Matematika 2 - příklady k procvičení

Václav Finěk (KMD FP TUL)

1 Nekonečné řady

Příklad 1.1. *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n 2^{(1-n)} n^{-1}$. $[0,4)$

Příklad 1.2. *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty}(x-9)^n 3^{(2-2n)} n$. $(0,18)$

Příklad 1.3. *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty}(x-8)^n 4^{(2-n)} n^{-2}$. $[4,12]$

Příklad 1.4. *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n 4^{(1-n)}}{n}$. $[-6,2)$

Příklad 1.5. *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (x-2)^{(2n-1)} 2^{(1-n)}}{2n-1}$. $\left[2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right]$

Příklad 1.6. *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n 2^{(1-2n)}(n+1)^2$. $(-2,6)$

Příklad 1.7. *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{(n-1)} 2^{(1-2n)}}{2n-1}$. $[0,8)$

Příklad 1.8. *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{(2n-1)}}{(n+1)(-2)^{(1-2n)}}$. $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

Příklad 1.9. *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n 2^{(1-n)}}{n^2}$. $[0,4]$

Příklad 1.10. *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n+1)^2 (x-1)^n}{4^{(1-2n)}}$. $\left(\frac{15}{16}, \frac{17}{16}\right)$

Příklad 1.11. *Určete obor konvergence řady* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(x+7)^n 4^{-n}$. $[-11,-3)$

Příklad 1.12. *Určete obor konvergence řady* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(x-11)^n 2^{-n}$. $(9, 13)$

Příklad 1.13. *Určete obor konvergence řady* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+2)^2\, 2^{(2-n)}}$. $\left[-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right]$

Příklad 1.14. *Určete obor konvergence řady* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x+2)^n 2^{(1-2n)} n^2$. $(-6, 2)$

Příklad 1.15. *Určete obor konvergence řady* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2 2^{(1-n)}}$. $\left[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right]$

Příklad 1.16. *Určete obor konvergence řady* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 (x-1)^n}{2^{(3-2n)}}$. $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$

Příklad 1.17. *Určete obor konvergence řady* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(3n-2) 2^{(1-4n)}}$. $\left[\frac{-33}{16}, \frac{-31}{16}\right)$

Příklad 1.18. *Určete obor konvergence řady* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n+1) 2^{(-1-3n)}}$. $\left[\frac{15}{8}, \frac{17}{8}\right)$

Příklad 1.19. *Určete obor konvergence řady* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{(n+1)^2\, 2^{(n-2)}}$. $[-6, -2]$

Příklad 1.20. *Určete obor konvergence řady* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)^{-2}\, 2^{(1-2n)}}$. $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$

2 Limity

Příklad 2.1. *Spočtěte limitu:* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{4x-y+5}{(1+2x+y)^2}.$ *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.2. *Spočtěte limitu:* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{4x-y-3}{(1+2x-3y)^2}.$ *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.3. *Spočtěte limitu:* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}.$ $\left(\frac{3}{2}\right)$

Příklad 2.4. *Spočtěte limitu:* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2x+y-3}{(1+x-2y)^2}.$ *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.5. *Spočtěte limitu:* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}.$ (2)

Příklad 2.6. *Spočtěte limitu:* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{y^3+x^3}{x^2+y^2-2}.$ *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.7. *Spočtěte limitu:* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{2x+y+1}{(3+x-2y)^2}.$ *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.8. *Spočtěte limitu:* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{-1}{|3+x-2y|}.$ $(-\infty)$

Příklad 2.9. *Spočtěte limitu:* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{2x-y-3}{1+x+2y}.$ *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.10. *Spočtěte limitu:* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,-1)} \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2-2}.$ *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.11. *Spočtěte limitu:* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{2x-y-1}{x+y-5}.$ *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.12. *Spočtěte limitu:* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x^2+2xy+x+2y}{2y^2+xy-2y-x}.$ $\left(-\frac{3}{2}\right)$

Příklad 2.13. *Spočtěte limitu:* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x^2+xy+x+y}{y^2+xy-y-x}.$ *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.14. *Spočtěte limitu:* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2x-y-1}{x+2y-3}.$ *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.15. *Spočtěte limitu:* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{4x-y+5}{1+2x+y}.$ *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.16. *Spočtěte limitu:* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2-y^2}{2x^2+y^2-3}.$ *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.17. *Spočtěte limitu:* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2 - 2}$. *(Limita neexistuje)*

Příklad 2.18. *Spočtěte limitu:* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,-1)} \frac{y^3 - x^3}{x^2 - y^2}$. $\left(\dfrac{3}{2}\right)$

Příklad 2.19. *Spočtěte limitu:* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{y^3 + x^3}{x^2 - y^2}$. $\left(\dfrac{3}{2}\right)$

Příklad 2.20. *Spočtěte limitu:* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{y^3 + x^3}{x^2 + y^2 - 2}$. *(Limita neexistuje)*

3 Taylorův rozvoj

Příklad 3.1. *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[0,1]$ *pro funkci* $f(x,y) = e^{xy+x} + \operatorname{arccotg}(2x) + \dfrac{\sin(xy)}{y}$. $\left(1 + \dfrac{\pi}{2} + x + \dfrac{1}{2}\left(4x^2 + 2x(y-1)\right)\right)$

Příklad 3.2. *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[1,0]$ *pro funkci* $f(x,y) = 2^{xy-y} + \operatorname{arctg}(2y) + \dfrac{\operatorname{tg}(xy)}{x}$. $(1 + 3y + \ln(2)y(x-1))$

Příklad 3.3. *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[1,0]$ *pro funkci* $f(x,y) = \log_2(x - xy) + \operatorname{arctg}(x - 2y - 1) + y \operatorname{cotg}\left(\dfrac{y}{x} - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$\left((1 + (\ln 2)^{-1})(x-1) - (2 + (\ln 2)^{-1})y - (\ln 2)^{-1}\frac{(x-1)^2}{2} + ((\ln 2)^{-1} - 1)\frac{y^2}{2}\right)$$

Příklad 3.4. *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[0,1]$ *pro funkci* $f(x,y) = 4^{x^2y} + \operatorname{arctg}(2x) + \dfrac{x}{2y}$. $\left(1 + \dfrac{5x}{2} + (\ln 4)x^2 - \dfrac{x(y-1)}{2}\right)$

Příklad 3.5. *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[0,1]$ *pro funkci* $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{y+x}{y-x}\right) + \arcsin(3x) + \dfrac{\sin x}{y}$. $(6x - 3x(y-1))$

Příklad 3.6. *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[0,1]$ *pro funkci* $f(x,y) = 2^{\sin(xy)} + y\arcsin(2x) + \dfrac{x}{2y}$.

$$\left(1 + \left(\frac{5}{2} + \ln 2\right)x + \left(\frac{\ln^2 2}{2}\right)x^2 + \left(\frac{3}{2} + \ln 2\right)x(y-1)\right)$$

Příklad 3.7. *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[0,1]$ *pro funkci* $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{y-x}{y+x}\right) + 2^{\sin(x^2y)} + y\arcsin(2x)$. $\left(1 + \ln(2)x^2 + 4x(y-1)\right)$

Příklad 3.8. *Určete Taylorův polynom prvého stupně se středem v bodě* $[1,1,0]$ *pro funkci* $f(x,y,z) = (x - yz)^{xy} + e^{x^2+y^2-2} + z\arcsin(2xy - 2)$. $(2 + 3(x-1) + 2(y-1) - z)$

Příklad 3.9. *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[2,0]$ *pro funkci* $f(x,y) = e^{x^2y} + \operatorname{arctg}(2y) + \dfrac{y}{2x}$. $\left(1 + \dfrac{25}{4}y + 8y^2 + \dfrac{31}{8}(x-2)y\right)$

Příklad 3.10. *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[1,1]$ *pro funkci* $f(x,y) = e^{xy-1} + \ln(x^2 + y^2 - 1) + \dfrac{\cos y}{x}$.

$$\left(1 + \cos 1 + (3 - \cos 1)(x-1) + (3 - \sin 1)(y-1) + \frac{(x-1)^2}{2}(-1 + 2\cos 1)\right.$$
$$\left. + (-3 + \sin 1)(y-1)(x-1) + \frac{(y-1)^2}{2}(-1 - \cos 1)\right)$$

Příklad 3.11. *Určete Taylorův polynom třetího stupně se středem v bodě* $[0,0]$ *pro funkci* $f(x,y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

$$\left(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\right)$$

Příklad 3.12. *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[1,-1]$ *pro funkci* $f(x,y) = x^2 + x^2y - e^{yx} - \ln x$.

$$\Bigg(-e^{-1} + \left(e^{-1} - 1\right)(x-1) + \left(1 - e^{-1}\right)(y+1) + \frac{(x-1)^2}{2}\left(1 - e^{-1}\right)$$
$$+2(y+1)(x-1) - e^{-1}\frac{(y+1)^2}{2}\Bigg)$$

Příklad 3.13. *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[-1,1]$ *pro funkci* $f(x,y) = x^2 + xy^2 - e^{-yx} - \ln y$.

$$\Bigg(-e + (e-1)(x+1) + (-3-e)(y-1) + \frac{(x+1)^2}{2}(2-e)$$
$$+(2+2e)(y-1)(x+1) + (-1-e)\frac{(y-1)^2}{2}\Bigg)$$

Příklad 3.14. *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[0,2]$ *pro funkci* $f(x,y) = e^{xy^2} + \operatorname{arctg}(-2x) + \frac{3x}{2y}$.

$$\left(1 + \frac{11}{4}x + 8x^2 + \left(20 - \frac{3}{8}\right)(y-2)x\right)$$

Příklad 3.15. *Určete Taylorův polynom třetího stupně se středem v bodě* $[1,0]$ *pro funkci* $f(x,y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

$$\big(1 + 3(x-1) + 3y + 3(x-1)^2 + 3y^2 + 6(x-1)y +$$
$$(x-1)^3 + y^3 + 3(x-1)y^2 + 3(x-1)^2y\big)$$

Příklad 3.16. *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[0,1]$ *pro funkci* $f(x,y) = e^{\sin(xy)} + \operatorname{arctg}(2x) + \frac{x}{y}$.

$$\left(1 + 4x + \frac{x^2}{2}\right)$$

Příklad 3.17. *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[1,1]$ *pro funkci* $f(x,y) = e^{\cos(xy-1)-1} + (y-1)^5\operatorname{arccotg}(2x) + \frac{y}{x}$.

$$\left(2 - (x-1) + (y-1) + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(y-1)^2}{2} - 2(x-1)(y-1)\right)$$

Příklad 3.18. *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[-1,0]$ *pro funkci* $f(x,y) = e^{\sin(xy)+x+1} + (x+1)^5\operatorname{arctg}(2y) + \frac{2y}{x}$.

$$\left(1 + (x+1) - 3y + \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{y^2}{2} - 2y(x+1)\right)$$

Příklad 3.19. *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[0,-1]$ *pro funkci* $f(x,y) = 2^{\sin(xy)} + x^2 \arcsin(2y+2) + \dfrac{x}{2y}$.

$$\left(1 + \left(-\ln 2 - \frac{1}{2}\right) x + (\ln 2)^2 \frac{x^2}{2} + \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) x(y+1)\right)$$

Příklad 3.20. *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[1,0]$ *pro funkci* $f(x,y) = 4^{\sin(xy)} + y \arcsin(2y) + \dfrac{y}{5x}$.

$$\left(1 + \left(\ln 4 + \frac{1}{5}\right) y + \left((\ln 4)^2 + 4\right) \frac{y^2}{2} + \left(\ln 4 - \frac{1}{5}\right) y(x-1)\right)$$

Příklad 3.21. *Určete Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě* $[0,1]$ *pro funkci* $f(x,y) = 8^{\sin(xy)} + y \arcsin(4x) + \dfrac{x}{4y}$.

$$\left(1 + \left(\ln 8 + \frac{17}{4}\right) x + (\ln 8)^2 \frac{x^2}{2} + \left(\ln 8 + \frac{15}{4}\right) x(y-1)\right)$$

4 Implicitní funkce

Příklad 4.1. *Vyšetřete lokální extrémy funkce* $y(x)$ *pro křivku určenou implicitně rovnicí* $F(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 = 0$.

Výsledek:

$$\textit{Minimum: } [0,1], \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right], \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right].$$

$$\textit{Maximum: } [0,-1], \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right], \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right].$$

Příklad 4.2. *Vyšetřete lokální extrémy funkce* $y(x)$ *pro křivku určenou implicitně rovnicí* $F(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 = 0$.

Výsledek:

$$\textit{Minimum: } [0,\sqrt{2}], \left[1, -\sqrt{1+\sqrt{2}}\right], \left[-1, -\sqrt{1+\sqrt{2}}\right].$$

$$\textit{Maximum: } [0,-\sqrt{2}], \left[1, \sqrt{1+\sqrt{2}}\right], \left[-1, \sqrt{1+\sqrt{2}}\right].$$

Příklad 4.3. *Vyšetřete lokální extrémy funkce* $y(x)$ *pro křivku určenou implicitně rovnicí* $F(x,y) = (y^2 + x^2)^2 + 2y^2 - 2x^2 = 0$.

Výsledek:

$$\textit{Minimum: } \left[-\sqrt{\frac{3}{4}}, -\frac{1}{2}\right], \left[\sqrt{\frac{3}{4}}, -\frac{1}{2}\right].$$

$$\textit{Maximum: } \left[-\sqrt{\frac{3}{4}}, \frac{1}{2}\right], \left[\sqrt{\frac{3}{4}}, \frac{1}{2}\right].$$

Příklad 4.4. *Ke křivce implicitně určené rovnicí* $F(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 - e^{2x-2y} - 3 = 0$ *napište rovnici tečny v bodě* $[1,1]$ *a dále určete, zda-li tato křivka leží v okolí bodu* $[1,1]$ *nad tečnou nebo pod tečnou.*

Výsledek: $y = \dfrac{-1}{3}(x-1) + 1$. *Křivka leží v okolí bodu* $[1,1]$ *nad tečnou.*

Příklad 4.5. *Vyšetřete lokální extrémy funkce y(x) pro křivku určenou implicitně rovnicí* $F(x,y) = y^2 + x^2 - 2yx - 2x - 4y = 0$.

Výsledek: *Minimum:* $\left[\dfrac{5}{6}, -\dfrac{1}{6}\right]$.

Příklad 4.6. *Vyšetřete lokální extrémy funkce y(x) pro křivku určenou implicitně rovnicí* $F(x,y) = 2y^2 + x^2 - 2yx - 5 - 4y = 0$.

Výsledek: *Minimum:* $[-1,-1]$ *a maximum:* $[5,5]$.

Příklad 4.7. *Vyšetřete lokální extrémy funkce $y(x)$ pro křivku určenou implicitně rovnicí $F(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^2 - 1 = 0$.*

Výsledek:

Minimum: $[0,1]$, $\left[1, -\sqrt{2}\right]$, $\left[-1, -\sqrt{2}\right]$.

Maximum: $[0,-1]$, $\left[1, \sqrt{2}\right]$, $\left[-1, \sqrt{2}\right]$.

Příklad 4.8. *Ke křivce implicitně určené rovnicí $F(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 - e^{2x+2y} + 1 = 0$ napište rovnici tečny v bodě $[-1,1]$ a dále určete, zda-li tato křivka leží v okolí bodu $[-1,1]$ nad tečnou nebo pod tečnou.*

Výsledek: $y = -x$. *Křivka leží v okolí bodu $[-1,1]$ na tečně.*

Příklad 4.9. *Ke křivce implicitně určené rovnicí $F(x,y) = x^4 + 2xy + y^4 - 4 = 0$ napište rovnici tečny v bodě $[1,1]$ a dále určete, zda-li tato křivka leží v okolí bodu $[1,1]$ nad tečnou nebo pod tečnou.*

Výsledek: $y = -x + 2$. *Křivka leží v okolí bodu $[1,1]$ pod tečnou.*

Příklad 4.10. *Najděte lokální extrémy implicitně zadané funkce $y(x)$, která je řešením rovnice $F(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2xy + 2y - 6 = 0$.*

Výsledek: *Minimum:* $[3,-6]$ *a maximum:* $[-1,2]$.

Příklad 4.11. *Najděte lokální extrémy implicitně zadané funkce $y(x)$, která je řešením rovnice $F(x,y) = x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0$.*

Výsledek: *Minimum:* $\left[-3, -1 - \sqrt{10}\right]$ *a maximum:* $\left[-3, -1 + \sqrt{10}\right]$.

Příklad 4.12. *Najděte lokální extrémy implicitně zadané funkce $x(y)$, která je řešením rovnice $F(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$.*

Výsledek: *Minimum:* $\left[2 - \sqrt{5}, -1\right]$ *a maximum:* $\left[2 + \sqrt{5}, -1\right]$.

Příklad 4.13. *Ke křivce implicitně určené rovnicí $F(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - e^{2x-2y} + 1 = 0$ napište rovnici tečny v bodě $[1,1]$ a dále určete, zda-li tato křivka leží v okolí bodu $[1,1]$ nad tečnou nebo pod tečnou.*

Výsledek: $y = x$. *Křivka leží v okolí bodu $[1,1]$ na tečně.*

Příklad 4.14. *Ke křivce implicitně určené rovnicí $F(x,y) = x^4 + 2xy + y^4 - e^{2x+2y} + 1 = 0$ napište rovnici tečny v bodě $[1,-1]$ a dále určete, zda-li tato křivka leží v okolí bodu $[1,-1]$ nad tečnou nebo pod tečnou.*

Výsledek: $y = -1$. *Křivka leží v okolí bodu $[1,-1]$ nad tečnou.*

Příklad 4.15. *Ke křivce implicitně určené rovnicí $F(x,y) = 2x^4 + 4xy + y^4 + e^{3x+3y} = 0$ napište rovnici tečny v bodě $[-1,1]$ a dále určete, zda-li tato křivka leží v okolí bodu $[-1,1]$ nad tečnou nebo pod tečnou.*

Výsledek: $y = \dfrac{(x+1)}{3} + 1$, $y''(-1) = -\dfrac{44}{3}$, *křivka tedy leží pod tečnou.*

Příklad 4.16. *Ke křivce implicitně určené rovnicí* $F(x,y) = x^4 - 3xy + y^4 + e^{3x-2y-1} = 0$ *napište rovnici tečny v bodě* $[1,1]$ *a dále určete, zda-li tato křivka leží v okolí bodu* $[1,1]$ *nad tečnou nebo pod tečnou.*

Výsledek: $y = 4x - 3$, $y''(1) = 205$, *křivka tedy leží nad tečnou.*

Příklad 4.17. *Ke křivce implicitně určené rovnicí* $F(x,y) = 2x^4 - 5xy + 2y^4 + e^{3x-2y-1} = 0$ *napište rovnici tečny v bodě* $[1,1]$ *a dále určete, zda-li tato křivka leží v okolí bodu* $[1,1]$ *nad tečnou nebo pod tečnou.*

Výsledek: $y = -6x + 7$, $y''(1) = -1173$, *křivka tedy leží pod tečnou.*

Příklad 4.18. *Ke křivce implicitně určené rovnicí* $F(x,y) = 2x^2 - 5xy + 2y^2 + e^{x-y-2} = 10$ *napište rovnici tečny v bodě* $[1,-1]$ *a dále určete, zda-li tato křivka leží v okolí bodu* $[1,-1]$ *nad tečnou nebo pod tečnou.*

Výsledek: $y = x - 2$, $y''(1) = -\dfrac{1}{5}$, *křivka tedy leží pod tečnou.*

5 Aplikace parciálních derivací

Příklad 5.1. *Napište rovnici tečné roviny v bodě* $[-1,-1,0]$ *k ploše určené rovnicí* $F(x,y,z) = \arcsin(x^2-y^2-z^2)+x^2z+y^2+\sqrt[3]{2z+1}+xyz-2=0.$ $\left(-2(x+1)+\frac{8}{3}z=0\right)$

Příklad 5.2. *Nechť* $f(x,y)=(2x-6y)^{4x}+\ln(-xy)$ *a* $u=(-1,2)$. *Vypočítejte směrovou derivaci* $\frac{\partial f}{\partial u}(1,-1)$. $\left(-\frac{8^4(1+4\ln 8)+1}{\sqrt{5}}+2\frac{-24(8^3)-1}{\sqrt{5}}\right)$

Příklad 5.3. *Nechť* $f(x,y)=(y-3x)^{2x+1}+\arcsin(xy)$ *a* $u=(1,1)$. *Vypočítejte směrovou derivaci* $\frac{\partial f}{\partial u}(0,1)$. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Příklad 5.4. *Pomocí transformace do nových nezávisle proměnných* $u=2x+3y$ *a* $v=2x-3y$ *zjednodušte vlnovou rovnici* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{4}{9}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$. *Předpokládejte, že funkce* f *má všechny derivace druhého řádu spojité.* $\left(8\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v)+8\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v)=0\right)$

Příklad 5.5. *Do výrazu* $(1+x^2)^2y''(x)+2x(1+x^2)y'(x)+y(x)=0$ *zaveďte novou nezávislou proměnnou* t *vztahem* $x=\operatorname{tg} t$, $t\in\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. *Předpokládejte, že funkce* y *má spojitou druhou derivaci.* $(y''(t)+y(t)=0)$

Příklad 5.6. *Výraz* $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$ *transformujte do nových nezávisle proměnných* $u=\frac{x}{y}$, $v=y$. *Předpokládejte, že funkce* f *má spojité parciální derivace.* $\left(v\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)=0\right)$

Příklad 5.7. *Pomocí transformace do nových nezávisle proměnných* $u=2x+y$ *a* $v=2x-y$ *zjednodušte vlnovou rovnici* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$. *Předpokládejte, že funkce* f *má všechny derivace druhého řádu spojité.* $\left(8\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v)+8\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v)=0\right)$

Příklad 5.8. *Napište rovnici tečné roviny v bodě* $[1,1,0]$ *k ploše určené rovnicí* $F(x,y,z)=\arcsin(x^4-y^2+z^4)+\sqrt[5]{(x^2y^2-1)^6}+xyz=0.$ $(4(x-1)-2(y-1)+z=0)$

Příklad 5.9. *Dokažte, že funkce* $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ *vyhovuje rovnici* $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial z}=0$

Příklad 5.10. *Dokažte, že funkce* $f(x,y)=\frac{1}{y-cx}$ *vyhovuje rovnici* $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}-c^2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}=0$

Příklad 5.11. *Napište rovnici tečné roviny v bodě* $[-1, 0, 1]$ *k ploše určené rovnicí* $F(x, y, z) = \operatorname{arctg}(-x^2 + y^2 + z^2) + \sqrt[5]{xz^3}y = 0.$ $(2(x+1) - y + 2(z-1) = 0)$

Příklad 5.12. *Pomocí transformace do nových nezávisle proměnných* $u = x + 2y$ *a* $v = x - 2y$ *zjednodušte vlnovou rovnici* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$. *Předpokládejte, že funkce* f *má všechny derivace druhého řádu spojité.* $\left(2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u, v) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u, v) = 0\right)$

Příklad 5.13. *Napište rovnici tečné roviny v bodě* $[-1, -1, 0]$ *k ploše určené rovnicí* $F(x, y, z) = \arccos(-x^2 + y^2 - z^2) + x^2y - xy^2 + \sqrt{z+1} + xyz - 1 - \frac{\pi}{2} = 0.$

$$\left(-(x+1) + y + 1 + \frac{3}{2}z = 0\right)$$

Příklad 5.14. *Napište rovnici tečné roviny v bodě* $[1, -1, 0]$ *k ploše určené rovnicí* $F(x, y, z) = \arccos(-x^2 + y^2 - z^2) + \sqrt[5]{x^2y^4z^6} + z - \frac{\pi}{2} = 0.$

$$(2(x-1) + 2(y+1) + z = 0)$$

Příklad 5.15. *Napište rovnici tečné roviny v bodě* $[1, 1, 0]$ *k ploše určené rovnicí* $F(x, y, z) = \operatorname{arctg}(x^2 - y^2 - z^2) + \sqrt[3]{x^2y^4}z = 0.$

$$(2(x-1) - 2(y-1) + z = 0)$$

Příklad 5.16. *Napište rovnici tečné roviny v bodě* $[1, 0, -1]$ *k ploše určené rovnicí* $F(x, y, z) = \operatorname{arctg}(x^2 - y^2 - z^2) + \sqrt[4]{x^3z^2}y = 0.$

$$(2(x-1) + y + 2(z+1) = 0)$$

Příklad 5.17. *Napište rovnici tečné roviny v bodě* $[1, 1, 0]$ *k ploše určené rovnicí* $F(x, y, z) = \operatorname{arctg}(x^3 - y^2 - z^4) + \sqrt[3]{xy^2}z = 0.$

$$(3(x-1) - 2(y-1) + z = 0)$$

6 Extrémy funkcí více proměnných

Příklad 6.1. *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce* $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ *na množině* M *určené podmínkou* $|x| + |y| \leq 1$. *Dále ověřte, zda-li má funkce* f *lokální extrémy.*

Výsledek:
Absolutní minimum (i lokální): $[0, 0]$.
Absolutní maximum: $[0, -1], [0, 1], [-1, 0], [1, 0]$.

Příklad 6.2. *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce* $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2$ *na množině* M *určené podmínkou* $|x - 1| + |y - 1| \leq 1$. *Dále ověřte, zda-li má funkce* f *lokální extrémy.*

Výsledek:
Absolutní minimum: $\left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.
Absolutní maximum: $[0, 1], [1, 0]$.

Příklad 6.3. *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce* $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ *na množině* M *tvořené trojúhelníkem s vrcholy* $[1, 1]$, $[0, -1]$ *a* $[-1, 0]$. *Dále ověřte, zda-li má funkce* f *lokální extrémy.*

Výsledek:
Absolutní minimum: $[1, 1]\,, y = -1 - x$ *pro* $x \in [-1, 0]\,.$
Absolutní maximum: $\left[\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right], \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.
Lokální minimum: $[1, 1]$.

Příklad 6.4. *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce* $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$ *na množině* M *tvořené trojúhelníkem s vrcholy* $[-1, -1]$, $[0, 1]$ *a* $[1, 0]$. *Dále ověřte, zda-li má funkce* f *lokální extrémy.*

Výsledek:
Absolutní minimum: $\left[\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right], \left[\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.
Absolutní maximum: $[-1, -1]\,, y = 1 - x$ *pro* $x \in [0, 1]\,.$
Lokální maximum: $[-1, -1]$.

Příklad 6.5. *Najděte lokální extrémy funkce* $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 2yz + 2z - 6x + 35$.

Výsledek: *Lokální minimum:* $[8, 5, -2]$.

Příklad 6.6. *Najděte absolutní extrémy funkce* $f(x, y, z) = 1 + z + x + y^2$ *na množině* $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

Výsledek:
Absolutní minimum: $\left[-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}\right]$.
Absolutní maximum: $\left[\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{1}{2}\right]$.

Příklad 6.7. *Najděte lokální extrémy funkce* $f(x,y) = 2x^2 - 8xy + 4y^2 - 6x + 2y + 9$.

Výsledek: *Funkce nemá lokální extrémy.*

Příklad 6.8. *Najděte absolutní extrémy funkce* $f(x,y) = 1+x+y^2$ *na množině* $x^2+2y^2 \leq 4$.

Výsledek:
Absolutní minimum: $[-2,0]$.
Absolutní maximum: $\left[1, \sqrt{\frac{3}{2}}\right], \left[1, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$.

Příklad 6.9. *Najděte lokální extrémy funkce* $F(x,y,z) = -x^2 - 2y^2 - 3z^2 + 2xy - 2yz - 2z + 6x + 35$.

Výsledek: *Lokální maximum:* $[8,5,-2]$.

Příklad 6.10. *Najděte lokální extrémy:* $F(x,y,z) = 2y - 2z - y^2 - \frac{z^2}{2} + 3xz - x^3$.

Výsledek: *Lokální maximum:* $[2,1,4]$.

Příklad 6.11. *Najděte absolutní extrémy:* $f(x,y) = 1+x+y$ *na množině* $x^2+2x+y^2 \leq 0$.

Výsledek:
Absolutní minimum: $\left[-1 - \sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right]$ *a absolutní maximum:* $\left[-1 + \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$.

Příklad 6.12. *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce* $f(x,y) = x^2 + y^4$ *na množině* M *dané podmínkami* $x \geq -1 - y^2, -2 \leq y \leq 2, x \leq 1$. *Dále ověřte, zda-li má funkce* $f(x,y) = x^2 + y^4$ *lokální extrémy.*

Výsledek:
Absolutní (i lokální) minimum: $[0,0]$.
Absolutní maximum: $[-5,2]$, $[-5,-2]$.

Příklad 6.13. *Najděte lokální extrémy funkce* $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$.

Výsledek: *Lokální maximum:* $[-1,-1]$.

Příklad 6.14. *Najděte absolutní extrémy funkce* $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 2$ *na množině* $x^2 + y^2 \leq 5$. *Dále ověřte, zda-li má tato funkce lokální extrémy.*

Výsledek: *Absolutní (i lokální) minimum:* $[1,0]$. *a absolutní maximum:* $\left[-\sqrt{5}, 0\right]$.

Příklad 6.15. *Najděte lokální extrémy funkce* $f(x,y) = x^2 - 2xy - y^2 - 4x + 9$.

Výsledek: *Nemá lokální extrémy.*

Příklad 6.16. *Najděte absolutní extrémy funkce* $f(x, y) = x^2 - 2xy - y^2 - 4x + 9$ *na úsečce procházející body* $[0, -5]$, $[2, 3]$.

Výsledek:
Absolutní minimum: $[0, -5]$, $[2, 3]$.
Absolutní maximum: $[1, -1]$.

Příklad 6.17. *Najděte lokální extrémy funkce* $f(x, y) = x^2 - 2xy - y^2 - 6x + 2y + 9$.

Výsledek: *Nemá lokální extrémy.*

Příklad 6.18. *Najděte extrémy funkce* $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y$ *na kružnici* $x^2 + y^2 = 2$.

Výsledek: *Absolutní minimum:* $[1, -1]$ *a absolutní maximum:* $\left[\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right]$.

Příklad 6.19. *Najděte lokální extrémy funkce* $f(x, y) = x^2 - 10xy + 4y^2 - 6x + 2y + 9$.

Výsledek: *Nemá lokální extrémy.*

Příklad 6.20. *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce* $f(x, y) = x^2 - y^4$ *na množině* M *dané podmínkami* $x \geq -1 - y^2, -1 \leq y \leq 1, x \leq 1$.

Výsledek:
Absolutní minimum: $[0, 1]$, $[0, -1]$.
Absolutní maximum: $[-2, 1]$, $[-2, -1]$.

Příklad 6.21. *Najděte extrémy funkce* $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y$ *na kružnici* $x^2 + y^2 = 4$.

Výsledek:
Absolutní minimum: $[\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$.
Absolutní maximum: $\left[\frac{-1-\sqrt{7}}{2}, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right], \left[\frac{-1+\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right]$

Příklad 6.22. *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce* $f(x, y) = x^4 + y^2$ *na množině* M *dané podmínkami* $x \geq -y^2, -1 \leq y \leq 1, x \leq 1$. *Dále ověřte, zda-li má funkce* $f(x, y) = x^4 + y^2$ *v bodě* $[0, 0]$ *lokální extrém.*

Výsledek:
Absolutní minimum (i lokální): $[0, 0]$.
Absolutní maximum: $[-1, -1], [-1, 1], [1, -1], [1, 1]$.

Příklad 6.23. *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce* $f(x, y) = x^2 + y^4$ *na množině* M *dané podmínkami* $x^2 \leq 4 - y^2, -1 \leq x \leq 1$. *Dále ověřte, zda-li má funkce* $f(x, y) = x^2 + y^4$ *v bodě* $[0, 0]$ *lokální extrém.*

Výsledek:
Absolutní minimum (i lokální): $[0, 0]$.
Absolutní maximum: $[0, -2], [0, 2]$.

Příklad 6.24. *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce* $f(x,y) = x^2 - y^2$ *na množině* M *dané podmínkami* $x \geq -1 - y^2, x \leq 1 + y^2, -1 \leq y \leq 1$. *Dále ověřte, zda-li má funkce* $f(x,y) = x^2 - y^2$ *v bodě* $[0,0]$ *lokální extrém.*

Výsledek:

Absolutní minimum: $[0,1]$, $[0,-1]$.
Absolutní maximum: $[2,1]$, $[2,-1]$, $[-2,1]$, $[-2,-1]$.

Příklad 6.25. *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce* $f(x,y) = 2y^2 + x^2 - 3$ *na množině* M *dané podmínkami* $x \geq -1 - y^2, x \leq 1 - y^2, -2 \leq y \leq 2$. *Dále ověřte, zda-li má funkce* $f(x,y) = 2y^2 + x^2 - 3$ *v bodě* $[0,0]$ *lokální extrém.*

Výsledek:

Absolutní minimum (i lokální): $[0,0]$.
Absolutní maximum: $[-5,2]$, $[-5,-2]$.

Příklad 6.26. *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce* $f(x,y) = y^2 - 2xy + x^3 - 3$ *na množině* M *dané podmínkami* $y \geq -x^2, y \leq x^2, -1 \leq x \leq 1$. *Dále ověřte, zda-li má funkce* $f(x,y) = y^2 - 2xy + x^3 - 3$ *v podezřelých bodech lokální extrémy.*

Výsledek:

Absolutní minimum: $[-1,-1]$. *Absolutní maximum:* $[1,-1]$. *Lokální minimum:* $\left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

Příklad 6.27. *Určete nejmenší a největší hodnotu funkce* $f(x,y) = y^2 - x^2y + 3$ *na množině* M *dané podmínkami* $y \geq -1 - x^2, y \leq 1 + x^2, -1 \leq x \leq 1$. *Dále ověřte, zda-li má funkce* $f(x,y) = y^2 - x^2y + 3$ *v podezřelých bodech lokální extrémy.*

Výsledek:

Absolutní minimum: $\left[1, \frac{1}{2}\right]$, $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$.
Absolutní maximum: $[1,-2]$, $[-1,-2]$.

7 Diferenciální rovnice

Příklad 7.1. *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 2y' + 5y = \cos(x)$.

Výsledek: $y = e^x(A\sin(2x) + B\cos(2x)) + \dfrac{1}{5}\cos x - \dfrac{1}{10}\sin x$.

Příklad 7.2. *Řešte diferenciální rovnici* $xy' + y = 1 + \ln x$, $y(1) = 1$.

Výsledek: $y = \ln(x) + \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$.

Příklad 7.3. *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin(2x)$.

Výsledek: $y = e^x \left(A\sin(2x) + B\cos(2x) - \dfrac{x}{4}\cos 2x\right)$.

Příklad 7.4. *Řešte diferenciální rovnici* $y' - 2xy = x$, $y(0) = 2$.

Výsledek: $y = \dfrac{5e^{x^2} - 1}{2}$.

Příklad 7.5. *Řešte diferenciální rovnici* $y'' + 2y' + 10y = e^{-x}\sin(3x)$.

Výsledek: $y = e^{-x}(A\sin(3x) + B\cos(3x)) - \dfrac{x}{6}e^{-x}\cos(3x)$.

Příklad 7.6. *Řešte diferenciální rovnici* $y' - \dfrac{2y}{x} = -x^2y^2$, $y(1) = 1$.

Výsledek: $y = \dfrac{5x^2}{x^5 + 4}$.

Příklad 7.7. *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 2y' + 10y = e^x \sin(3x)$.

Výsledek: $y = e^x \left(A\sin(3x) + B\cos(3x) - \dfrac{x}{6}\cos(3x)\right)$.

Příklad 7.8. *Řešte diferenciální rovnici* $y'\cos x + y\sin x = x\cos^2 x$, $y(0) = 1$.

Výsledek: $y = \dfrac{x^2\cos x}{2} + \cos x$.

Příklad 7.9. *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 2y' + 2y = e^x\cos(x)$.

Výsledek: $y = e^x \left(A\sin(x) + B\cos(x) + \dfrac{x}{2}\sin x\right)$.

Příklad 7.10. *Řešte diferenciální rovnici* $(2x - ye^{xy} - y^2xe^{xy})dx + (2y - xe^{xy} - x^2ye^{xy})dy = 0$, $y(0) = 1$.

Výsledek: $x^2 - xye^{xy} + y^2 = 1$.

Příklad 7.11. *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 6y' + 10y = \sin(2x)e^{2x}$.

Výsledek: $y = e^{3x}(A\sin(x) + B\cos(x)) + e^{2x}\left(\dfrac{1}{5}\cos 2x - \dfrac{1}{10}\sin 2x\right)$.

Příklad 7.12. *Řešte diferenciální rovnici* $y' + y = e^{-x}xy$, $y(0) = e$.

Výsledek: $y = e^{e^{-x}(-x-1)-x+2}$.

Příklad 7.13. *Řešte diferenciální rovnici* $y'' + 2y' + 10y = e^{-x}\cos(3x)$.

Výsledek: $y = e^{-x}\left(A\sin(3x) + B\cos(3x) + \frac{x}{6}\sin 3x\right)$.

Příklad 7.14. *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\cos(x)$.

Výsledek: $y = e^{2x}\left(A\sin(x) + B\cos(x) + \frac{x}{2}\sin x\right)$.

Příklad 7.15. *Řešte diferenciální rovnici* $y' = \dfrac{y^2 - xy + x^2}{x^2}$, $y(1) = 2$.

Výsledek: $y = x - \dfrac{x}{\ln x - 1}, \quad x \in (0, e)$.

Příklad 7.16. *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 4y' + 8y = \cos(2x)e^{-x}$.

Výsledek: $y = e^{2x}\left(A\sin(2x) + B\cos(2x)\right) + \dfrac{e^{-x}}{225}\left(-12\sin(2x) + 9\cos(2x)\right)$.

Příklad 7.17. *Řešte diferenciální rovnici* $y' + y = e^{-x}xy$, $y(0) = 1$.

Výsledek: $y = e^{-e^{-x}(x+1)-x+1}$.

Příklad 7.18. *Řešte diferenciální rovnici* $y'' + 4y' + 4y = \sin(x)e^{-2x}$.

Výsledek: $y = e^{-2x}\left(A + Bx - \sin x\right)$.

Příklad 7.19. *Řešte diferenciální rovnici* $y' + 5y = 4e^{-x}x$, $y(0) = 1$.

Výsledek: $y = e^{-x}\left(x - \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{5}{4}e^{-5x}$.

Příklad 7.20. *Řešte diferenciální rovnici* $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}\cos x$.

Výsledek: $y = e^{-x}\left(A + Bx - 2\cos x\right)$.

Příklad 7.21. *Řešte diferenciální rovnici* $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{1}{x^2}$ *na intervalu* $(0, \infty)$.

Výsledek: $y = \dfrac{x + C}{x^2}$.

Příklad 7.22. *Řešte diferenciální rovnici* $y'' + y' - 2y = 2e^{-x}\sin x$.

Výsledek: $y = Ae^{x} + Be^{-2x} + \dfrac{e^{-x}}{5}\left(\cos x - 3\sin x\right)$.

Příklad 7.23. *Řešte diferenciální rovnici* $(x^2 - y^2)dx + (y^3 - 2xy)dy = 0$.

Výsledek: $\dfrac{x^3}{3} - xy^2 + \dfrac{y^4}{4} + C = 0$.

Příklad 7.24. *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 2y' + y = 6e^x \cos 2x$.

Výsledek: $y = Ae^x + Bxe^x - \dfrac{3e^x}{2} \cos 2x$.

Příklad 7.25. *Řešte diferenciální rovnici* $y' - 2y = y^2 + 1,\ y(2) = 0$.

Výsledek: $y = \dfrac{1}{3-x} - 1, \quad x \in (-\infty, 3)$.

Příklad 7.26. *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 4y' + 5y = 2\sin(-x)e^{2x}$.

Výsledek: $y = e^{2x}\left(A \sin x + (B - x)\cos x\right)$.

Příklad 7.27. *Řešte diferenciální rovnici* $y' - y = e^{-x}xy,\ y(0) = 1$.

Výsledek: $y = e^{x - xe^{-x} - e^{-x} + 2}$.

Příklad 7.28. *Řešte diferenciální rovnici* $y' + 2y = y^2 + 1,\ y(2) = 0$.

Výsledek: $y = 1 - \dfrac{1}{x-1}, \quad x \in (1, \infty)$.

Příklad 7.29. *Řešte diferenciální rovnici* $y'' + 4y' + 4y = \sin(2x)e^{-2x}$.

Výsledek: $y = e^{-2x}\left(A + Bx - \dfrac{\sin 2x}{4}\right)$.

Příklad 7.30. *Řešte diferenciální rovnici* $y' - 2y = e^{-x}xy,\ y(0) = 1$.

Výsledek: $y = e^{2x - xe^{-x} - e^{-x} + 1}$.

Příklad 7.31. *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 4y' + 4y = \cos(x)e^{-2x}$.

Výsledek: $y = e^{2x}\left(A + Bx\right) + \dfrac{e^{-2x}}{289}\left(15\cos x - 8\sin x\right)$.

Příklad 7.32. *Řešte diferenciální rovnici* $y' + 3y = 4e^{-x}x,\ y(0) = 1$.

Výsledek: $y = (2x - 1)e^{-x} + 2e^{-3x}$.

Příklad 7.33. *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 4y' + 8y = \sin(2x)e^{-2x}$.

Výsledek: $y = (A\sin(2x) + B\cos(2x))e^{2x} + (\sin(2x) + \cos(2x))\dfrac{e^{-2x}}{32}$.

Příklad 7.34. *Řešte diferenciální rovnici* $y' + 2xy = -2x,\ y(0) = 1$.

Výsledek: $y = 2e^{-x^2} - 1$.

Příklad 7.35. *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 4y' + 5y = \cos(x)e^{-2x}$.

Výsledek: $y = (A\sin(x) + B\cos(x))e^{2x} + (2\cos(x) - \sin(x))\dfrac{e^{-2x}}{40}$.

Příklad 7.36. *Řešte diferenciální rovnici* $\dfrac{y'}{3} + 2xy = -2xy^2$, $y(0) = 1$.

Výsledek: $y = \dfrac{1}{2e^{3x^2} - 1}$.

Příklad 7.37. *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 6y' + 8y = \sin(x)e^{2x}$.

Výsledek: $y = Ae^{2x} + Be^{4x} + (2\cos(x) - \sin(x))\,\dfrac{e^{2x}}{5}$.

Příklad 7.38. *Řešte diferenciální rovnici* $y' + y = y^2$, $y(2) = 1$.

Výsledek: $y = 1$.

Příklad 7.39. *Řešte diferenciální rovnici* $y'' - 6y' + 10y = \cos(2x)e^{2x}$.

Výsledek: $y = e^{3x}\left(A\sin(x) + B\cos(x)\right) - (\cos(2x) + 2\sin(2x))\dfrac{e^{2x}}{10}$.

Příklad 7.40. *Řešte diferenciální rovnici* $y' - 3x^2y = xe^{x^3}$, $y(0) = 5$.

Výsledek: $y = e^{x^3}\left(\dfrac{x^2}{2} + 5\right)$.

8 Integrály

Příklad 8.1. *Integrujte funkci* $f(x,y) = 5 + 2x + 2y + 8xy + \dfrac{1}{(5-2y-x)^2}$ *přes oblast určenou podmínkou* $|x| + |y| \le 1$. $\left(10 + \dfrac{2}{3}\ln\left(\dfrac{8}{7}\right)\right)$

Příklad 8.2. *Integrujte funkci* $f(x,y) = 5 + 2x + 12xy + \dfrac{1}{(10-2y-2x)^2}$ *přes oblast určenou podmínkou* $|x-1| + |y-1| \le 1$. $\left(38 + \dfrac{1}{16}\right)$

Příklad 8.3. *Integrujte funkci* $f(x,y) = \sin(2x+1) + \dfrac{18}{(8-3y-2x)^3}$ *přes oblast tvořenou trojúhelníkem s vrcholy* $[1,1]$, $[0,-1]$ *a* $[-1,0]$. $\left(\dfrac{9}{8}\sin 1 - \dfrac{3}{8}\sin 3 + \dfrac{9}{110}\right)$

Příklad 8.4. *Integrujte funkci* $f(x,y) = \cos(2x) + \dfrac{36}{(10-2y-3x)^3}$ *přes oblast tvořenou trojúhelníkem s vrcholy* $[-1,-1]$, $[0,1]$ *a* $[1,0]$. $\left(\dfrac{57}{70} - \dfrac{3}{4}\cos 2\right)$

Příklad 8.5. *Spočtěte* $\int_I 4xy\,dx\,dy$, *kde* $I = \{[x,y];\ 1 \le x^2+y^2 \le 4;\ y \ge 0;\ x \ge 0\}$. $\left(\dfrac{15}{2}\right)$

Příklad 8.6. *Integrujte funkci* $f(x,y) = y + \dfrac{1}{(5-2x+2y)^4}$ *přes oblast tvořenou trojúhelníkem s vrcholy* $[0,0]$, $[-1,-1]$, $[2,0]$. $\left(-\dfrac{159}{500}\right)$

Příklad 8.7. *Integrujte funkci* $f(x,y) = \dfrac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ *přes oblast určenou vztahem* $1 \le x^2+y^2 \le e$. $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

Příklad 8.8. *Integrujte funkci* $f(x,y) = \sqrt[3]{y+2} + \dfrac{1}{(2x-2y+1)^2}$ *přes oblast tvořenou trojúhelníkem s vrcholy* $[0,0]$, $[-1,-1]$, $[1,-1]$. $\left(-1 - \dfrac{\ln 5}{8} + \dfrac{9}{14}\left(2^{7/3}-1\right)\right)$

Příklad 8.9. *Integrujte funkci* $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x^2+y^2}$ *na množině* $x^2+y^2 \le 1$. (π)

Příklad 8.10. *Integrujte funkci* xy *přes oblast ohraničenou nerovnicí* $4x^2+y^2 \le 4$. (0)

Příklad 8.11. *Integrujte funkci* $f(x,y) = x + y + \dfrac{1}{(1+x+y)^3}$ *přes oblast tvořenou trojúhelníkem s vrcholy* $[0,0]$, $[1,-1]$, $[2,0]$. (1)

Příklad 8.12. *Integrujte funkci* $f(x,y) = xy - y + \sin(2y)$ *přes oblast tvořenou funkcemi* $x = y^2$ *a* $x = -3y - 2$. $(-3 + 2\sin(4) + 2\cos(4) + 2\sin(2) - 2\cos(2))$

Příklad 8.13. *Integrujte funkci* $f(x,y) = (x^2+4y^2)e^{x^2+4y^2}$ *na množině* $x^2+4y^2 \leq 1$. $\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Příklad 8.14. *Integrujte funkci* $f(x,y) = x^2\sqrt{1+y} + \cos(y)$ *přes oblast tvořenou trojúhelníkem s vrcholy* $[0,0]$, $[1,2]$, $[2,1]$. $\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Příklad 8.15. *Integrujte funkci* $f(x,y) = x + \dfrac{1}{(10-3x+2y)^3}$ *přes oblast tvořenou trojúhelníkem s vrcholy* $[0,0]$, $[-1,3]$, $[-4,0]$. $\left(-10 + \dfrac{3}{2090}\right)$

Příklad 8.16. *Integrujte funkci* $f(x,y) = y + \dfrac{1}{(1-6x+2y)^3}$ *přes oblast tvořenou trojúhelníkem s vrcholy* $[0,0]$, $[-1,-3]$, $[-4,0]$. $\left(-\dfrac{144}{25}\right)$

Příklad 8.17. *Integrujte funkci* $f(x,y) = x + \dfrac{1}{(1+x+y)^4}$ *přes oblast tvořenou trojúhelníkem s vrcholy* $[0,0]$, $[-1,-1]$, $[-2,0]$.
Výsledek: *Funkce není na zadané oblasti spojitá, takže výsledek závisí na pořadí integrace. Pokud integrujeme nejprve podle proměnné* x *dostaneme* $-\dfrac{10}{3}$.

Příklad 8.18. *Integrujte funkci* $f(x,y) = y + \dfrac{1}{(3+2x+2y)^4}$ *přes oblast tvořenou trojúhelníkem s vrcholy* $[0,0]$, $[1,1]$, $[2,0]$.

$$1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{7^3 \cdot 6} - \frac{1}{2^4 \cdot 7^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^4 \cdot 3^3}.$$