Matematika 2 (Fakulta ekonomická)

Cvičení z lineární algebry

TU v Liberci

Jiří Hozman

1. dubna 2010

Cvičení 2

Příklad 1. Rozhodněte, zda lze vektor $\vec{x}$ vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, v kladném případě určete příslušné koeficienty:

a) $\vec{x} = (-1, 0, 2, 3),\ \vec{u} = (1, -1, 0, 2),\ \vec{v} = (1, 2, 0, 3),\ \vec{w} = (1, -4, 2, 1),$
b) $\vec{x} = (4, 4, -6, -18),\ \vec{u} = (1, 1, 0, 1),\ \vec{v} = (0, -1, 2, 7),\ \vec{w} = (2, -1, 0, 1),$
c) $\vec{x} = (8, 3, 2),\ \vec{u} = (4, 1, 1),\ \vec{v} = (1, 1, -1),\ \vec{w} = (2, 0, 3),$
d) $\vec{x} = (1, -1),\ \vec{u} = (-14, 3),\ \vec{v} = (5, -1),\ \vec{w} = (1, 7),$
e) $\vec{x} = (1, 3, 6),\ \vec{u} = (1, 1, 2),\ \vec{v} = (2, 1, -1),\ \vec{w} = (1, 2, 1),$
f) $\vec{x} = (1, 1, 1),\ \vec{u} = (1, 1, -1),\ \vec{v} = (2, 1, -2),\ \vec{w} = (1, 2, -1),$

Příklad 2. Zjistěte, zda jsou níže uvedené vektory lineárně nezávislé:

a) $(2, 3, -5),\ (1, -1, 1),\ (3, 2, -2)$ v $\mathbb{R}^3$,
b) $(2, 0, 3),\ (1, -1, 1),\ (0, -2, -1)$ v $\mathbb{R}^3$,
c) $(1, -1, 1, 2),\ (1, 8, 7, -7),\ (1, 2, 3, -1),\ (1, 5, 5, -4)$ v $\mathbb{R}^4$,
d) $(2, 1, -1, 2, -1),\ (-4, 3, 2, -1, 1),\ (3, 5, -2, 1, -2),\ (2, 2, -1, 3, -1),\ (-1, 2, 3, 1, 3)$ v $\mathbb{R}^5$,
e) $(1, 0, 1),\ (1, 1, 0),\ (0, 1, 1)$ v $\mathbb{R}^3$,
f) $(4, 0, 1),\ (1, 3, 4),\ (3, 2, 1)$ v $\mathbb{R}^3$,
g) $(1, 0, 2, 3),\ (-1, 1, 0, 5),\ (2, 3, 7, 1)$ v $\mathbb{R}^4$,
h) $(3, 1, -2),\ (3, -1, -19),\ (-1, 2, 5)$ v $\mathbb{R}^3$,
i) $(1, 2, 3, 0),\ (2, 0, 1, 1),\ (1, 1, 1, 1)$ v $\mathbb{R}^4$,

Příklad 3. Určete pro která $a \in \mathbb{R}$ jsou následující vektory lineárně nezávislé:

a) $(a, -4, -1),\ (4, -6, -3),\ (1, 1, -a)$ v $\mathbb{R}^3$,
b) $(1, a, 1),\ (2, 2, a),\ (1, 1, 1)$ v $\mathbb{R}^3$,

Příklad 4. Z vektorů níže vyberte nějakou bázi jejich lineárního obalu:

a) $(5, 7, -1, 3),\ (1, -3, 8, 2),\ (9, 17, -10, 4),\ (-2, 6, -16, -4) \in \mathbb{R}^4$,
b) $(1, 0, 2, -3),\ (3, 2, 1, -5),\ (-1, 2, 1, -2),\ (-3, 0, 2, 0) \in \mathbb{R}^4$,

Příklad 5. Rozhodněte, zda vektor $\vec{x}$ patří do lineárního obalu množiny M:

a) $\vec{x} = (1, -1, 2, 1),\ M = \{(1, 0, 2, 2),\ (0, 1, 0, 2)\}$,
b) $\vec{x} = (1, 4, -4, -1),\ M = \{(0, 1, -3, 4),\ (2, 2, 2, 2),\ (1, -1, 3, 7)\}$,

Příklad 6. Rozhodněte, zda následující vektory tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$:

a) $(1, 0, 1),\ (3, 1, 0),\ (5, 2, 1)$,
b) $(1, 2, 3),\ (2, 0, 1),\ (5, 2, 5)$,
c) $(1, 4, -1),\ (0, 2, 3)$,

Příklad 7. Spočtěte dimenzi vektorového prostoru V, jestliže:

a) $V = \langle (1, 1, 2, 0),\ (2, 1, -1, 1),\ (1, 2, 1, -1),\ (1, 3, 0, -2) \rangle$,
b) $V = \langle (1, 2, 1, -1),\ (1, 1, -1, 2),\ (1, 0, -3, 5),\ (2, 3, 0, 1) \rangle$,
c) $V = \langle (1, 1, -1, 1),\ (2, 1, 1, -1),\ (1, 0, 2, -2),\ (3, 2, 1, -1) \rangle$,
d) $V = \langle (1, 2, 0, 1),\ (2, 3, -1, 2),\ (0, -1, -1, 0),\ (3, 5, -1, 3) \rangle$,
e) $V = \langle (1, 2, 3, 4),\ (1, 5, 1, 2),\ (1, 1, 2, 3) \rangle$,
f) $V = \langle (4, 4, 2, 3),\ (4, 3, 1, 0),\ (1, 2, 2, 3),\ (2, 3, 4, 4) \rangle$,

Příklad 8. Najděte bázi $I\!R^4$, která obsahuje vektor $\vec{v}$:

a) $\vec{v} = (1, 2, 3, 4)$,
b) $\vec{v} = (1, 1, 1, 0)$,
c) $\vec{v} = (1, 0, 0, 0)$,

Příklad 9. Pro která $p \in I\!R$ je vektor $\vec{u}$ prvkem lineárního obalu množiny M? Nalezněte nějakou bázi prostoru $\langle M \rangle$ a určete jeho dimenzi.

a) $\vec{u} = (7, -2, p),\ M = \{(2, 3, 5),\ (3, 7, 8),\ (1, -6, 1)\}$,
b) $\vec{u} = (p, 6, 0),\ M = \{(2, 3, 0),\ (1, 1, 1),\ (1, 1, 0)\}$,

Cvičení 3

Příklad 10. Určete velikosti vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ a úhel φ, který tyto vektory svírají, je-li:

a) $\vec{u} = (2, -1, -2),\ \vec{v} = (1, 1, -4)$,
b) $\vec{u} = (1, 0, 8),\ \vec{v} = (-2, 0, -16)$,
c) $\vec{u} = (2, -1, -2, 4),\ \vec{v} = (0, 2, -1, 0)$,
a) $\vec{u} = (1, 0),\ \vec{v} = (0, 1)$,
a) $\vec{u} = (1, 1, 1),\ \vec{v} = (1, 0, 0)$,
a) $\vec{u} = (1, 2, 3),\ \vec{v} = (4, 5, 6)$,

Příklad 11. Nechť jsou zadány matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Určete matici $\mathbb{X}$, jestliže:

a) $\mathbb{X} = 2\mathbb{A} - 5\mathbb{B} + \mathbb{C}^{\mathrm{T}}$,
b) $\mathbb{X} = 4\mathbb{A}^{\mathrm{T}} + 4\mathbb{B} - \mathbb{C}$,

Příklad 12. Spočtěte hodnost matice $\mathbb{A}$, jestliže:

a) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ [hod($\mathbb{A}$) =]

b) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 12 \end{pmatrix}$ [hod($\mathbb{A}$) = 3]

c) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ [hod($\mathbb{A}$) =]

d) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ [hod($\mathbb{A}$) =]

e) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ [hod($\mathbb{A}$) = 3]

f) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ [hod($\mathbb{A}$) =]

g) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ [hod($\mathbb{A}$) =]

h) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ [hod($\mathbb{A}$) = 4]

Příklad 13. Určete hodnost matice $\mathbb{A}$ v závislosti na parametru $p \in I\!R$, jestliže:

a) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & p & 0 & 1 \\ 2 & 1 & p & 0 \\ p & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ [hod($\mathbb{A}$) = 4 pro $p \neq 2$, hod($\mathbb{A}$) = 1 pro $p = 2$]

b) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & p \\ 4 & p & 0 \end{pmatrix}$ [hod($\mathbb{A}$) = pro $p \neq$, hod($\mathbb{A}$) = pro $p =$]

c) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & p & 1 \\ 2 & 2 & p \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ [hod($\mathbb{A}$) = 1 pro $p \in \{1, 2\}$, hod($\mathbb{A}$) = 3 pro $p \notin \{1, 2\}$]

Cvičení 4

Příklad 14. Rozhodněte o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic a v kladném případě určete množinu všech rešení této soustavy:

a) $$\begin{array}{rcrcrcrl} 6x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & = 0 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 5x_4 & = -4 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & & & = 3 \end{array}$$ $[x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1]$

b) $$\begin{array}{rcrcrcrcrl} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 2x_4 & - & 4x_5 & = 5 \\ x_1 & + & & + & 2x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & & & & & = 1 \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & - & 4x_5 & = 5 \end{array}$$ $\left[2 - 2u,\ -\frac{1}{2},\ u,\ 2t - 1,\ t\right]$

c) $$\begin{array}{rcrcrcrl} 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = 1 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = 5 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = 4 \end{array}$$ $[x_1 = -3 + 3t,\ x_2 = 3 - 2t,\ x_3 = t,\ x_4 = 1]$

d) $$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & & & - & x_3 & + & 3x_4 & & & = 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & - & x_5 & = 0 \\ 5x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & - & 9x_5 & = 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & - & 5x_5 & = 0 \end{array}$$ $[s + 3t,\ -s - 3t,\ s,\ -t,\ t]$

e) $$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & & & = 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 4x_5 & = 0 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = 0 \end{array}$$ $[t,\ t,\ -t,\ -t,\ t]$

f) $$\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 3x_5 & + & 3x_6 & = 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 6x_4 & + & 2x_5 & + & 8x_6 & = 0 \end{array}$$ $[-t + v - 3u,\ t,\ -2v,\ u,\ v,\ 0]$

g) $$\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 3x_5 & + & 3x_6 & = 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = -1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 6x_4 & + & 2x_5 & + & 8x_6 & = 10 \end{array}$$ $[-1 - t + v - 3u,\ t,\ -2 - 2v,\ u,\ v,\ 2]$

h) $$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 4 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = 11 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & = 24 \end{array}$$ $[x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1]$

i) $$\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 1 \\ 4x_1 & + & x_2 & & & = -2 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = 7 \end{array}$$ $[x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1]$

j) $$\begin{array}{rcrcrcrcrl} -4x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & 7x_5 & = -11 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & & + & 3x_5 & = 4 \\ 4x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & + & 7x_5 & = -3 \\ -6x_1 & + & 6x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & - & 12x_5 & = -7 \end{array}$$ $[4 - u + v,\ v,\ -4 - u,\ 1 + 2u,\ u]$

k) $$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & + & 7x_4 & = 4 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & & & = -2 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 10x_3 & + & 6x_4 & = 7 \end{array}$$ [soustava nemá řešení]

Příklad 15. Rozhodněte o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic a v kladném případě určete množinu všech rešení homogenní soustavy rovnic s maticí:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ [] b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ []

Příklad 16. Řešte nehomogenní soustavu lineárních rovnic s rozšířenou maticí:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right)$ [] b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$ []

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ [] d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$ []

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right)$ [] f) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & 6 \end{array}\right)$ []

Příklad 17. Klasifikujte řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic vzhledem k parametru $a \in I\!R$ s danou rozšířenou maticí:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right)$ []

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & a & 5 \\ -a & 3 & -1 & -6 \end{array}\right)$ []

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -3 & 5 \\ a & -3 & 1 & 10 \\ 1 & 9 & -10 & a+3 \end{array}\right)$ [$a = 2$ nekonečně mnoho řešení]

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & a & -1 & 1 \end{array}\right)$ [$a = -6$ nemá řešení, $a = 1$ nekonečně mnoho řešení]

e) $\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$ []

f) $\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & 0 \end{array}\right)$ [$a = 0$ nemá řešení, $a = 1$ nekonečně mnoho řešení]

Cvičení 5

Příklad 18. Najděte inverzní matici $\mathbb{A}^{-1}$ pomocí Gauss-Jordanovy eliminace k matici $\mathbb{A}$:

a) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right]$

b) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right]$

c) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\right]$

d) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\right]$

e) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -8 & 8 & 4 \\ -5 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\right]$

f) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -3 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\right]$

g) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\right]$

Příklad 19. Spočítejte inverzní matici $\mathbb{A}^{-1}$ pomocí Gauss-Jordanovy eliminace k matici $\mathbb{A}$ s parametrem $a \in I\!R$:

a) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 2 & -1 & 3-a \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\right]$

Příklad 20. Nechť je dána matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 2 & -1 & 3-a \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Spočtěte $\mathbb{A}^2$. b) Spočtěte $(\mathbb{A}^{\mathrm{T}})^2$. c) Spočtěte $\mathbb{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A}$. d) Spočtěte $\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{\mathrm{T}}$.

Příklad 21. Nechť

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešte maticovou rovnici

a) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{B}$,

b) $\mathbb{X} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{B}$.

Příklad 22. Nechť

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\3&-4&-2\\-2&3&1\end{pmatrix},\quad \mathbb{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\\-1&1\end{pmatrix}.$$

Řešte maticovou rovnici

a) $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}=\mathbb{B}$,

b) $\mathbb{X}\cdot\mathbb{A}=\mathbb{B}^{\mathrm{T}}$.

Příklad 23. Nechť

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\quad \mathbb{B}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

Řešte maticovou rovnici

a) $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}=\mathbb{B}+\mathbb{X}$,

b) $\mathbb{X}\cdot\mathbb{A}-\mathbb{B}=\mathbb{X}$.

Příklad 24. Nechť

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix},\quad \mathbb{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&1\\2&-2&0\end{pmatrix}.$$

Řešte maticovou rovnici

a) $\mathbb{X}\cdot\mathbb{A}=3\mathbb{B}$, $\quad\left[\mathbb{X}=\begin{pmatrix}0&-3&9\\-3&3&0\\18&-12&0\end{pmatrix}\right]$

Příklad 25. Nechť

$$\mathbb{A}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}3&5&3\\1&5&2\\-2&3&4\end{pmatrix},\quad \mathbb{B}=\begin{pmatrix}0&3&-6\\1&-3&0\\2&6&-9\end{pmatrix}.$$

Řešte maticovou rovnici

a) $12\mathbb{A}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbb{X}-3\mathbb{X}=4\mathbb{B}$, $\quad\left[\mathbb{X}=\begin{pmatrix}\quad\end{pmatrix}\right]$

Příklad 26. Nechť

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&-1\\1&2&0\end{pmatrix},\quad \mathbb{B}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&3&2\end{pmatrix}.$$

Řešte maticovou rovnici

a) $\mathbb{A}\mathbb{X}-\mathbb{X}=\mathbb{C}$, $\quad\left[\mathbb{X}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right]$

Příklad 27. Nechť

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\2&-1&0\end{pmatrix},\quad \mathbb{B}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbb{C}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix},$$

Řešte maticovou rovnici

a) $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}-\mathbb{C}=\mathbb{B}\cdot\mathbb{X}$,

b) $\mathbb{X}\cdot\mathbb{A}=\mathbb{X}\cdot\mathbb{B}+\mathbb{C}$.

Příklad 28. Nechť

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešte maticovou rovnici

a) $\mathbb{A}\mathbb{X}\mathbb{B} = \mathbb{C}$, $\left[\mathbb{X} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}\right]$

Příklad 29. Nechť

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešte maticovou rovnici

a) $\mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{X} + \mathbb{A} = \mathbb{O}$, kde $\mathbb{O}$ je nulová matice, $\left[\mathbb{X} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right]$

Příklad 30. Nechť

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešte maticovou rovnici

a) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} - \mathbb{X} + 4\mathbb{A} = \mathbb{O}$, kde $\mathbb{O}$ je nulová matice, $\left[\mathbb{X} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -5 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \end{pmatrix}\right]$

Cvičení 6

Příklad 31. Spočtěte nálsledující determinanty, jestliže:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ [] b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ []

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ [] d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ []

e) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ [] f) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ []

g) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ [] h) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ [1]

i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ [21] j) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ [−15]

k) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$ [−20] l) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ [294]

m) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ [2] n) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ [0]

Příklad 32. Určete, pro jaké hodnoty parametru $p \in I\!R$ je matice $\mathbb{A}$ regularní (resp. singulární) , jestliže:

a) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & p & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & p \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ [$\det \mathbb{A} = -p^2 - 3p + 4$, pro $p \in \{-4; 1\}$ je singulární]

b) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} p & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & p \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ [$\det \mathbb{A} =$, pro $p \in \{\}$ je singulární]

c) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & p & 1 \\ 2 & 1 & p \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\left[\det \mathbb{A} = 2p^2 - p, \text{ pro } p \in \left\{0; \frac{1}{2}\right\} \text{ je singulární}\right]$

d) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} p & -1 & 3 \\ 1 & -2 & p \\ -5 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ [$\det \mathbb{A} = -p^2 + 19p - 34$, pro $p \in \{2; 17\}$ je singulární]

Příklad 33. Nechť

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 & 1 \\ -5 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Spočtěte determinant matice

a) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{A}^T$, []

b) $\mathbb{A}^2 \cdot \mathbb{B}^T$, []

c) $\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{B}^{-1}$, []

Příklad 34. Užitím Cramerova pravidla vyřešte nehomogenní soustavu lineárních rovnic s rozšířenou maticí:

a) $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right)$ [[−1; 2; 1]]

b) $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$ []

c) $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ []

d) $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$ []

e) $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right)$ []

f) $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 11 \\ 4 & 6 & 8 & 24 \end{array}\right)$ [[1; 2; 1]]

Příklad 35. Najděte inverzní matici $\mathbb{A}^{-1}$ pomocí adjungované matice $\widehat{\mathbb{A}}$ k matici $\mathbb{A}$:

a) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right]$

b) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right]$

c) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}\right]$

d) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\right]$

e) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -8 & 8 & 4 \\ -5 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\right]$

f) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -3 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\right]$

g) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}\right]$