Cvičení 1

Příklad 1. Vypočtěte (také jako určitý integrál)

- $\displaystyle\int e^{-2x}x^2\,dx \qquad \left(\overset{c}{=} \frac{-e^{-2x}}{4}\big(2x^2+2x+1\big) \quad \text{pro } x\in\mathbb{R}\right),$
- $\displaystyle\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x)\,dx$ (pomocí per partes),
  $\displaystyle\left(\overset{c}{=} \frac{\ln(1-\cos x)-\ln(1+\cos x)}{2} - \cos x\ln(\operatorname{tg} x) \quad \text{např. pro } x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right),$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(3x)}\,dx \qquad \left(\overset{c}{=} \frac{-\operatorname{cotg}(3x)}{3} \quad \text{např. pro } x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\right),$
- $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx \qquad \left(\overset{c}{=} \frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{3} \quad \text{pro } x\in\mathbb{R}\right),$
- $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx \qquad \left(\overset{c}{=} \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) \quad \text{pro } x\in\mathbb{R}\right),$
- $\displaystyle\int \frac{7x+1}{6x^2+x-1}\,dx$
  $\displaystyle\left(\overset{c}{=} \frac{2}{3}\ln|3x-1| + \frac{1}{2}\ln|2x+1| \quad \text{v intervalu, který neobsahuje body } -\frac{1}{2} \text{ a } \frac{1}{3}\right),$
- $\displaystyle\int \frac{4}{4x^2-4x+5}\,dx \qquad \left(\overset{c}{=} \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{2} \quad \text{pro } x\in\mathbb{R}\right),$
- $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}\,dx$
  $\displaystyle\left(\overset{c}{=} \frac{-5x-12}{x^2+6x+8} + \ln\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^2 \quad \text{v intervalu, který neobsahuje body } -4 \text{ a } -2\right),$
- $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx \qquad \left(\overset{c}{=} \frac{2}{3}(\ln x-2)\sqrt{1+\ln x} \quad \text{pro } x>\frac{1}{e}\right),$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx \qquad \left(\overset{c}{=} \cos\frac{1}{x} \quad \text{v intervalu, který neobsahuje bod } x=0\right).$

Příklad 2. Odvoďte nejprve součet konečné a poté i nekonečné geometrické řady. Využijte identitu

$$(1-q)(1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n) = 1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n-q-q^2-q^3-\ldots-q^n-q^{n+1} = 1-q^{n+1}.$$