Matematika 2 - příklady k procvičení

Václav Finěk

26. ledna 2026

1 Nekonečné řady

Příklad 1.1 *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n 2^{(1-n)} n^{-1}$. $[0,4)$

Příklad 1.2 *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty}(x-9)^n 3^{(2-2n)} n$. $(0,18)$

Příklad 1.3 *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty}(x-8)^n 4^{(2-n)} n^{-2}$. $[4,12]$

Příklad 1.4 *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n 4^{(1-n)}}{n}$. $[-6,2)$

Příklad 1.5 *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^{(2n-1)}2^{(1-n)}}{2n-1}$. $\left[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right]$

Příklad 1.6 *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n 2^{(1-2n)}(n+1)^2$. $(-2,6)$

Příklad 1.7 *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{(n-1)}2^{(1-2n)}}{2n-1}$. $[0,8)$

Příklad 1.8 *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{(2n-1)}}{(n+1)(-2)^{(1-2n)}}$. $\left(-\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$

Příklad 1.9 *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n 2^{(1-n)}}{n^2}$. $[0,4]$

Příklad 1.10 *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n+1)^2(x-1)^n}{4^{(1-2n)}}$. $\left(\frac{15}{16},\frac{17}{16}\right)$

Příklad 1.11 *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(x+7)^n 4^{-n}$. $[-11,-3)$

Příklad 1.12 *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-11)^n 2^{-n}$. $(9, 13)$

Příklad 1.13 *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+2)^2\, 2^{(2-n)}}$. $\left[-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right]$

Příklad 1.14 *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty} (x+2)^n 2^{(1-2n)} n^2$. $(-6, 2)$

Příklad 1.15 *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2 2^{(1-n)}}$. $\left[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right]$

Příklad 1.16 *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 (x-1)^n}{2^{(3-2n)}}$. $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$

Příklad 1.17 *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(3n-2)2^{(1-4n)}}$. $\left[\frac{-33}{16}, \frac{-31}{16}\right)$

Příklad 1.18 *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n+1)2^{(-1-3n)}}$. $\left[\frac{15}{8}, \frac{17}{8}\right)$

Příklad 1.19 *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{(n+1)^2\, 2^{(n-2)}}$. $[-6, -2]$

Příklad 1.20 *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)^{-2}\, 2^{(1-2n)}}$. $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$

2 Limity

Příklad 2.1 *Spočtěte limitu:* $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \dfrac{4x-y+5}{(1+2x+y)^2}$. *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.2 *Spočtěte limitu:* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{4x-y-3}{(1+2x-3y)^2}$. *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.3 *Spočtěte limitu:* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{2x+y-3}{(1+x-2y)^2}$. *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.4 *Spočtěte limitu:* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$. (2)

Příklad 2.5 *Spočtěte limitu:* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{y^3+x^3}{x^2+y^2-2}$. *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.6 *Spočtěte limitu:* $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \dfrac{2x+y+1}{(3+x-2y)^2}$. *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.7 *Spočtěte limitu:* $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \dfrac{-1}{|3+x-2y|}$. $(-\infty)$

Příklad 2.8 *Spočtěte limitu:* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{2x-y-3}{1+x+2y}$. *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.9 *Spočtěte limitu:* $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,-1)} \dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2-2}$. *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.10 *Spočtěte limitu:* $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} \dfrac{2x-y-1}{x+y-5}$. *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.11 *Spočtěte limitu:* $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \dfrac{x^2+2xy+x+2y}{2y^2+xy-2y-x}$. $\left(-\dfrac{3}{2}\right)$

Příklad 2.12 *Spočtěte limitu:* $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \dfrac{x^2+xy+x+y}{y^2+xy-y-x}$. *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.13 *Spočtěte limitu:* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{2x-y-1}{x+2y-3}$. *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.14 *Spočtěte limitu:* $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \dfrac{4x-y+5}{1+2x+y}$. *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.15 *Spočtěte limitu:* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x^2-y^2}{2x^2+y^2-3}$. *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.16 *Spočtěte limitu:* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2-2}$. *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.17 *Spočtěte limitu:* $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,-1)} \dfrac{y^3-x^3}{x^2-y^2}$. $\left(\dfrac{3}{2}\right)$

Příklad 2.18 *Spočtěte limitu:* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{y^3+x^3}{x^2-y^2}$. $\left(\dfrac{3}{2}\right)$

Příklad 2.19 *Spočtěte limitu:* $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \dfrac{y^3+x^3}{x^2+y^2-2}$. *(Limita neexistuje)*

3 Taylorův rozvoj

Příklad 3.1 *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[0,1]$ *pro funkci* $f(x,y) = e^{xy+x} + \operatorname{arccotg}(2x) + \dfrac{\sin(xy)}{y}$. $\left(1 + \dfrac{\pi}{2} + x + \dfrac{1}{2}\left(4x^2 + 2x(y-1)\right)\right)$

Příklad 3.2 *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[1,0]$ *pro funkci* $f(x,y) = 2^{xy-y} + \operatorname{arctg}(2y) + \dfrac{\operatorname{tg}(xy)}{x}$. $(1 + 3y + \ln(2)y(x-1))$

Příklad 3.3 *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[1,0]$ *pro funkci* $f(x,y) = \log_2(x-xy) + \operatorname{arctg}(x-2y-1) + y\operatorname{cotg}\left(\dfrac{y}{x} - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$\left((1+(\ln 2)^{-1})(x-1) - (2+(\ln 2)^{-1})y - (\ln 2)^{-1}\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{2+(\ln 2)^{-1}}{2}\frac{y^2}{2}\right)$$

Příklad 3.4 *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[0,1]$ *pro funkci* $f(x,y) = 4^{x^2y} + \operatorname{arctg}(2x) + \dfrac{x}{2y}$. $\left(1 + \dfrac{5x}{2} + (\ln 4)x^2 - \dfrac{x(y-1)}{2}\right)$

Příklad 3.5 *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[0,1]$ *pro funkci* $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{y+x}{y-x}\right) + \arcsin(3x) + \dfrac{\sin x}{y}$. $(6x - 3x(y-1))$

Příklad 3.6 *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[0,1]$ *pro funkci* $f(x,y) = 2^{\sin(xy)} + y\arcsin(2x) + \dfrac{x}{2y}$.

$$\left(1 + \left(\frac{5}{2} + \ln 2\right)x + \left(\frac{\ln^2 2}{2}\right)x^2 + \left(\frac{3}{2} + \ln 2\right)x(y-1)\right)$$

Příklad 3.7 *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[0,1]$ *pro funkci* $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{y-x}{y+x}\right) + 2^{\sin(x^2y)} + y\arcsin(2x)$. $\left(1 + \ln(2)x^2 + 4x(y-1)\right)$

Příklad 3.8 *Určete Taylorův polynom prvého stupně se středem v bodě* $[1,1,0]$ *pro funkci* $f(x,y,z) = (x-yz)^{xy} + e^{x^2+y^2-2} + z\arcsin(2xy-2)$. $(2 + 3(x-1) + 2(y-1) - z)$

Příklad 3.9 *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[2,0]$ *pro funkci* $f(x,y) = e^{x^2y} + \operatorname{arctg}(2y) + \dfrac{y}{2x}$. $\left(1 + \dfrac{25}{4}y + 8y^2 + \dfrac{31}{8}(x-2)y\right)$

Příklad 3.10 *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[1,1]$ *pro funkci* $f(x,y) = e^{xy-1} + \ln(x^2+y^2-1) + \dfrac{\cos y}{x}$.

$$\left(1 + \cos 1 + (3 - \cos 1)(x-1) + (3 - \sin 1)(y-1) + \frac{(x-1)^2}{2}(-1 + 2\cos 1) + (-2 + \sin 1)(y-1)(x-1) + \frac{(y-1)^2}{2}(-1 - \cos 1)\right)$$

Příklad 3.11 *Určete Taylorův polynom třetího stupně se středem v bodě* $[0,0]$ *pro funkci* $f(x,y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. $\left(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\right)$

Příklad 3.12 *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[1,-1]$ *pro funkci* $f(x,y)=x^2+x^2y-e^{yx}-\ln x$.

$$\left(-e^{-1}+\left(e^{-1}-1\right)(x-1)+\left(1-e^{-1}\right)(y+1)+\frac{(x-1)^2}{2}\left(1-e^{-1}\right)\right.$$
$$\left.+2(y+1)(x-1)-e^{-1}\frac{(y+1)^2}{2}\right)$$

Příklad 3.13 *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[-1,1]$ *pro funkci* $f(x,y)=x^2+xy^2-e^{-yx}-\ln y$.

$$\left(-e+(e-1)(x+1)+(-3-e)(y-1)+\frac{(x+1)^2}{2}(2-e)\right.$$
$$\left.+(2+2e)(y-1)(x+1)+(-1-e)\frac{(y-1)^2}{2}\right)$$

Příklad 3.14 *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[0,2]$ *pro funkci* $f(x,y)=e^{xy^2}+\operatorname{arctg}(-2x)+\dfrac{3x}{2y}$.

$$\left(1+\frac{11}{4}x+8x^2+\frac{29}{8}(y-2)x\right)$$

Příklad 3.15 *Určete Taylorův polynom třetího stupně se středem v bodě* $[1,0]$ *pro funkci* $f(x,y)=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$.

$$\left(1+3(x-1)+3y+3(x-1)^2+3y^2+6(x-1)y+\right.$$
$$\left.(x-1)^3+y^3+3(x-1)y^2+3(x-1)^2y\right)$$

Příklad 3.16 *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[0,1]$ *pro funkci* $f(x,y)=e^{\sin(xy)}+\operatorname{arctg}(2x)+\dfrac{x}{y}$.

$$\left(1+4x+\frac{x^2}{2}\right)$$

Příklad 3.17 *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[1,1]$ *pro funkci* $f(x,y)=e^{\cos(xy-1)-1}+(y-1)^5\operatorname{arccotg}(2x)+\dfrac{y}{x}$.

$$\left(2-(x-1)+(y-1)+\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(y-1)^2}{2}-2(x-1)(y-1)\right)$$

Příklad 3.18 *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[-1,0]$ *pro funkci* $f(x,y)=e^{\sin(xy)+x+1}+(x+1)^5\operatorname{arctg}(2y)+\dfrac{2y}{x}$.

$$\left(1+(x+1)-3y+\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{y^2}{2}-2y(x+1)\right)$$

Příklad 3.19 *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[0,-1]$ *pro funkci* $f(x,y)=2^{\sin(xy)}+x^2\operatorname{arcsin}(2y+2)+\dfrac{x}{2y}$.

$$\left(1+\left(-\ln 2-\frac{1}{2}\right)x+(\ln 2)^2\frac{x^2}{2}+\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)x(y+1)\right)$$

Příklad 3.20 *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[1,0]$ *pro funkci* $f(x,y) = 4^{\sin(xy)} + y\arcsin(2y) + \dfrac{y}{5x}$.

$$\left(1 + \left(\ln 4 + \frac{1}{5}\right) y + \left((\ln 4)^2 + 4\right) \frac{y^2}{2} + \left(\ln 4 - \frac{1}{5}\right) y(x-1)\right)$$

Příklad 3.21 *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[0,1]$ *pro funkci* $f(x,y) = 8^{\sin(xy)} + y\arcsin(4x) + \dfrac{x}{4y}$.

$$\left(1 + \left(\ln 8 + \frac{17}{4}\right) x + (\ln 8)^2 \frac{x^2}{2} + \left(\ln 8 + \frac{15}{4}\right) x(y-1)\right)$$

4 Implicitní funkce

Příklad 4.1 *Vyšetřete lokální extrémy funkce $y(x)$ pro křivku určenou implicitně rovnicí $F(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 = 0$.*

Výsledek:

Minimum: $[0,1], \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right], \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right]$.

Maximum: $[0,-1], \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right], \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right]$.

Příklad 4.2 *Vyšetřete lokální extrémy funkce $y(x)$ pro křivku určenou implicitně rovnicí $F(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 = 0$.*

Výsledek:

Minimum: $[0,\sqrt{2}], \left[1, -\sqrt{1+\sqrt{2}}\right], \left[-1, -\sqrt{1+\sqrt{2}}\right]$.

Maximum: $[0,-\sqrt{2}], \left[1, \sqrt{1+\sqrt{2}}\right], \left[-1, \sqrt{1+\sqrt{2}}\right]$.

Příklad 4.3 *Vyšetřete lokální extrémy funkce $y(x)$ pro křivku určenou implicitně rovnicí $F(x,y) = (y^2+x^2)^2 + 2y^2 - 2x^2 = 0$.*

Výsledek:

Minimum: $\left[-\sqrt{\frac{3}{4}}, -\frac{1}{2}\right], \left[\sqrt{\frac{3}{4}}, -\frac{1}{2}\right]$.

Maximum: $\left[-\sqrt{\frac{3}{4}}, \frac{1}{2}\right], \left[\sqrt{\frac{3}{4}}, \frac{1}{2}\right]$.

Příklad 4.4 *Ke křivce implicitně určené rovnicí $F(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 - e^{2x-2y} - 3 = 0$ napište rovnici tečny v bodě $[1,1]$ a dále určete, zda-li tato křivka leží v okolí bodu $[1,1]$ nad tečnou nebo pod tečnou.*

Výsledek: $y = \frac{-1}{3}(x-1)+1$. *Křivka leží v okolí bodu $[1,1]$ nad tečnou.*

Příklad 4.5 *Vyšetřete lokální extrémy funkce $y(x)$ pro křivku určenou implicitně rovnicí $F(x,y) = y^2 + x^2 - 2yx - 2x - 4y = 0$.*

Výsledek: *Minimum:* $\left[\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}\right]$.

Příklad 4.6 *Vyšetřete lokální extrémy funkce $y(x)$ pro křivku určenou implicitně rovnicí $F(x,y) = 2y^2 + x^2 - 2yx - 5 - 4y = 0$.*

Výsledek: *Minimum:* $[-1,-1]$ *a maximum:* $[5,5]$.

Příklad 4.7 *Vyšetřete lokální extrémy funkce $y(x)$ pro křivku určenou implicitně rovnicí $F(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^2 - 1 = 0$.*

Výsledek:

Minimum: $[0,1], \left[1, -\sqrt{2}\right], \left[-1, -\sqrt{2}\right]$.

Maximum: $[0,-1], \left[1, \sqrt{2}\right], \left[-1, \sqrt{2}\right]$.

Příklad 4.8 *Ke křivce implicitně určené rovnicí* $F(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 - e^{2x+2y} + 1 = 0$ *napište rovnici tečny v bodě* $[-1,1]$ *a dále určete, zda-li tato křivka leží v okolí bodu* $[-1,1]$ *nad tečnou nebo pod tečnou.*

Výsledek: $y = -x$. *Křivka leží v okolí bodu* $[-1,1]$ *na tečně.*

Příklad 4.9 *Ke křivce implicitně určené rovnicí* $F(x,y) = x^4 + 2xy + y^4 - 4 = 0$ *napište rovnici tečny v bodě* $[1,1]$ *a dále určete, zda-li tato křivka leží v okolí bodu* $[1,1]$ *nad tečnou nebo pod tečnou.*

Výsledek: $y = -x + 2$. *Křivka leží v okolí bodu* $[1,1]$ *pod tečnou.*

Příklad 4.10 *Najděte lokální extrémy implicitně zadané funkce* $y(x)$, *která je řešením rovnice* $F(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2xy + 2y - 6 = 0$.

Výsledek: *Minimum:* $[3,-6]$ *a maximum:* $[-1,2]$.

Příklad 4.11 *Najděte lokální extrémy implicitně zadané funkce* $y(x)$, *která je řešením rovnice* $F(x,y) = x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0$.

Výsledek: *Minimum:* $\left[-3,-1-\sqrt{10}\right]$ *a maximum:* $\left[-3,-1+\sqrt{10}\right]$.

Příklad 4.12 *Najděte lokální extrémy implicitně zadané funkce* $x(y)$, *která je řešením rovnice* $F(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$.

Výsledek: *Minimum:* $\left[2-\sqrt{5},-1\right]$ *a maximum:* $\left[2+\sqrt{5},-1\right]$.

Příklad 4.13 *Ke křivce implicitně určené rovnicí* $F(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - e^{2x-2y} + 1 = 0$ *napište rovnici tečny v bodě* $[1,1]$ *a dále určete, zda-li tato křivka leží v okolí bodu* $[1,1]$ *nad tečnou nebo pod tečnou.*

Výsledek: $y = x$. *Křivka leží v okolí bodu* $[1,1]$ *na tečně.*

Příklad 4.14 *Ke křivce implicitně určené rovnicí* $F(x,y) = x^4 + 2xy + y^4 - e^{2x+2y} + 1 = 0$ *napište rovnici tečny v bodě* $[1,-1]$ *a dále určete, zda-li tato křivka leží v okolí bodu* $[1,-1]$ *nad tečnou nebo pod tečnou.*

Výsledek: $y = -1$. *Křivka leží v okolí bodu* $[1,-1]$ *nad tečnou.*

Příklad 4.15 *Ke křivce implicitně určené rovnicí* $F(x,y) = 2x^4 + 4xy + y^4 + e^{3x+3y} = 0$ *napište rovnici tečny v bodě* $[-1,1]$ *a dále určete, zda-li tato křivka leží v okolí bodu* $[-1,1]$ *nad tečnou nebo pod tečnou.*

Výsledek: $y = \dfrac{(x+1)}{3} + 1$, $y''(-1) = -\dfrac{44}{3}$, *křivka tedy leží pod tečnou.*

Příklad 4.16 *Ke křivce implicitně určené rovnicí* $F(x,y) = x^4 - 3xy + y^4 + e^{3x-2y-1} = 0$ *napište rovnici tečny v bodě* $[1,1]$ *a dále určete, zda-li tato křivka leží v okolí bodu* $[1,1]$ *nad tečnou nebo pod tečnou.*

Výsledek: $y = 4x - 3$, $y''(1) = 205$, *křivka tedy leží nad tečnou.*

Příklad 4.17 *Ke křivce implicitně určené rovnicí* $F(x,y) = 2x^4 - 5xy + 2y^4 + e^{3x-2y-1} = 0$ *napište rovnici tečny v bodě* $[1,1]$ *a dále určete, zda-li tato křivka leží v okolí bodu* $[1,1]$ *nad tečnou nebo pod tečnou.*

Výsledek: $y = -6x + 7$, $y''(1) = -1173$, *křivka tedy leží pod tečnou.*

Příklad 4.18 *Ke křivce implicitně určené rovnicí* $F(x,y) = 2x^2 - 5xy + 2y^2 + e^{x-y-2} = 10$ *napište rovnici tečny v bodě* $[1,-1]$ *a dále určete, zda-li tato křivka leží v okolí bodu* $[1,-1]$ *nad tečnou nebo pod tečnou.*

Výsledek: $y = x - 2$, $y''(1) = -\dfrac{1}{5}$, *křivka tedy leží pod tečnou.*

5 Aplikace parciálních derivací

Příklad 5.1 *Napište rovnici tečné roviny v bodě* $[-1,-1,0]$ *k ploše určené rovnicí* $F(x,y,z) = \arcsin(x^2-y^2-z^2)+x^2z+y^2+\sqrt[3]{2z+1}+xyz-2=0$. $\left(-2(x+1)+\frac{8}{3}z=0\right)$

Příklad 5.2 *Nechť* $f(x,y)=(2x-6y)^{4x}+\ln(-xy)$ *a* $u=(-1,2)$. *Vypočítejte směrovou derivaci* $\frac{\partial f}{\partial u}(1,-1)$. $\left(-\frac{8^4(1+4\ln 8)+1}{\sqrt{5}}+2\frac{-24(8^3)-1}{\sqrt{5}}\right)$

Příklad 5.3 *Nechť* $f(x,y)=(y-3x)^{2x+1}+\arcsin(xy)$ *a* $u=(1,1)$. *Vypočítejte směrovou derivaci* $\frac{\partial f}{\partial u}(0,1)$. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Příklad 5.4 *Pomocí transformace do nových nezávisle proměnných* $u=2x+3y$ *a* $v=2x-3y$ *zjednodušte vlnovou rovnici* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{4}{9}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$. *Předpokládejte, že funkce* f *má všechny derivace druhého řádu spojité.* $\left(8\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v)+8\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v)=0\right)$

Příklad 5.5 *Do výrazu* $(1+x^2)^2y''(x)+2x(1+x^2)y'(x)+y(x)=0$ *zaveďte novou nezávislou proměnnou* t *vztahem* $x=\operatorname{tg} t$, $t\in\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. *Předpokládejte, že funkce* y *má spojitou druhou derivaci.* $(y''(t)+y(t)=0)$

Příklad 5.6 *Výraz* $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$ *transformujte do nových nezávisle proměnných* $u=\frac{x}{y}$, $v=y$. *Předpokládejte, že funkce* f *má spojité parciální derivace.* $\left(v\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)=0\right)$

Příklad 5.7 *Pomocí transformace do nových nezávisle proměnných* $u=2x+y$ *a* $v=2x-y$ *zjednodušte vlnovou rovnici* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$. *Předpokládejte, že funkce* f *má všechny derivace druhého řádu spojité.* $\left(8\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v)+8\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v)=0\right)$

Příklad 5.8 *Napište rovnici tečné roviny v bodě* $[1,1,0]$ *k ploše určené rovnicí* $F(x,y,z)=\arcsin(x^4-y^2+z^4)+\sqrt[5]{(x^2y^2-1)^6}+xyz=0$. $(4(x-1)-2(y-1)+z=0)$

Příklad 5.9 *Dokažte, že funkce* $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ *vyhovuje rovnici* $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial z}=0$

Příklad 5.10 *Dokažte, že funkce* $f(x,y)=\frac{1}{y-cx}$ *vyhovuje rovnici* $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}-c^2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}=0$

Příklad 5.11 *Napište rovnici tečné roviny v bodě* $[-1,0,1]$ *k ploše určené rovnicí* $F(x,y,z)=\operatorname{arctg}(-x^2+y^2+z^2)+\sqrt[5]{xz^3}y=0$. $(2(x+1)-y+2(z-1)=0)$

Příklad 5.12 *Pomocí transformace do nových nezávisle proměnných* $u = x + 2y$ *a* $v = x - 2y$ *zjednodušte vlnovou rovnici* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$. *Předpokládejte, že funkce* f *má všechny derivace druhého řádu spojité.* $\left(2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v) = 0\right)$

Příklad 5.13 *Napište rovnici tečné roviny v bodě* $[-1,-1,0]$ *k ploše určené rovnicí* $F(x,y,z) = \arccos(-x^2+y^2-z^2) + x^2y - xy^2 + \sqrt{z+1} + xyz - 1 - \dfrac{\pi}{2} = 0$.

$$\left(-(x+1) + y + 1 + \frac{3}{2}z = 0\right)$$

Příklad 5.14 *Napište rovnici tečné roviny v bodě* $[1,-1,0]$ *k ploše určené rovnicí* $F(x,y,z) = \arccos(-x^2+y^2-z^2) + \sqrt[5]{x^2y^4z^6} + z - \frac{\pi}{2} = 0$.

$$(2(x-1) + 2(y+1) + z = 0)$$

Příklad 5.15 *Napište rovnici tečné roviny v bodě* $[1,1,0]$ *k ploše určené rovnicí* $F(x,y,z) = \operatorname{arctg}(x^2-y^2-z^2) + \sqrt[3]{x^2y^4}z = 0$.

$$(2(x-1) - 2(y-1) + z = 0)$$

Příklad 5.16 *Napište rovnici tečné roviny v bodě* $[1,0,-1]$ *k ploše určené rovnicí* $F(x,y,z) = \operatorname{arctg}(x^2-y^2-z^2) + \sqrt[4]{x^3z^2}y = 0$.

$$(2(x-1) + y + 2(z+1) = 0)$$

Příklad 5.17 *Napište rovnici tečné roviny v bodě* $[1,1,0]$ *k ploše určené rovnicí* $F(x,y,z) = \operatorname{arctg}(x^3-y^2-z^4) + \sqrt[3]{xy^2}z = 0$.

$$(3(x-1) - 2(y-1) + z = 0)$$

6 Extrémy funkcí více proměnných

Příklad 6.1 *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce* $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ *na množině* M *určené podmínkou* $|x| + |y| \leq 1$. *Dále ověřte, zda-li má funkce* f *lokální extrémy.*

Výsledek:
Absolutní minimum (i lokální): $[0,0]$.
Absolutní maximum: $[0,-1], [0,1], [-1,0], [1,0]$.

Příklad 6.2 *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce* $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^2$ *na množině* M *určené podmínkou* $|x-1| + |y-1| \leq 1$. *Dále ověřte, zda-li má funkce* f *lokální extrémy.*

Výsledek:
Absolutní minimum: $\left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.
Absolutní maximum: $[0,1], [1,0]$.

Příklad 6.3 *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce* $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ *na množině* M *tvořené trojúhelníkem s vrcholy* $[1,1]$, $[0,-1]$ *a* $[-1,0]$. *Dále ověřte, zda-li má funkce* f *lokální extrémy.*

Výsledek:
Absolutní minimum: $[1,1]$, *a na celé úsečce* $y = -1 - x$ *pro* $x \in [-1,0]$.
Absolutní maximum: $\left[\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right], \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.
Lokální minimum: $[1,1]$.

Příklad 6.4 *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce* $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$ *na množině* M *tvořené trojúhelníkem s vrcholy* $[-1,-1]$, $[0,1]$ *a* $[1,0]$. *Dále ověřte, zda-li má funkce* f *lokální extrémy.*

Výsledek:
Absolutní minimum: $\left[\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right], \left[\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.
Absolutní maximum: $[-1,-1]$, *a na celé úsečce* $y = 1 - x$ *pro* $x \in [0,1]$.
Lokální maximum: $[-1,-1]$.

Příklad 6.5 *Najděte lokální extrémy funkce* $F(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2-2xy+2yz+2z-6x+35$.

Výsledek: *Lokální minimum:* $[8,5,-2]$.

Příklad 6.6 *Najděte absolutní extrémy funkce* $f(x,y,z) = 1+z+x+y^2$ *na množině* $x^2+y^2+z^2 \leq 4$.

Výsledek:
Absolutní minimum: $\left[-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}\right]$.
Absolutní maximum: $\left[\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{1}{2}\right]$.

Příklad 6.7 *Najděte lokální extrémy funkce* $f(x,y) = 2x^2 - 8xy + 4y^2 - 6x + 2y + 9$.

Výsledek: *Funkce nemá lokální extrémy.*

Příklad 6.8 *Najděte absolutní extrémy funkce* $f(x,y) = 1 + x + y^2$ *na množině* $x^2 + 2y^2 \leq 4$.

Výsledek:
Absolutní minimum: $[-2, 0]$.
Absolutní maximum: $\left[1, \sqrt{\frac{3}{2}}\right], \left[1, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$.

Příklad 6.9 *Najděte lokální extrémy funkce* $F(x,y,z) = -x^2 - 2y^2 - 3z^2 + 2xy - 2yz - 2z + 6x + 35$.

Výsledek: *Lokální maximum:* $[8, 5, -2]$.

Příklad 6.10 *Najděte lokální extrémy:* $F(x,y,z) = 2y - 2z - y^2 - \frac{z^2}{2} + 3xz - x^3$.

Výsledek: *Lokální maximum:* $[2, 1, 4]$.

Příklad 6.11 *Najděte absolutní extrémy:* $f(x,y) = 1 + x + y$ *na množině* $x^2 + 2x + y^2 \leq 0$.

Výsledek:
Absolutní minimum: $\left[-1 - \sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right]$ *a absolutní maximum:* $\left[-1 + \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$.

Příklad 6.12 *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce* $f(x,y) = x^2 + y^4$ *na množině* M *dané podmínkami* $x \geq -1 - y^2, -2 \leq y \leq 2, x \leq 1$. *Dále ověřte, zda-li má funkce* $f(x,y) = x^2 + y^4$ *lokální extrémy.*

Výsledek:
Absolutní (i lokální) minimum: $[0, 0]$.
Absolutní maximum: $[-5, 2], [-5, -2]$.

Příklad 6.13 *Najděte lokální extrémy funkce* $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$.

Výsledek: *Lokální maximum:* $[-1, -1]$.

Příklad 6.14 *Najděte absolutní extrémy funkce* $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 2$ *na množině* $x^2 + y^2 \leq 5$. *Dále ověřte, zda-li má tato funkce lokální extrémy.*

Výsledek: *Absolutní (i lokální) minimum:* $[1, 0]$. *a absolutní maximum:* $\left[-\sqrt{5}, 0\right]$.

Příklad 6.15 *Najděte lokální extrémy funkce* $f(x,y) = x^2 - 2xy - y^2 - 4x + 9$.

Výsledek: *Nemá lokální extrémy.*

Příklad 6.16 *Najděte absolutní extrémy funkce* $f(x,y) = x^2 - 2xy - y^2 - 4x + 9$ *na úsečce procházející body* $[0, -5]$, $[2, 3]$.

Výsledek:
Absolutní minimum: $[0, -5]$, $[2, 3]$.
Absolutní maximum: $[1, -1]$.

Příklad 6.17 *Najděte lokální extrémy funkce* $f(x,y) = x^2 - 2xy - y^2 - 6x + 2y + 9$.

Výsledek: *Nemá lokální extrémy.*

Příklad 6.18 *Najděte extrémy funkce* $f(x,y) = x^2+2xy+y^2-2x+2y$ *na kružnici* $x^2+y^2=2$.

Výsledek:
Absolutní minimum: $[1,-1]$.
Absolutní maximum: $\left[\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right], \left[\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$.

Příklad 6.19 *Najděte lokální extrémy funkce* $f(x,y) = x^2 - 10xy + 4y^2 - 6x + 2y + 9$.

Výsledek: *Nemá lokální extrémy.*

Příklad 6.20 *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce* $f(x,y) = x^2 - y^4$ *na množině* M *dané podmínkami* $x \geq -1-y^2, -1 \leq y \leq 1, x \leq 1$.

Výsledek:
Absolutní minimum: $[0,1]$, $[0,-1]$.
Absolutní maximum: $[-2,1]$, $[-2,-1]$.

Příklad 6.21 *Najděte extrémy funkce* $f(x,y) = x^2+2xy+y^2-2x+2y$ *na kružnici* $x^2+y^2=4$.

Výsledek:
Absolutní minimum: $[\sqrt{2},-\sqrt{2}]$.
Absolutní maximum: $\left[\frac{-1-\sqrt{7}}{2}, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right], \left[\frac{-1+\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right]$

Příklad 6.22 *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce* $f(x,y) = x^4 + y^2$ *na množině* M *dané podmínkami* $x \geq -y^2, -1 \leq y \leq 1, x \leq 1$. *Dále ověřte, zda-li má funkce* $f(x,y) = x^4 + y^2$ *v bodě* $[0,0]$ *lokální extrém.*

Výsledek:
Absolutní minimum (i lokální): $[0,0]$.
Absolutní maximum: $[-1,-1], [-1,1], [1,-1], [1,1]$.

Příklad 6.23 *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce* $f(x,y) = x^2 + y^4$ *na množině* M *dané podmínkami* $x^2 \leq 4-y^2, -1 \leq x \leq 1$. *Dále ověřte, zda-li má funkce* $f(x,y) = x^2 + y^4$ *v bodě* $[0,0]$ *lokální extrém.*

Výsledek:
Absolutní minimum (i lokální): $[0,0]$.
Absolutní maximum: $[0,-2], [0,2]$.

Příklad 6.24 *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce* $f(x,y) = x^2 - y^2$ *na množině* M *dané podmínkami* $x \geq -1-y^2, x \leq 1+y^2, -1 \leq y \leq 1$. *Dále ověřte, zda-li má funkce* $f(x,y) = x^2 - y^2$ *v bodě* $[0,0]$ *lokální extrém.*

Výsledek:
Absolutní minimum: $[0,1]$, $[0,-1]$.
Absolutní maximum: $[2,1]$, $[2,-1]$, $[-2,1]$, $[-2,-1]$.

Příklad 6.25 *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce* $f(x,y) = 2y^2 + x^2 - 3$ *na množině* M *dané podmínkami* $x \geq -1-y^2, x \leq 1-y^2, -2 \leq y \leq 2$. *Dále ověřte, zda-li má funkce* $f(x,y) = 2y^2 + x^2 - 3$ *v bodě* $[0,0]$ *lokální extrém.*

Výsledek:
Absolutní minimum (i lokální): $[0,0]$.
Absolutní maximum: $[-5,2]$, $[-5,-2]$.

Příklad 6.26 *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce* $f(x,y) = y^2 - 2xy + x^3 - 3$ *na množině* M *dané podmínkami* $y \geq -x^2, y \leq x^2, -1 \leq x \leq 1$. *Dále ověřte, zda-li má funkce* $f(x,y) = y^2 - 2xy + x^3 - 3$ *v podezřelých bodech lokální extrémy.*

Výsledek:

Absolutní minimum: $[-1,-1]$. *Absolutní maximum:* $[1,-1]$. *Lokální minimum:* $\left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

Příklad 6.27 *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce* $f(x,y) = y^2 - x^2y + 3$ *na množině* M *dané podmínkami* $y \geq -1 - x^2, y \leq 1 + x^2, -1 \leq x \leq 1$. *Dále ověřte, zda-li má funkce* $f(x,y) = y^2 - x^2y + 3$ *v podezřelých bodech lokální extrémy.*

Výsledek:

Absolutní minimum: $\left[1, \frac{1}{2}\right], \left[-1, \frac{1}{2}\right]$.
Absolutní maximum: $[1,-2]$, $[-1,-2]$.

7 Diferenciální rovnice

Příklad 7.1 *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 2y' + 5y = \cos(x)$.

Výsledek: $y = e^x(A\sin(2x) + B\cos(2x)) + \frac{1}{5}\cos x - \frac{1}{10}\sin x$.

Příklad 7.2 *Řešte diferenciální rovnici* $xy' + y = 1 + \ln x$, $y(1) = 1$.

Výsledek: $y = \ln(x) + \frac{1}{x}, \quad x > 0$.

Příklad 7.3 *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin(2x)$.

Výsledek: $y = e^x\left(A\sin(2x) + B\cos(2x) - \frac{x}{4}\cos 2x\right)$.

Příklad 7.4 *Řešte diferenciální rovnici* $y' - 2xy = x$, $y(0) = 2$.

Výsledek: $y = \frac{5e^{x^2} - 1}{2}$.

Příklad 7.5 *Řešte diferenciální rovnici* $y'' + 2y' + 10y = e^{-x}\sin(3x)$.

Výsledek: $y = e^{-x}(A\sin(3x) + B\cos(3x)) - \frac{x}{6}e^{-x}\cos(3x)$.

Příklad 7.6 *Řešte diferenciální rovnici* $y' - \frac{2y}{x} = -x^2y^2$, $y(1) = 1$.

Výsledek: $y = \frac{5x^2}{x^5 + 4}$.

Příklad 7.7 *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 2y' + 10y = e^x \sin(3x)$.

Výsledek: $y = e^x\left(A\sin(3x) + B\cos(3x) - \frac{x}{6}\cos(3x)\right)$.

Příklad 7.8 *Řešte diferenciální rovnici* $y'\cos x + y\sin x = x\cos^2 x$, $y(0) = 1$.

Výsledek: $y = \frac{x^2\cos x}{2} + \cos x$.

Příklad 7.9 *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 2y' + 2y = e^x\cos(x)$.

Výsledek: $y = e^x\left(A\sin(x) + B\cos(x) + \frac{x}{2}\sin x\right)$.

Příklad 7.10 *Řešte diferenciální rovnici* $(2x - ye^{xy} - y^2xe^{xy})dx + (2y - xe^{xy} - x^2ye^{xy})dy = 0$, $y(0) = 1$.

Výsledek: $x^2 - xye^{xy} + y^2 = 1$.

Příklad 7.11 *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 6y' + 10y = \sin(2x)e^{2x}$.

Výsledek: $y = e^{3x}\left(A\sin(x) + B\cos(x)\right) + e^{2x}\left(\frac{1}{5}\cos 2x - \frac{1}{10}\sin 2x\right)$.

Příklad 7.12 *Řešte diferenciální rovnici* $y' + y = e^{-x}xy$, $y(0) = e$.

Výsledek: $y = e^{e^{-x}(-x-1)-x+2}$.

Příklad 7.13 *Řešte diferenciální rovnici* $y'' + 2y' + 10y = e^{-x}\cos(3x)$.

Výsledek: $y = e^{-x}\left(A\sin(3x) + B\cos(3x) + \frac{x}{6}\sin 3x\right)$.

Příklad 7.14 *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\cos(x)$.

Výsledek: $y = e^{2x}\left(A\sin(x) + B\cos(x) + \frac{x}{2}\sin x\right)$.

Příklad 7.15 *Řešte diferenciální rovnici* $y' = \frac{y^2 - xy + x^2}{x^2}$, $y(1) = 2$.

Výsledek: $y = x - \frac{x}{\ln x - 1}, \quad x \in (0, e)$.

Příklad 7.16 *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 4y' + 8y = \cos(2x)e^{-x}$.

Výsledek: $y = e^{2x}\left(A\sin(2x) + B\cos(2x)\right) + \frac{e^{-x}}{225}\left(-12\sin(2x) + 9\cos(2x)\right)$.

Příklad 7.17 *Řešte diferenciální rovnici* $y' + y = e^{-x}xy$, $y(0) = 1$.

Výsledek: $y = e^{-e^{-x}(x+1)-x+1}$.

Příklad 7.18 *Řešte diferenciální rovnici* $y'' + 4y' + 4y = \sin(x)e^{-2x}$.

Výsledek: $y = e^{-2x}\left(A + Bx - \sin x\right)$.

Příklad 7.19 *Řešte diferenciální rovnici* $y' + 5y = 4e^{-x}x$, $y(0) = 1$.

Výsledek: $y = e^{-x}\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{4}e^{-5x}$.

Příklad 7.20 *Řešte diferenciální rovnici* $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}\cos x$.

Výsledek: $y = e^{-x}\left(A + Bx - 2\cos x\right)$.

Příklad 7.21 *Řešte diferenciální rovnici* $y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2}$ *na intervalu* $(0, \infty)$.

Výsledek: $y = \frac{x + C}{x^2}$.

Příklad 7.22 *Řešte diferenciální rovnici* $y'' + y' - 2y = 2e^{-x}\sin x$.

Výsledek: $y = Ae^{x} + Be^{-2x} + \frac{e^{-x}}{5}\left(\cos x - 3\sin x\right)$.

Příklad 7.23 *Řešte diferenciální rovnici* $(x^2 - y^2)dx + (y^3 - 2xy)dy = 0$.

Výsledek: $\frac{x^3}{3} - xy^2 + \frac{y^4}{4} + C = 0$.

Příklad 7.24 *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 2y' + y = 6e^x \cos 2x$.

Výsledek: $y = Ae^x + Bxe^x - \dfrac{3e^x}{2}\cos 2x$.

Příklad 7.25 *Řešte diferenciální rovnici* $y' - 2y = y^2 + 1$, $y(2) = 0$.

Výsledek: $y = \dfrac{1}{3-x} - 1, \quad x \in (-\infty, 3)$.

Příklad 7.26 *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 4y' + 5y = 2\sin(-x)e^{2x}$.

Výsledek: $y = e^{2x}\left(A\sin x + (B+x)\cos x\right)$.

Příklad 7.27 *Řešte diferenciální rovnici* $y' - y = e^{-x}xy$, $y(0) = 1$.

Výsledek: $y = e^{x - xe^{-x} - e^{-x} + 1}$.

Příklad 7.28 *Řešte diferenciální rovnici* $y' + 2y = y^2 + 1$, $y(2) = 0$.

Výsledek: $y = 1 - \dfrac{1}{x-1}, \quad x \in (1, \infty)$.

Příklad 7.29 *Řešte diferenciální rovnici* $y'' + 4y' + 4y = \sin(2x)e^{-2x}$.

Výsledek: $y = e^{-2x}\left(A + Bx - \dfrac{\sin 2x}{4}\right)$.

Příklad 7.30 *Řešte diferenciální rovnici* $y' - 2y = e^{-x}xy$, $y(0) = 1$.

Výsledek: $y = e^{2x - xe^{-x} - e^{-x} + 1}$.

Příklad 7.31 *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 4y' + 4y = \cos(x)e^{-2x}$.

Výsledek: $y = e^{2x}(A + Bx) + \dfrac{e^{-2x}}{289}\left(15\cos x - 8\sin x\right)$.

Příklad 7.32 *Řešte diferenciální rovnici* $y' + 3y = 4e^{-x}x$, $y(0) = 1$.

Výsledek: $y = (2x-1)e^{-x} + 2e^{-3x}$.

Příklad 7.33 *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 4y' + 8y = \sin(2x)e^{-2x}$.

Výsledek: $y = (A\sin(2x) + B\cos(2x))e^{2x} + (\sin(2x) + \cos(2x))\dfrac{e^{-2x}}{32}$.

Příklad 7.34 *Řešte diferenciální rovnici* $y' + 2xy = -2x$, $y(0) = 1$.

Výsledek: $y = 2e^{-x^2} - 1$.

Příklad 7.35 *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 4y' + 5y = \cos(x)e^{-2x}$.

Výsledek: $y = (A\sin(x) + B\cos(x))e^{2x} + (2\cos(x) - \sin(x))\dfrac{e^{-2x}}{40}$.

Příklad 7.36 *Řešte diferenciální rovnici* $\dfrac{y'}{3} + 2xy = -2xy^2$, $y(0) = 1$.

Výsledek: $y = \dfrac{1}{2e^{3x^2} - 1}$.

Příklad 7.37 *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 6y' + 8y = \sin(x)e^{2x}$.

Výsledek: $y = Ae^{2x} + Be^{4x} + (2\cos(x) - \sin(x))\,\dfrac{e^{2x}}{5}$.

Příklad 7.38 *Řešte diferenciální rovnici* $y' + y = y^2$, $y(2) = 1$.

Výsledek: $y = 1$.

Příklad 7.39 *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 6y' + 10y = \cos(2x)e^{2x}$.

Výsledek: $y = e^{3x}\,(A\sin(x) + B\cos(x)) - (\cos(2x) + 2\sin(2x))\dfrac{e^{2x}}{10}$.

Příklad 7.40 *Řešte diferenciální rovnici* $y' - 3x^2y = xe^{x^3}$, $y(0) = 5$.

Výsledek: $y = e^{x^3}\left(\dfrac{x^2}{2} + 5\right)$.

8 Integrály

Příklad 8.1 *Integrujte funkci* $f(x,y) = 5 + 2x + 2y + 8xy + \dfrac{1}{(5-2y-x)^2}$ *přes oblast určenou podmínkou* $|x| + |y| \leq 1$. $\left(10 + \dfrac{2}{3}\ln\left(\dfrac{8}{7}\right)\right)$

Příklad 8.2 *Integrujte funkci* $f(x,y) = 5 + 2x + 12xy + \dfrac{1}{(10-2y-2x)^2}$ *přes oblast určenou podmínkou* $|x-1| + |y-1| \leq 1$. $\left(38 + \dfrac{1}{16}\right)$

Příklad 8.3 *Integrujte funkci* $f(x,y) = \sin(2x+1) + \dfrac{18}{(8-3y-2x)^3}$ *přes oblast tvořenou trojúhelníkem s vrcholy* $[1,1]$, $[0,-1]$ *a* $[-1,0]$. $\left(\dfrac{9}{8}\sin 1 - \dfrac{3}{8}\sin 3 + \dfrac{9}{110}\right)$

Příklad 8.4 *Integrujte funkci* $f(x,y) = \cos(2x) + \dfrac{36}{(10-2y-3x)^3}$ *přes oblast tvořenou trojúhelníkem s vrcholy* $[-1,-1]$, $[0,1]$ *a* $[1,0]$. $\left(\dfrac{57}{70} - \dfrac{3}{4}\cos 2\right)$

Příklad 8.5 *Spočtěte* $\int_I 4xy\,dx\,dy$, *kde* $I = \{[x,y];\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4;\ y \geq 0;\ x \geq 0\}$. $\left(\dfrac{15}{2}\right)$

Příklad 8.6 *Integrujte funkci* $f(x,y) = y + \dfrac{1}{(5-2x+2y)^4}$ *přes oblast tvořenou trojúhelníkem s vrcholy* $[0,0]$, $[-1,-1]$, $[2,0]$. $\left(-\dfrac{118}{375}\right)$

Příklad 8.7 *Integrujte funkci* $f(x,y) = \dfrac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ *přes oblast určenou vztahem* $1 \leq x^2+y^2 \leq e$. $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

Příklad 8.8 *Integrujte funkci* $f(x,y) = \sqrt[3]{y+2} + \dfrac{1}{(2x-2y+1)^2}$ *přes oblast tvořenou trojúhelníkem s vrcholy* $[0,0]$, $[-1,-1]$, $[1,-1]$. $\left(-1 - \dfrac{\ln 5}{8} + \dfrac{9}{14}\left(2^{7/3}-1\right)\right)$

Příklad 8.9 *Integrujte funkci* $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x^2+y^2}$ *na množině* $x^2+y^2 \leq 1$. (π)

Příklad 8.10 *Integrujte funkci* xy *přes oblast ohraničenou nerovnicí* $4x^2+y^2 \leq 4$. (0)

Příklad 8.11 *Integrujte funkci* $f(x,y) = x+y+\dfrac{1}{(1+x+y)^3}$ *přes oblast tvořenou trojúhelníkem s vrcholy* $[0,0]$, $[1,-1]$, $[2,0]$. (1)

Příklad 8.12 *Integrujte funkci* $f(x,y) = xy - y + \sin(2y)$ *přes oblast tvořenou funkcemi* $x = y^2$ *a* $x = -3y-2$. $\left(-\dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{4}(\sin 4 + \cos 4 - \cos 2 + \sin 2)\right)$

Příklad 8.13 *Integrujte funkci* $f(x,y) = (x^2+4y^2)e^{x^2+4y^2}$ *na množině* $x^2+4y^2 \leq 1$. $\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Příklad 8.14 *Integrujte funkci* $f(x,y) = x^2\sqrt{1+y} + \cos(y)$ *přes oblast tvořenou trojúhelníkem s vrcholy* $[0,0]$, $[1,2]$, $[2,1]$. $\left(-\frac{37}{30} - \frac{3}{2}\cos 2 + 3\cos 1 - \frac{1088}{105}\sqrt{2} + \frac{342}{35}\sqrt{3}\right)$

Příklad 8.15 *Integrujte funkci* $f(x,y) = x + \frac{1}{(10-3x+2y)^3}$ *přes oblast tvořenou trojúhelníkem s vrcholy* $[0,0]$, $[-1,3]$, $[-4,0]$. $\left(-10 + \frac{3}{2090}\right)$

Příklad 8.16 *Integrujte funkci* $f(x,y) = y + \frac{1}{(1-6x+2y)^3}$ *přes oblast tvořenou trojúhelníkem s vrcholy* $[0,0]$, $[-1,-3]$, $[-4,0]$. $\left(-\frac{144}{25}\right)$

Příklad 8.17 *Integrujte funkci* $f(x,y) = x + \frac{1}{(1+x+y)^4}$ *přes oblast tvořenou trojúhelníkem s vrcholy* $[0,0]$, $[-1,-1]$, $[-2,0]$.
Výsledek: *Funkce není na zadané oblasti spojitá, takže výsledek závisí na pořadí integrace. Pokud integrujeme nejprve podle proměnné* x *dostaneme* $-\frac{10}{3}$.

Příklad 8.18 *Integrujte funkci* $f(x,y) = y + \frac{1}{(3+2x+2y)^4}$ *přes oblast tvořenou trojúhelníkem s vrcholy* $[0,0]$, $[1,1]$, $[2,0]$.

$$1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{7^3 \cdot 6} - \frac{1}{2^4 \cdot 7^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^4 \cdot 3^3}.$$