Cvičení 10 a 11

Příklad 1. Nakreslete směrové pole diferenciální rovnice: $y' = \dfrac{y}{x}$.

Příklad 2. Dokažte, že funkce $y(x)$, daná implicitně rovnicí $x^2 + y^2 = 1$ je na intervalu $(-1, 1)$ maximálním řešením diferenciální rovnice $x + yy' = 0$ při počáteční podmínce $y(0) = -1$.

Příklad 3. Řešte diferenciální rovnice (nejprve rozhodněte o existenci a jednoznačnosti řešení):

- $\dfrac{y'}{x} = \dfrac{1}{1+x^2} \qquad \left(y(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{2} + C \text{ pro } x \in (-\infty, 0) \text{ nebo } x \in (0, \infty)\right),$
- $y' = \cos x,\ y(0) = 1 \qquad (y(x) = \sin x + 1 \text{ pro } x \in \mathbb{R}),$
- $(1 + e^x)y' + 1 = e^y,\ y(0) = 0 \qquad (y(x) = 0 \text{ pro } x \in \mathbb{R}),$
- $y' = 2\sqrt{y}\ln x,\ y(e) = 1 \qquad \big(y(x) = (x(\ln x - 1) + 1)^2 \text{ pro } x \in (0, \infty)\big),$
- $y' = \dfrac{x+y}{y-x},\ y(1) = 0 \qquad \left(y(x) = x - \sqrt{2x^2 - 1} \text{ pro } x \in \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)\right),$
- $y' = \dfrac{-7x + 3y + 7}{-7y + 3x - 3} \qquad \big((y - x + 1)^2(y + x - 1)^5 = C\big),$
- $y' = -\dfrac{2y}{x},\ y(1) = 2 \qquad \left(y(x) = \dfrac{2}{x^2} \text{ pro } x \in (0, \infty)\right),$
- $y' = -2yx + 4x \qquad \left(y(x) = 2 + Ce^{-x^2} \text{ pro } x \in \mathbb{R}\right),$
- $y' = 2yx + 2xe^{x^2},\ y(0) = 4 \qquad \left(y(x) = (x^2 + 4)e^{x^2} \text{ pro } x \in \mathbb{R}\right),$
- $y' = -2y + y^2e^x \qquad \left(y(x) = \dfrac{1}{e^x + Ce^{2x}} \text{ pro } x \in \mathbb{R}\right),$
- $3xy' = 2y + \dfrac{x^2}{y^2},\ y(1) = 1 \qquad \big(y(x) = (x^2 + x^2\ln x)^{1/3} \text{ pro } x \in (0, \infty)\big),$
- $(2x^3 + xy^2)dx + (x^2y + 2y^3)dy = 0 \qquad \big(x^4 + x^2y^2 + y^4 = C\big),$
- $(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0,\ y(1) = 0 \qquad \big(x^2 + x^3y - y^3 = 1\big).$

Příklad 4. Řešte diferenciální rovnice:

- $y'' = \sin x + e^{-2x}$ $\qquad \left(y(x) = -\sin x + \dfrac{e^{-2x}}{4} + C_1 x + C_2 \text{ pro } x \in \mathbb{R} \right),$
- $y'' - 5y' + 6y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 5$ $\qquad \big(y(x) = e^{2x} + e^{3x} \text{ pro } x \in \mathbb{R} \big),$
- $y'' - 4y' + 13y = 0$ $\qquad \big(y(x) = e^{2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)) \text{ pro } x \in \mathbb{R} \big),$
- $y'' + 6y' + 9y = 0$ $\qquad \big(y(x) = e^{-3x}(C_1 + C_2 x) \text{ pro } x \in \mathbb{R} \big),$
- $y'' - 9y = 5e^{2x}$ $\qquad \big(y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - e^{2x} \text{ pro } x \in \mathbb{R} \big),$
- $y'' - 9y = \sin(2x)$ $\qquad \left(y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - \dfrac{\sin(2x)}{13} \text{ pro } x \in \mathbb{R} \right),$
- $y'' - 4y = 3x^3 e^x$ $\quad \left(y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \left(x^3 + 2x^2 + \dfrac{14x}{3} + \dfrac{40}{9} \right) e^x \text{ pro } x \in \mathbb{R} \right),$
- $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-x} \cos x$ $\qquad \left(y(x) = e^{-x}\left(C_1 \cos x + \left(C_2 + \dfrac{3x}{2} \right) \sin x\right) \text{ pro } x \in \mathbb{R} \right).$