{64} - \frac{1}{32}\right).$

Příklad 4.18. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/8} \frac{(1 - \operatorname{tg}(2x))^3 dx}{\cos^2(2x)}$ $\quad \left(\frac{1}{8}\right).$

Příklad 4.19. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} \frac{e^x(20 + 23e^x + 9e^{2x} + e^{3x})\, dx}{15 + 8e^x + e^{2x}}$ $\quad \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\ln\left(\frac{15}{14}\right)\right).$

Příklad 4.20. *Spočtěte obsah obrazce ohraničeného funkcemi* $\operatorname{arctg} x$ *a* $-\operatorname{arctg} x$ *a přímkou* $x = 1$ $\quad \left(\frac{\pi}{2} - \ln 2\right).$

Příklad 4.21. $\displaystyle\int_{0}^{1/3} 9x \operatorname{arccotg}(3x)\, dx$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right).$

Příklad 4.22. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{12x^2 dx}{x^3 \ln^4 x^3}$ $\quad$ *(Integrál neexistuje).*

Příklad 4.23. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{0} \frac{\sin(2x)\cos(2x)\, dx}{16 + 8\sin(2x) + \sin^2(2x)}$ $\quad \left(\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{3}\right)\right).$

Příklad 4.24. $\displaystyle\int_{0}^{2} 3xe^{-4x}\, dx$ $\quad \left(\frac{3}{16} - \frac{27}{16e^8}\right).$

Příklad 4.25. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2 dx}{\left(e^{x^3}\right)^4}$ $\quad \left(\frac{1}{12}\left(1 - e^{-4}\right)\right).$

Příklad 4.26. $\displaystyle\int_{e^2}^{e^4} \frac{(\ln^3 x + \ln^2 x + \ln x + 1)\, dx}{x(\ln^2 x - 1)}$ $\quad (8 + 2\ln 3).$

Příklad 4.27. $\displaystyle\int_{e^2}^{e^4} \frac{(\ln^3 x + \ln^2 x + \ln x + 3)\, dx}{x(\ln^2 x - 1)}$ $\quad (8 + 4\ln 3 - \ln 5).$

Příklad 4.28. *Spočtěte obsah obrazce ohraničeného funkcí* $\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$ *a přímkou procházející body* $[1,-1]$ *a* $[-1,-3]$ *na intervalu* $[1,2]$ $\quad \left(-\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{27}{8}\right)\right).$

Příklad 4.29. $\displaystyle\int_{0}^{1} (2x+2)e^{-2x}\, dx$ $\quad \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2e^2}\right).$

Příklad 4.30. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arccotg}(x)\,dx}{1+x^2}$ $\left(\dfrac{3\pi^2}{32}\right).$

Příklad 4.31. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos x\,dx}{12+7\sin x+\sin^2 x}$ $\left(\ln\left(\dfrac{9}{8}\right)\right).$

Příklad 4.32. $\displaystyle\int_{1/4}^{e/4} 36(1+x^2)\ln(4x)\,dx$ $\left(\dfrac{1}{16}+9+\dfrac{e^3}{8}\right).$

Příklad 4.33. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\operatorname{arctg} x)^2+1}{1+x^2}\,dx$ $\left(\dfrac{\pi^3}{192}+\dfrac{\pi}{4}\right).$

Příklad 4.34. $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{5e^x\,dx}{15+8e^x+e^{2x}}$ $\left(\dfrac{5}{2}\ln\left(\dfrac{25}{21}\right)\right).$

Příklad 4.35. $\displaystyle\int_0^1 x\operatorname{arccotg}(x)\,dx$ $\left(\dfrac{1}{2}\right).$

Příklad 4.36. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi^2}{8}\right).$

Příklad 4.37. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{(2+\ln x)\,dx}{x\,(\ln^2 x+2\ln x+1)}$ $\left(\dfrac{1}{6}+\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right).$

Příklad 4.38. *Spočtěte obsah obrazce ohraničeného funkcemi xe^x a $x(x-1)$ na intervalu* $[0,1]$ $\left(\dfrac{7}{6}\right).$

Příklad 4.39. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arccotg}(x)\,dx$ $\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\ln(2)\right).$

Příklad 4.40. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2x\cos(x^2)(1-\sin(x^2))\,dx$ $\left(\dfrac{1}{2}\right).$

Příklad 4.41. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(2+\operatorname{arctg}x)\,dx}{(1+x^2)\,(\operatorname{arctg}^2x+4)}$ $\left(\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\pi}{8}\right)+\dfrac{1}{2}\ln\left(\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^2+4\right)-\dfrac{1}{2}\ln 4\right).$

Příklad 4.42. *Spočtěte obsah obrazce ohraničeného funkcemi $x\sin(\pi x)$ a $x^2(x^2-1)$* $\left(\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{4}{15}\right).$

Příklad 4.43. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 4x\sin(2x)\,dx$ $(\pi).$

Příklad 4.44. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/4}} \frac{2x(1-\operatorname{tg}(x^2))\,dx}{\cos^2(x^2)}$ $\left(\dfrac{1}{2}\right).$

Příklad 4.45. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{-(2+\operatorname{arccotg} x)^2\,dx}{(1+x^2)\left(\operatorname{arccotg}^2 x + \operatorname{arccotg} x - 12\right)}$
$$\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{4}{7}\ln\left(4+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{25}{7}\ln\left|\frac{\pi}{2}-3\right| + \frac{4}{7}\ln(4+\pi) - \frac{25}{7}\ln|\pi-3|\right).$$

Příklad 4.46. *Spočtěte obsah obrazce ohraničeného funkcemi* $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ *a* x^2-1 $\left(\dfrac{4}{\pi}+\dfrac{4}{3}\right).$

Příklad 4.47. $\displaystyle\int_0^1 x\,\operatorname{arctg}(x)\,dx$ $\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\right).$

Příklad 4.48. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2-3\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $\left(\pi-\dfrac{3\pi^2}{8}\right).$

Příklad 4.49. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{(2+\ln x)\,dx}{x\left(\ln^2 x + 4\ln x + 4\right)}$ $\left(\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)\right).$

Příklad 4.50. *Spočtěte obsah obrazce ohraničeného funkcemi* $x\sin(x)$ *a* $x(x-\pi)$ $\left(\pi+\dfrac{\pi^3}{6}\right).$

Příklad 4.51. $\displaystyle\int_0^1 4xe^{-2x}\,dx$ $\left(-3e^{-2}+1\right).$

Příklad 4.52. $\displaystyle\int_0^1 2x\left(e^{x^2}\right)^2\,dx$ $\left(\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{1}{2}\right).$

Příklad 4.53. $\displaystyle\int_{e^2}^{e^4} \frac{(1+\ln x-\ln^2 x)\,dx}{x\left(\ln^2 x - 1\right)}$ $\left(\dfrac{\ln(5)}{2}-2\right).$

Příklad 4.54. *Spočtěte obsah obrazce ohraničeného funkcí* x^2 *a přímkou procházející body* $[-1,1]$ *a* $[1,5]$ $\left(11-\dfrac{1}{3}\right).$

Příklad 4.55. $\displaystyle\int_1^2 (x-2)\ln(4x)\,dx$ $\left(\dfrac{5}{4}-3\ln(2)\right).$

Příklad 4.56. $\displaystyle\int_0^2 \frac{-4x}{4+x^2}\,dx$ $(-2\ln(2)).$

Příklad 4.57. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x(5-3\cos x+\cos^2 x)\,dx}{4-4\cos x+\cos^2 x}$ $(4-\ln(3)).$

Příklad 4.58. $\displaystyle\int_0^1 8x\,\operatorname{arctg}(2x)\,dx$ $(5\operatorname{arctg}(2)-2).$

Příklad 4.59. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt[3]{\arccos x}}\,dx$ $\left(\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{\pi^2}{4}}\right).$

Příklad 4.60. $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^{3x} + e^{2x}\, dx}{4 - 4e^{x} + e^{2x}}$ $\qquad (2 + \ln(3))\,.$

Příklad 4.61. $\displaystyle\int_{1}^{e} 4x \ln(2x)\, dx$ $\qquad \big(e^2 + 1 + (2e^2 - 2)\ln 2\big)\,.$

Příklad 4.62. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{(1 + x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}\, dx$ $\qquad \big(\sqrt{\pi}\big)\,.$

Příklad 4.63. $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\ln x\, dx}{x(1 + 2\ln x + \ln^2 x)}$ $\qquad \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right).$

Příklad 4.64. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} 2x^2 \cos(2x)\, dx$ $\qquad (\pi)\,.$

Příklad 4.65. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}\arccos x}\, dx$ $\qquad (\ln(2))\,.$

Příklad 4.66. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{2x}\, dx}{1 + 4e^{4x}}$ $\qquad \left(\frac{\operatorname{arctg}(2)}{4}\right).$