Cvičení 12 - 14

Příklad 1. Nejjednodušší je separace proměnných, lze-li ji provést! Funkce xe^{x+y} je spojitá a tedy integrovatelná:

$$\int_0^1 \int_0^1 xe^{x+y}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 xe^x e^y\,dx\,dy = \int_0^1 e^y\,dy \int_0^1 xe^x\,dx = e-1.$$

Příklad 2. Na pořadí integrace záleží! Funkce x^y je pro $x \geq 0$ a $y > 0$ spojitá a tedy integrovatelná:

$\displaystyle\int_0^1 \int_1^2 x^y\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{x^2-x}{\ln x}\,dx \ldots$ jak dál? … Zkusíme raději změnit pořadí integrace.

$\displaystyle\int_1^2 \int_0^1 x^y\,dx\,dy = \int_1^2 \frac{dy}{y+1} = \ln\frac{3}{2}.$

A tedy i $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-x}{\ln x}\,dx = \ln\frac{3}{2}.$

Příklad 3. Integrujte funkci $x+y^2$ přes obdélník s vrcholy $[0,0]$, $[1,0]$, $[1,2]$, $[0,2]$. $\left(\dfrac{11}{3}\right)$

Příklad 4. Určete integrační meze oblasti určené
a) trojúhelníkem s vrcholy $[0,0]$, $[2,1]$, $[-2,1]$,
b) lichoběžníkem s vrcholy $[0,0]$, $[1,0]$, $[1,2]$, $[0,1]$.

a) Integrační oblast A je ohraničena přímkami $2y = x$, $2y = -x$, $y = 1$. Tedy

$$A:\ 0 \leq y \leq 1, \quad -2y \leq x \leq 2y,$$

nebo pomocí dvou oblastí A_1, A_2

$$A_1:\ 0 \leq x \leq 2, \quad \frac{x}{2} \leq y \leq 1, \qquad A_2:\ -2 \leq x \leq 0, \quad -\frac{x}{2} \leq y \leq 1.$$

Je-li tedy f spojitá funkce dvou proměnných, platí

$$\int_0^1 \int_{-2y}^{2y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_{x/2}^1 f(x,y)\,dy\,dx + \int_{-2}^0 \int_{-x/2}^1 f(x,y)\,dy\,dx.$$

b) Integrační oblast B je ohraničena přímkami $y = 0$, $x = 1$, $y = x+1$, $x = 0$. Tedy

$$B:\ 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x+1,$$

nebo pomocí dvou oblastí B_1, B_2

$$B_1:\ 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \qquad B_2:\ 1 \leq y \leq 2, \quad y-1 \leq x \leq 1.$$

Je-li tedy f spojitá funkce dvou proměnných, platí

$$\int_0^1 \int_0^{x+1} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^2 \int_{y-1}^1 f(x,y)\,dx\,dy.$$

V případě, že máme zadány křivky ohraničující integrační oblast, určíme nejprve průsečíky křivek a poté oblast rozdělíme na jednotlivé podoblasti tak, aby v každé podoblasti byla horní (dolní) mez popsána jedinou funkcí.

Příklad 5. Integrujte funkci xy^2 přes oblast ohraničenou nerovnicemi $0 \le x \le 1$ a $x^2 \le y \le x$.

$$\left(\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 \, dy \, dx = \frac{1}{40} \right)$$

Ještě si ukážeme, jak v tomto případě změnit pořadí integrace. Hranice je popsána rovnicemi $y = x$ a $y = x^2$, nebo též rovnicemi $x = y$ a $x = \sqrt{y}$ (nalezli jsme tedy inverzní funkce původních hranic). Souřadnice průsečíků jsou $[0, 0]$ a $[1, 1]$. Oblast tedy můžeme ekvivalentně popsat nerovnicemi $0 \le y \le 1$, $y \le x \le \sqrt{y}$ a tedy

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 \, dy \, dx = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} xy^2 \, dx \, dy.$$

Příklad 6. Určete obsah obrazce ohraničeného obloukem hyperboly $xy = a^2$ a přímkou $2x + 2y = 5a$, kde $a > 0$.

$$\left(\int_{a/2}^{2a} \int_{a^2/x}^{5a/2-x} dy \, dx = a^2 \left(\frac{15}{8} - 2 \ln 2 \right) \right)$$

Příklad 7. Vypočtěte oba dvojnásobné integrály funkce $x^2 + 2y^2$ přes oblast ohraničenou nerovnicemi $0 \le x \le 2$ a $-1 \le y \le 1$. (8)

Příklad 8. Vypočtěte oba dvojnásobné integrály funkce $\dfrac{1}{(2x + y + 1)^2}$ přes oblast ohraničenou nerovnicemi $0 \le x \le 4$ a $0 \le y \le 1$. $\left(\dfrac{1}{2} \ln \dfrac{9}{5} \right)$

Příklad 9. Vypočtěte oba dvojnásobné integrály funkce $f(x, y) = \dfrac{x - y}{(x + y)^3}$ na čtverci $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

$$\left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} \, dy \, dx = \frac{1}{2} \qquad \text{a} \qquad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} \, dx \, dy = -\frac{1}{2} \right)$$

Vidíme, že jsme dostali různé hodnoty. Integrovaná funkce totiž není spojitá v bodě $[0, 0]$, a není tedy na zadané oblasti integrovatelná!

Příklad 10. Integrujte funkci $f(x,y) = xy$ přes parabolickou úseč ohraničenou křivkami $y = x - 4$ a $y^2 = 2x$.

$$\left(\int_{-2}^{4} \int_{y^2/2}^{y+4} xy \, dx \, dy = \int_0^2 \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} xy \, dy \, dx + \int_2^8 \int_{x-4}^{\sqrt{2x}} xy \, dy \, dx = 90 \right)$$

Příklad 11. Změňte pořadí integrace v integrálu $\displaystyle\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y) \, dy \, dx$, kde $(a > 0)$.

$$\left(\int_0^a \int_{y^2/2a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y) \, dx \, dy + \int_0^a \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y) \, dx \, dy + \int_a^{2a} \int_{y^2/2a}^{2a} f(x,y) \, dx \, dy \right)$$

Příklad 12. Integrujte funkci $f(x,y) = x^2 + y$ přes oblast ohraničenou křivkami $y = \dfrac{x}{2}$, $y = 2x$ a $xy = 2$ pro $x \geq 0$.

$$\left(\int_0^1 \int_{x/2}^{2x} x^2 + y \, dy \, dx + \int_1^2 \int_{x/2}^{2/x} x^2 + y \, dy \, dx = \frac{17}{6} \right)$$

Příklad 13. Integrujte funkci $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2$ přes oblast A ohraničenou nerovnicemi $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ a $|y| \geq x$.

Nejprve transformujeme oblast i funkci f do polárních souřadnic:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad J = r, \qquad \text{pro } r > 0,\ 2\pi > \varphi \geq 0.$$

Potom máme

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq r \leq 2,$$

$$|y| \geq x \quad \Leftrightarrow \quad |r\sin\varphi| \geq r\cos\varphi \quad \Leftrightarrow \quad |\sin\varphi| \geq \cos\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3\pi}{4} \geq \varphi \geq \frac{\pi}{4}.$$

Tedy

$$\int_A 2x^2 + 2y^2 \, dx \, dy = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_1^2 2r^2 r \, dr \, d\varphi = \frac{15\pi}{4}.$$

Příklad 14. Spočítejte integrál $\displaystyle\int_A r\sin\varphi \, dr \, d\varphi$. Oblast A je určena plochou ohraničenou křivkami $r = 1$ a $r = 2 + \cos\varphi$ (v polárních souřadnicích).

$$\left(\int_0^{2\pi} \int_1^{2+\cos\varphi} r\sin\varphi \, dr \, d\varphi = 0 \right)$$

Příklad 15. Spočítejte obsah oblasti A ohraničené hyperbolami $xy = a$, $xy = b$, kde $0 < a < b$ a parabolami $y^2 = mx$, $y^2 = nx$, kde $0 < m < n$.

Provedeme následující transformaci souřadnic:

$$u = xy, \qquad v = \frac{y^2}{x}.$$

Výhodou této transformace je, že původní (složitě popsatelná) oblast se transformuje na pravoúhelník. Ještě potřebujeme spočítat Jakobián této transformace. Vzhledem k tomu, že výše uvedený předpis popisuje inverzní transformaci souřadnic a že Jakobián transformace se rovná převrácené hodnotě Jakobiánu inverzní transformace, je v tomto případě výhodnější spočítat Jakobián inverzní transformace. (Pokud bychom chtěli počítat Jakobián transformace museli bychom z výše uvedeného předpisu nejprve vyjádřit x a y jako funkce proměnných u a v.)

$$\frac{1}{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y^2}{x} + \frac{y^2}{x} = \frac{3y^2}{x} = 3v.$$

Tedy

$$S = \int_A dx\, dy = \frac{1}{3} \int_a^b \int_m^n \frac{1}{v}\, dv\, du = \frac{b-a}{3} \ln \frac{n}{m}.$$

Příklad 16. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx$. Návod: transformujte do polárních souřadnic.

$$\left(\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\varphi} r^2\, dr\, d\varphi = \frac{16}{9} \right)$$

Příklad 17. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_A \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dy\, dx$, kde integrační oblast A je ohraničena elipsou určenou rovnicí $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Návod: použijte zobecněné polární souřadnice

$$x = ar\cos\varphi, \qquad y = br\sin\varphi, \qquad \text{pro } r > 0,\ 2\pi > \varphi \geq 0.$$

$$\left(J = abr, \qquad \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1-r^2}\, abr\, d\varphi\, dr = \frac{2ab\pi}{3} \right)$$

Příklad 18. Pomocí Eulerovy metody najděte přibližné řešení diferenciální rovnice $y' = \frac{xy}{2}$, které odpovídá počáteční podmínce $y(0) = 1$. Toto řešení najděte na intervalu $[0, 1]$ a volte krok $h = 0,1$.

$(1,00000;\ 1,00500;\ 1,01505;\ 1,03028;\ 1,05088;\ 1,07715;\ 1,10947;\ 1,14830;\ 1,19423;\ 1,24797)$

Příklad 19. Opakování a procvičování probrané látky (třeba příklady z loňských písemek).