Cvičení 6 a 7

Příklad 1. Najděte Taylorův rozvoj a určete obor konvergence u následujících funkcí

- $\sin x$ v bodě $x = 0$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} \text{ pro } x \in (-\infty, \infty)\right)$,
- $\cos x$ v bodě $x = 0$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n} x^{2n}}{(2n)!} \text{ pro } x \in (-\infty, \infty)\right)$,
- e^x v bodě $x = 0$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ pro } x \in (-\infty, \infty)\right)$,
- $(1+x)^p,\ p \in \mathbb{R}$ v bodě $x = 0$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p \cdot (p-1) \dots (p-n+1) x^n}{n!} \text{ pro } x \in (-1, 1)\right)$,
- $\ln(1+x)$ v bodě $x = 0$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \text{ pro } x \in (-1, 1]\right)$,
- $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ v bodě $x = 0$ $\left(2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \text{ pro } x \in (-1, 1)\right)$.

Příklad 2. Určete Taylorův polynom prvního, druhého a třetího stupně se středem v bodě $[1,1]$ pro funkci $f(x,y) = x^5 y^{20}$. A s jejich pomocí přibližně spočtěte $1,02^5 \cdot 0,99^{20}$. Pro Taylorův polynom prvního stupně spočtete na základě Taylorovy věty odhad chyby.

$\left(P_1(x,y) = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)\right)$,

$(P_1(1,02;0,99) = 1 + 5(1,02-1) + 20(0,99-1) = 0,9)$,

$(P_2(1,02;0,99) = 0,903; \quad P_3(1,02;0,99) = 0,90304)$,

$\left(|R_2(1,02;0,99)| \leq \frac{22(1,02-1)^2 + 218|1,02-1||0,99-1| + 420(0,99-1)^2}{2} = 0,0472\right)$.

Příklad 3. Najděte rovnice tečných rovin k zadaným plochám

- $x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$ v bodě $[8,-3,10]$ $\quad (4x - 6y - 5z = 0)$,
- $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ v bodě $[3,0,4]$ $\quad (3x + 4z = 25)$.

Příklad 4. Najděte lokální extrémy implicitně zadané funkce $y(x)$, která je řešením rovnice

- $F(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + 4y = 0$

  $\left(\text{maximum } y = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} - 2, x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \text{minimum } y = \dfrac{-4\sqrt{3}}{3} - 2, x = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,

- $F(x, y) = x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0$

  $(\text{maximum } y = 3, x = 4, \text{minimum } y = 1, x = 4)$.

Příklad 5. Vyšetřete průběh implicitně zadané křivky $F(x, y) = x^2 + y^2 - 9 = 0$.

Příklad 6. Vyšetřete průběh implicitně zadané křivky

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0,$$

kde a je kladné reálné číslo. $\left(\text{lokální extrémy jsou v bodech } x = \pm\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

Příklad 7. Opakování a procvičování probrané látky.