Cvičení 5

Příklad 1. Spočtěte všechny derivace prvního řádu:

- $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ $\quad \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-x}{x^2+y^2},\ y \neq 0\right),$
- $f(x,y) = x^y,\ x > 0$ $\quad \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \ln x\right),$
- $f(x_1,\dots,x_n) = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\, e^{x_1^2+\ldots+x_n^2}$

  $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n) = \dfrac{x_i e^{x_1^2+\ldots+x_n^2}}{\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}}(1+2(x_1^2+\ldots+x_n^2))\right),$
- $f(x,y,z) = x^2\sin(2y-z),$

  $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x\sin(2y-z),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2x^2\cos(2y-z)\right),$

  $\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -x^2\cos(2y-z)\right),$
- $f(x,y,z) = (x-yz)^{xy},\ x > yz$

  $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x-yz)^{xy} y\left(\ln(x-yz) + \dfrac{x}{x-yz}\right)\right),$

  $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x-yz)^{xy} x\left(\ln(x-yz) - \dfrac{yz}{x-yz}\right)\right),$

  $\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y) = -xy^2(x-yz)^{xy-1}\right).$

Příklad 2. Do výrazu

$$(1+x^2)^2y''(x) + 2x(1+x^2)y'(x) + y(x)$$

zaveďte nezávislou proměnnou t vztahem $x = \operatorname{tg} t,\ t \in (-\pi/2, \pi/2)$. $\quad (y''(t) + y(t))$

Příklad 3. Do výrazu

$$(y''(x)-1)(1+y^2(x)) - 2(1+y(x))(y'(x))^2$$

zaveďte závislou proměnnou z vztahem $y = \operatorname{tg} z,\ z \in (-\pi/2, \pi/2)$.

$$\left(\frac{z''(x) - 2(z'(x))^2 - \cos^2 z}{\cos^4 z}\right)$$

Příklad 4. Nechť $f(x,y) = x - e^{xy^2}$, $u = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$, $v = (0,-1)$. Vypočítejte směrové derivace $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial u}(2,1)$, $\frac{\partial f}{\partial v}(2,1)$ a gradient.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\partial f}{\partial u}(2,1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-5e^2), \frac{\partial f}{\partial v}(2,1) = 4e^2\right)$$

$$\left(\nabla f(x,y) = (1 - y^2 e^{xy^2}, -2xye^{xy^2})\right)$$

Příklad 5. Dokažte, že funkce

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z} = 0.$$

Příklad 6. Výraz

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

transformujte do nových nezávisle proměnných $u = y$, $v = \frac{y}{x}$. Předpokládejte, že f má spojité parciální derivace druhého řádu.

$$\left(\frac{v^2}{u}\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) - v^2\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(u,v)\right)$$

Příklad 7. Výraz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) - y\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

transformujte do nových nezávisle proměnných $u = x - 2\sqrt{y}$, $v = x + 2\sqrt{y}$. Předpokládejte, že f má spojité parciální derivace druhého řádu.

$$\left(4\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(u,v)\right)$$