<u>Zadání zápočtových úloh z předmětu</u>

MATEMATIKA III (KMD/MA3*M, KMD/MA3-M)

v akademickém roce 2019-2020

č.	cvičení Po 16:10	cvičení Čt 12:30	zápočtové úlohy č.*
1.	ACKERMANN Aleš	AUGUSTIN Ondřej	1 (část. I – VII)
2.	BOHÁČ Radek	BEGIM Danylo	2 (část. I – VII)
3.	DOLENSKÝ Roman	BRAUN Jan	3 (část. I – VII)
4.	FILJAČ Pavel	BUDOŠ Branislav	4 (část. I – VII)
5.	FIŠAR Lukáš	CYPRIÁNOVÁ Barbora	5 (část. I – VII)
6.	FRYDRYCH Ondřej	ČERNÝ Miloslav	6 (část. I – VII)
7.	PFEIFER Roland	DRABINA Jakub	7 (část. I – VII)
8.	HORKÝ Matyáš	DUFEK Tomáš	8 (část. I – VII)
9.	JIRÁNEK Michal	ELSNER Petr	9 (část. I – VII)
10.	KASAL Luboš	FEJGL Miloš	10 (část. I – VII)
11.	KESLER Václav	GSCHWENTNER Roman	11 (část. I – VII)
12.	KRYCNER Václav	HARTAN Vojtěch	12 (část. I – VII)
13.	LEDEN Filip	VOVES Ondřej	13 (část. I – VII)
14.	HEJHAL Jan	HMIRO Tomáš	14 (část. I – VII)
15.	PARDUBSKÝ Vít	JOHN Vojtěch	15 (část. I – VII)
16.	PÁTEK Vojtěch	KENDÍK Jan	16 (část. I – VII)
17.	VYKOUK Aleš	KOLÁTOR Jan	17 (část. I – VII)
18.	PLUCHA Jan	KOMERS Filip	18 (část. I – VII)
19.	ŠMÍD Radim Luděk	KRYKORKOVÁ Zora	19 (část. I – VII)
20.	TOMSA Tomáš	KUREL Václav	20 (část. I – VII)
21.	VACEK Ondřej	MATURA Václav	21 (část. I – VII)
22.	VAŇÁTKO Lukáš	MILEROVÁ Markéta	22 (část. I – VII)
23.	VODVÁŘKA Jakub	MÜLLER Pavel	23 (část. I – VII)
24.	VYHNÁLEK Vojtěch	RINGELHÁN Pavel	24 (část. I – VII)
25.	ZEMAN Jakub	SCHICHOR Jakub	25 (část. I – VII)
26.	PAVLŮ David	SRP Jakub	26 (část. I – VII)
27.	PETRYŠAK Nazarij	———————	27 (část. I – VII)

* Každý student má nárok na změnu libovolné jedné části příkladu (po osobní domluvě), je-li požadovaná část nezadaná.

!!! Prosím pište čitelně a úlohy řešte podrobně !!!

Práci odevzdejte s dostatečným časovým předstihem, abyste stihli opravit veškeré případné chyby nejpozději do <u>26.1. 2020</u>, v opačném případě zápočet nemůže být udělen!

Pozor: Výsledky uvedené u jednotlivých příkladů <u>nemusí</u> být vždy správné!

V Liberci, dne 18. října 2019 Jiří Hozman

Část I - Laplaceova transformace

Příklad I.1. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 0$ a $y'(0) = 1$ pomocí Laplaceovy transformace.
$[xe^{2x}]$

Příklad I.2. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - 2y' + 3y = e^x \cos x$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 1$ a $y'(0) = 1$ pomocí Laplaceovy transformace.
$[e^x \cos x]$

Příklad I.3. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - 2y' = 4x - 2$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 8$ a $y'(0) = 6$ pomocí Laplaceovy transformace.
$[5 - x^2 + 3e^{2x}]$

Příklad I.4. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + 4y = 2 + 4x^2$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 1$ a $y'(0) = -2$ pomocí Laplaceovy transformace.
$[\cos 2x - \sin 2x + x^2]$

Příklad I.5. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - 2y' + y = 2 \sin x$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 2$ a $y'(0) = 1$ pomocí Laplaceovy transformace.
$[\cos x + e^x]$

Příklad I.6. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + y = x^2$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = -2$ a $y'(0) = 0$ pomocí Laplaceovy transformace.
$[x^2 - 2]$

Příklad I.7. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + 3y' = e^{-x}$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 0$ a $y'(0) = -1$ pomocí Laplaceovy transformace. $\left[\frac{1}{2}(e^{-3x} - e^{-x})\right]$

Příklad I.8. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + 4y = \cos x$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 0$ a $y'(0) = 0$ pomocí Laplaceovy transformace. $\left[\frac{1}{3}(\cos x - \cos 2x)\right]$

Příklad I.9. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + y = x^3 + 6x$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 0$ a $y'(0) = 0$ pomocí Laplaceovy transformace. $[x^3]$

Příklad I.10. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + y = \sin 2x$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 0$ a $y'(0) = 0$ pomocí Laplaceovy transformace. $\left[\frac{1}{3}(2\sin x - \sin 2x)\right]$

Příklad I.11. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + 2y' = 0$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 1$ a $y'(0) = 2$ pomocí Laplaceovy transformace. $[2 - e^{-2x}]$

Příklad I.12. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 1$ a $y'(0) = 0$ pomocí Laplaceovy transformace. $[2e^{-x} - e^{-2x}]$

Příklad I.13. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - y' = 2 - 2x$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 1$ a $y'(0) = 1$ pomocí Laplaceovy transformace. $[e^x + x^2]$

Příklad I.14. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + 4y = 2\cos 2x$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 0$ a $y'(0) = 4$ pomocí Laplaceovy transformace. $\left[\frac{1}{2}(4 + x)\sin 2x\right]$

Příklad I.15. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - 9y = 2 - x$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 0$ a $y'(0) = 1$ pomocí Laplaceovy transformace.
$[\frac{1}{54}(-12 + 6x - 2e^{-3x} + 14e^{3x})]$

Příklad I.16. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 2$ a $y'(0) = -4$ pomocí Laplaceovy transformace.
$[(2 - 10x)e^{3x}]$

Příklad I.17. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - y' - 6y = 2$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 1$ a $y'(0) = 0$ pomocí Laplaceovy transformace.
$\left[\frac{1}{15}(-5 + 12e^{-2x} + 8e^{3x})\right]$

Příklad I.18. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - y' - 6y = 0$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 5$ a $y'(0) = 0$ pomocí Laplaceovy transformace.
$[2e^{3x} + 3e^{-2x}]$

Příklad I.19. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + 4y' + 3y = 3e^{-2x}$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 1$ a $y'(0) = 0$ pomocí Laplaceovy transformace.
$[3e^{-x} - 3e^{-2x} + e^{-3x}]$

Příklad I.20. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - 2y' - 3y = 3 - 4e^{x}$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 2$ a $y'(0) = 3$ pomocí Laplaceovy transformace.
$[-1 + e^{x} + e^{-x} + e^{3x}]$

Příklad I.21. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + y = 3\sin 2x$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 1$ a $y'(0) = 0$ pomocí Laplaceovy transformace.
$[-\sin 2x + \cos x + 2\sin x]$

Příklad I.22. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 1$ a $y'(0) = 2$ pomocí Laplaceovy transformace.
$[e^{-x}(3\sin x + \cos x)]$

Příklad I.23. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - y' - 6y = 2$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 0$ a $y'(0) = 0$ pomocí Laplaceovy transformace.

$\left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{5}e^{-2x} + \frac{2}{15}e^{3x}\right]$

Příklad I.24. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - y' - 2y = 2x - 3$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = \frac{15}{4}$ a $y'(0) = \frac{13}{4}$ pomocí Laplaceovy transformace.

$\left[2e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-x} - x + 2\right]$

Příklad I.25. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + 9y = 3\cos 3x$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 0$ a $y'(0) = 3$ pomocí Laplaceovy transformace.

$\left[\left(1 + \frac{1}{2}x\right)\sin 3x\right]$

Příklad I.26. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + y = 3\sin 2x$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 0$ a $y'(0) = 0$ pomocí Laplaceovy transformace.

$[2\sin x - \sin(2x)]$

Příklad I.27. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - y' = 3(2 - x^2)$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 1$ a $y'(0) = 1$ pomocí Laplaceovy transformace.

$[3x^2 + x^3 + e^x]$

Příklad I.28. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x}$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 1$ a $y'(0) = 1$ pomocí Laplaceovy transformace.

$[e^{-x}(2 - \cos x + 2\sin x]$

Příklad I.29. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - 2y' = 8x + 24$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 2$ a $y'(0) = 2$ pomocí Laplaceovy transformace.

$[8e^{2x} - 6 - 14x - 2x^2]$

Příklad I.30. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 0$ a $y'(0) = 0$ pomocí Laplaceovy transformace.

$[e^x(e^x - x - 1)]$

Příklad I.31. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + y = x^3 + 6x$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 0$ a $y'(0) = 0$ pomocí Laplaceovy transformace.

$[x^3]$

Příklad I.32. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + 1 = \sin 2x$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 0$ a $y'(0) = 0$ pomocí Laplaceovy transformace.

$\left[\frac{1}{4}\left(2x - \sin 2x - 2x^2\right)\right]$

Příklad I.33. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + 4 = \cos 2x$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 1$ a $y'(0) = 0$ pomocí Laplaceovy transformace.

$\left[\frac{1}{4}\left(5 - \cos 2x - 8x^2\right)\right]$

Příklad I.34. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + y = e^{-2x}$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 0$ a $y'(0) = 1$ pomocí Laplaceovy transformace.

$\left[\frac{1}{5}\left(e^{-2x} - \cos x + 7\sin x\right)\right]$

Příklad I.35. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + y' = \cos 2x$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = -1$ a $y'(0) = 1$ pomocí Laplaceovy transformace.

$\left[\frac{1}{10}\left(-8e^{-x} - 2\cos 2x + \sin 2x\right)\right]$

Příklad I.36. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + y' = \cos 3x$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 1$ a $y'(0) = -1$ pomocí Laplaceovy transformace.

$\left[\frac{1}{30}\left(33e^{-x} - 3\cos 3x10 + \sin 3x\right)\right]$

Příklad I.37. Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + y = e^{-3x}$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ s podmínkami $y(0) = 2$ a $y'(0) = 0$ pomocí Laplaceovy transformace.

$\left[\frac{1}{10}\left(e^{-3x} + 19\cos x + 3\sin x\right)\right]$

Část II - Dvojný a trojný integrál

Příklad II.1. Spočítejte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami:

$$y = x,\ y = \sqrt{3}x,\ x^2 + y^2 = 4x,\ x^2 + y^2 = 8x.$$

$$[\pi + 3\sqrt{3} - 6]$$

Příklad II.2. Spočítejte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami:

$$y = x,\ y = 0,\ x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 4x.$$

$$\left[\tfrac{3}{4}\pi + \tfrac{3}{2}\right]$$

Příklad II.3. Určete obsah plochy ohraničené lemniskátou a kružnicí:

$$(x^2 + y^2)^2 = 18(x^2 - y^2),\ x^2 + y^2 = 6x.$$

$$[9\pi - 9]$$

Příklad II.4. Určete těžiště homogenní plochy ohraničené parabolou a přímkou:

$$y = x^2,\ y = 1.$$

$$\left[T\left[0; \tfrac{3}{5}\right]\right]$$

Příklad II.5. Spočítejte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami:

$$x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 4x,\ y = x,\ y = 0.$$

$$\left[\tfrac{3}{4}\pi + \tfrac{3}{2}\right]$$

Příklad II.6. Vypočítejte:

$$\iint_\Omega \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde

$$\Omega : \frac{\sqrt{3}}{3}x \le y \le \sqrt{3}x,\ 1 \le x^2 + y^2 \le 9.$$

$$\left[\tfrac{\pi^2}{6}\right]$$

Příklad II.7. Vypočítejte:

$$\iint_\Omega \sin\sqrt{x^2 + y^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde

$$\Omega : y \ge 0,\ \pi^2 \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2.$$

$$[-3\pi^2]$$

Příklad II.8. Vypočítejte:

$$\iint_\Omega e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde

$$\Omega : x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0.$$

$\left[-\frac{\pi}{4e}+\frac{\pi}{4}\right]$

Příklad II.9. Určete objem tělesa daného nerovnostmi:

$$z \le 1-x^2-y^2,\ z \ge 0, y \ge |x|$$

$\left[\frac{\pi}{8}\right]$

Příklad II.10. Určete objem tělesa daného nerovnostmi:

$$z \ge 0,\ x^2+y^2 \le 2y,\ z \le x^2+y^2$$

$\left[\frac{3}{2}\pi\right]$

Příklad II.11. Určete těžiště jehlanu omezeného rovinami:

$$x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$$

$\left[T\left[\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right]\right]$

Příklad II.12. Vypočítejte:

$$\iiint_\Omega (xy+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde

$$\Omega : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le z \le 2-x-2y.$$

$\left[\frac{13}{40}\right]$

Příklad II.13. Vypočítejte:

$$\iiint_\Omega y\cos(x+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde

$$\Omega : y=0,\ z=0,\ x+z=\frac{\pi}{2},\ y=\sqrt{x}.$$

$\left[\frac{\pi^2-8}{16}\right]$

Příklad II.14. Vypočítejte:

$$\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde

$$\Omega : 0 \le z \le 4-2\sqrt{x^2+y^2}.$$

$\left[\frac{16}{3}\pi\right]$

Příklad II.15. Vypočítejte:

$$\iiint_\Omega z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde

$$\Omega : z=0,\ z=3,\ y\geq 0,\ x^2+y^2-2x=0.$$

[8]

Příklad II.16. Vypočítejte:

$$\iint_\Omega e^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde

$$\Omega : x=0,\ y=1,\ y=2,\ y^2=x.$$

$\left[e^2-\frac{3}{2}\right]$

Příklad II.17. Vypočítejte:

$$\iint_\Omega x^2+y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde

$$\Omega : 1\leq x^2+y^2\leq 4,\ |x|\leq y.$$

$\left[\frac{15\pi}{8}\right]$

Příklad II.18. Vypočítejte:

$$\iint_\Omega \sqrt{xy-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde

$$\Omega : 0\leq y\leq 1,\ y\leq x\leq 10y.$$

[6]

Příklad II.19. Určete objem tělesa daného nerovnostmi:

$$x^2+y^2+z^2\leq 1,\ z\geq\sqrt{x^2+y^2}.$$

$\left[\frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

Příklad II.20. Určete těžiště tělesa omezeného plochami:

$$z=0,\ z=1-\sqrt{x^2+y^2}$$

$\left[T\left[0;0;\frac{1}{4}\right]\right]$

Příklad II.21. Určete těžiště tělesa omezeného plochami:

$$z=x+y,\ 2z=x^2+y^2$$

$\left[T\left[1;1;\frac{5}{3}\right]\right]$

Příklad II.22. Vypočítejte:

$$\iiint_\Omega \frac{1}{1+x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde

$$\Omega : 0 \le x,\ 0 \le y,\ 0 \le z,\ x+y+z \le 1.$$

$\left[\frac{3}{2} - 2\ln 2\right]$

Příklad II.23. Vypočítejte:

$$\iiint_\Omega z^4 \sin^3 y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde

$$\Omega : x = 0,\ x = \pi,\ y = 0,\ y = \frac{\pi}{2},\ z = 0,\ z = x.$$

$\left[\frac{\pi^6}{45}\right]$

Příklad II.24. Vypočítejte:

$$\iiint_\Omega x^2y^2z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde

$$\Omega : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1.$$

$\left[\frac{\pi}{192}\right]$

Příklad II.25. Vypočítejte:

$$\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde

$$\Omega : y \le x,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x^2+y^2+z^2 \le 1.$$

$\left[\frac{\pi}{16}\right]$

Příklad II.26. Vypočítejte:

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde

$$\Omega : 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2.$$

$\left[\frac{32\pi}{3}\right]$

Příklad II.27. Vypočítejte objem oblasti Ω určené vztahy:

$$\Omega : x^2+y^2 \le z \le 2 + \sqrt{x^2+y^2},\ y \ge |x|.$$

$\left[\frac{4\pi}{3}\right]$

Příklad II.28. Určete hmotnost rovinné desky omezené křivkami:

$$x = \sqrt[4]{y},\ x = \sqrt{y},\ x = 0,\ x = 1,$$

která má hustotu $h(x, y) = xy^3$. $\left[\frac{1}{90}\right]$

Příklad II.29. Vypočítejte souřadnice těžiště rovinné desky omezené křivkami:

$$x = 3y^2 - 12y,\ x = 4y - y^2,$$

která má hustotu $h(x, y) = xy^3$. $\left[T = \left[-\frac{112}{15}; \frac{8}{3}\right];\right]$

Příklad II.30. Určete hmotnost rovinné desky omezené křivkami:

$$x = \sqrt[3]{y},\ x = \sqrt{y},$$

která má hustotu $h(x, y) = xy$. $\left[\frac{1}{48}\right]$

Příklad II.31. Vypočítejte souřadnice těžiště tělesa omezeného plochami:

$$x^2 + y^2 = z^2\ (z > 0),\ x^2 + y^2 + z^2 = 9,$$

které obsahuje bod $[0; 0; 2]$. []

Příklad II.32. Vypočítejte souřadnice těžiště homogenní rovinné desky omezené křivkami:

$$x = 3y^2 - 6y,\ x = 2y - y^2.$$

$\left[T = \left[-\frac{4}{5}; 1\right]\right]$

Příklad II.33. Vypočítejte:

$$\iint_\Omega y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde

$$\Omega : (x^2 + y^2)^2 \le y^3.$$

$\left[\frac{21\pi}{256}\right]$

Příklad II.34. Vypočítejte:

$$\iint_\Omega \sqrt{25 - x^2 - y^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde

$$\Omega : (x^2 + y^2) \le 16,\ y \le x,\ x \ge 0.$$

[]

Část III - Křivkový integrál ve 2D

Příklad III.1. Vypočítejte:

$$\int_C (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y,$$

kde C je křivka $y = 1 - |1 - x|$, $x \in \langle 0; 2\rangle$ s počátečním bodem $[0; 0]$. $\left[\frac{4}{3}\right]$

Příklad III.2. Vypočítejte:

$$\int_C (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y,$$

kde křivka C je obvod obdélníku s vrcholy $[2; 2], [5; 2], [5; 4], [2; 4]$ orientovaná souhlasně s uvedeným pořadím vrcholů. $[42]$

Příklad III.3. Vypočítejte:

$$\int_C \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y,$$

kde křivka C je část hyperboly $xy = 1$ s počátečním bodem $[3; 1/3]$ a koncovým bodem $[1/2; 2]$. $\left[\ln 6 - \frac{5}{3}\right]$

Příklad III.4. Vypočítejte:

$$\int_C (2y - 6xy^3)\,\mathrm{d}x + (2x - 9x^2y^2)\,\mathrm{d}y,$$

kde C je parabola $y = x^2$ s počátečním bodem $[0; 0]$ a koncovým bodem $[1; 1]$. $[-1]$

Příklad III.5. Vypočítejte:

$$\int_C (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y,$$

kde křivka C je hranice obdélníka ohraničeného přímkami:

$$x = 0,\ y = 0,\ x = 2,\ y = 4.$$

$[16]$

Příklad III.6. Vypočítejte:

$$\int_C (2e^{2x}\sin y - 3y^3)\,\mathrm{d}x + \left(e^{2x}\cos y + \frac{4}{3}x^3\right)\,\mathrm{d}y,$$

kde C je kladně orientovaná křivka $4x^2 + 9y^2 = 36$. $[108\pi]$

Příklad III.7. Vypočítejte:

$$\int_C (\cos x \ln y + 2e^{2x}y^2)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{\sin x}{y} + 2e^{2x}y + \frac{4}{3}x^3\right)\,\mathrm{d}y,$$

kde C je kladně orientovaná křivka $4x^2 + y^2 = 4$. $[2\pi]$

Příklad III.8. Vypočítejte:

$$\int_C (e^x \ln y - y^2 x)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{e^x}{y} - \frac{1}{2}x^2 y\right)\,\mathrm{d}y,$$

kde C je kladně orientovaná křivka $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$. $[4\pi]$

Příklad III.9. Vypočítejte:

$$\int_C (e^x \sin y - xy^2)\,\mathrm{d}x + \left(e^x \cos y - \frac{1}{2}x^2 y\right)\,\mathrm{d}y,$$

kde C je kladně orientovaná křivka $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 1$. $[4\pi]$

Příklad III.10. Vypočítejte:

$$\int_C (2xy + y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 + 3xy)\,\mathrm{d}y,$$

kde C je kladně orientovaná hranice množiny:

$$M = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x\}.$$

$[0]$

Příklad III.11. Vypočítejte:

$$\int_C (xy + y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 + 2xy)\,\mathrm{d}y,$$

kde C je kladně orientovaná hranice množiny:

$$M = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y\}.$$

$[0]$

Příklad III.12. Vypočítejte:

$$\int_C (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x,$$

kde křivka C je obvod trojúhelníka s vrcholy $[2;0], [4;4], [0;4]$ orientovaná v kladném smyslu. $\left[\frac{128}{3}\right]$

Příklad III.13. Vypočítejte:

$$\int_C xy\,\mathrm{d}x - (2y - x^2)\,\mathrm{d}y,$$

kde křivka C je kladně orientovaná hranice menší z oblastí vymezených vztahy:

$$y = \sqrt{16 - x^2},\ y = 0,\ y = x.$$

$\left[\frac{32\sqrt{2}}{3}\right]$

Příklad III.14. Vypočítejte:

$$\int_C (y^2 - 2x^2)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y,$$

kde křivka C je kladně orientovaná asteroida parametrizovaná $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(a > 0)$. [0]

Příklad III.15. Vypočítejte:

$$\int_C x^2\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y,$$

kde křivka C je kladně orientovaná hranice oblasti ohraničené křivkami:

$$y = \ln x,\ x = 0,\ y = 0,\ y = e.$$

[0]

Příklad III.16. Vypočítejte:

$$\int_C \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}s,$$

kde C je kladně orientovaná křivka $x^2 + y^2 = 2x$. [8]

Příklad III.17. Vypočítejte:

$$\int_C \frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x - \frac{x-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y,$$

kde C je kladně orientovaná křivka $x^2 + y^2 = 1$. $[-2\pi]$

Příklad III.18. Vypočítejte:

$$\int_C \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x + \frac{2}{y}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}y,$$

kde C je kladně orientovaná hranice množiny:

$$M = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \wedge x \le y \le \sqrt{3}x\}.$$

$\left[\frac{\pi}{12}\ln 2\right]$

Příklad III.19. Vypočítejte:

$$\int_C \left(\frac{1}{x} + 2xy - \frac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{y} + x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y,$$

kde C je kladně orientovaná hranice množiny:

$$M = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \le x^2 + y^2 \le 9 \wedge \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x\}.$$

$\left[\frac{65\pi}{24}\right]$

Příklad III.20. Vypočítejte:

$$\int_C x^2 y \,\mathrm{d}x + xy \,\mathrm{d}y,$$

kde C je obvod jednotkového čtverce $\langle 0; 1\rangle \times \langle 0; 1\rangle$ v kladném smyslu. $\left[\frac{1}{6}\right]$

Příklad III.21. Vypočítejte:

$$\int_C 2xy \,\mathrm{d}x - x^2 \,\mathrm{d}y,$$

kde křivka C je lomená čára s vrcholy $[0; 0], [0; 1], [2; 1]$ orientovaná pořadím bodů. $[4]$

Příklad III.22. Vypočítejte:

$$\int_C \frac{\mathrm{d}x - \mathrm{d}y}{x + y},$$

kde křivka C je hranice čtverce s vrcholy $[1; 0], [0; 1], [-1; 0], [0; -1]$ orientovaná ve směru daném pořadím vrcholů. $[-4]$

Příklad III.23. Vypočítejte:

$$\int_C \frac{\mathrm{d}x - \mathrm{d}y}{x + y},$$

kde křivka C je elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$, $b > 0$, orientovaná ve směru daném pořadím bodů $[a; 0], [0; b], [-a; 0]$. $[0]$

Příklad III.24. Vypočítejte hmotnost části elipsy

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,$$

jestliže její hustota je v každém bodě $h(x, y) = xy$. $\left[\frac{38}{5}\right]$

Příklad III.25. Vypočítejte práci, kterou vykoná silového pole $F(x, y) = (0, x^2)$ podél křivky $y^2 = 1 - x$ s počátečním bodem $[0; 1]$ a koncovým bodem $[1; 0]$. $\left[\frac{-8}{15}\right]$

Příklad III.26. Vypočítejte práci, kterou vykoná silového pole $F(x, y) = (x + y, 2x)$ podél kladně orientované kružnice

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (a > 0).$$

$[\pi a^2]$

Příklad III.27. Vypočítejte:

$$\int_C xy^2 \,\mathrm{d}x + (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}y,$$

kde křivka C je kladně orientovaná hranice obdélníka ohraničeného přímkami:

$$x = 1,\ y = 2,\ x = 4,\ y = 3.$$

$\left[-\frac{45}{2}\right]$

Příklad III.28. Vypočítejte:

$$\int_C y^2\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y,$$

kde křivka C je kladně orientovaná hranice oblasti ohraničené křivkami:

$$y = \frac{1}{x},\ x = 2,\ x = 4,\ y = 0.$$

$\left[\frac{15}{4}\right]$

Příklad III.29. Vypočítejte:

$$\int_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x,$$

kde křivka C je kladně orientovaná elipsa:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

$[24\pi]$

Příklad III.30. Vypočítejte:

$$\int_C 2y\,\mathrm{d}x - (x+y)\,\mathrm{d}y,$$

kde křivka C je kladně orientovaná hranice trojúhelníka, jehož strany leží na přímkách:

$$x = 0,\ y = 0,\ x + 2y = 4.$$

[]

Příklad III.31. Vypočítejte:

$$\int_C (x+y)\,\mathrm{d}x - 2x\,\mathrm{d}y,$$

kde křivka C je kladně orientovaná hranice oblasti ležící v I. kvadrantu a ohraničené křivkami:

$$x = 0,\ y = 0,\ x^2 + y^2 = 4$$

$[-3\pi]$

Příklad III.32. Vypočítejte:

$$\int_C (x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y,$$

kde křivka C je kladně orientovaná elipsa

$$4x^2 + 9y^2 = 36.$$

$[-12\pi]$

Příklad III.33. Vypočítejte:

$$\int_C \big(2y - \sin(x^2)\big)\ \mathrm{d}x + (xy + \cos y)\ \mathrm{d}x,$$

kde C je kladně orientovaná křivka daná rovnicí

$$x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

$[-\pi]$

Příklad III.34. Vypočítejte:

$$\int_C \big(y^2 + \operatorname{arctg} x\big)\ \mathrm{d}x + \big(x + 2\cos(y^3)\big)\ \mathrm{d}y,$$

kde C je kladně orientovaná křivka daná rovnicí

$$4x^2 + y^2 = 4.$$

$[2\pi]$

Část IV - Křivkový a plošný integrál ve 3D

Příklad IV.1. Vypočítejte:

$$\int_C (y+z)\,\mathrm{d}x + (z+x)\,\mathrm{d}y + (x+y)\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C je kladně orientovaná kružnice dána rovnicemi:

$$x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z=0.$$

[0]

Příklad IV.2. Vypočítejte:

$$\int_C y^2\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C je kladně orientovaná hranice trojúhelníka s vrcholy $[1;0;0]$, $[0;1;0]$, $[0;0;1]$.

$[-1]$

Příklad IV.3. Vypočítejte:

$$\int_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C je kladně orientovaná kružnice dána rovnicemi:

$$x^2+y^2+z^2=r^2\ (r>0),\ x+y+z=0.$$

$[-3\pi r^2]$

Příklad IV.4. Vypočítejte:

$$\int_C yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C je kladně orientovaná kružnice dána rovnicemi:

$$x^2+y^2+z^2=r^2\ (r>0),\ x+y+z=0.$$

[0]

Příklad IV.5. Vypočítejte:

$$\int_C x(z-y)\,\mathrm{d}x + y(x-z)\,\mathrm{d}y + z(y-x)\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C je kladně orientovaná hranice trojúhelníka s vrcholy $[a;0;0]$, $[0;a;0]$, $[0;0;a]$ $(a>0)$. $[a^3]$

Příklad IV.6. Vypočítejte:

$$\int_C yz\,\mathrm{d}x + z\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}y + yx\,\mathrm{d}z,$$

kde C je křivka s parametrizací $\varphi(t) = (a\cos t; a\sin t; bt), t \in \langle 0; 2\pi\rangle$ $(a>0; b>0)$ s počátečním bodem $[a;0;0]$ a koncovým bodem $[a;0;2\pi b]$. $[-\pi^2 a^2 b]$

Příklad IV.7. Vypočítejte:

$$\int_C xyz\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C je kladně orientovaná kružnice dána rovnicemi:

$$x^2+y^2+z^2=9,\ z=0.$$

$[0]$

Příklad IV.8. Vypočítejte:

$$\iint_S x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S je vnější plocha kvádru, jehož stěny leží v rovinách:

$$x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=2,\ y=4,\ z=6.$$

$[144]$

Příklad IV.9. Vypočítejte:

$$\iint_S xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

kde S je vnější plocha čtyřstěnu, jehož stěny leží v rovinách:

$$x=0,\ y=0,\ z=0,\ 2x+3y+6z=12.$$

$[12]$

Příklad IV.10. Vypočítejte:

$$\iint_S (2z+3)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde plocha S je vnější strana kulové plochy:

$$x^2+y^2+z^2=9.$$

$[72\pi]$

Příklad IV.11. Vypočítejte:

$$\iint_S (2xz+3)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde plocha S je vnější povrch osminy koule ležící v prvním oktantu:

$$x^2+y^2+z^2=9,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$$

$\left[\frac{81\pi}{8}\right]$

Příklad IV.12. Vypočítejte:

$$\iint_S x^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde plocha S je vnější strana kulové plochy:

$$x^2+y^2+z^2=4.$$

$\left[\frac{384\pi}{5}\right]$

Příklad IV.13. Vypočítejte:

$$\int_C x\,\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}y+xyz\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C je kladně orientovaná kružnice $x^2+y^2=4$ v rovině $z=1$. [0]

Příklad IV.14. Vypočítejte:

$$\int_C x(2z-y)\,\mathrm{d}x+y(2x-z)\,\mathrm{d}y+z(2y-x)\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C je kladně orientovaná hranice trojúhelníka s vrcholy $[1;0;0]$, $[0;2;0]$, $[0;0;3]$.

$\left[\frac{73}{6}\right]$

Příklad IV.15. Vypočítejte:

$$\int_C x^2\,\mathrm{d}x+y^2\,\mathrm{d}y+z^2\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C je kladně orientovaná kružnice dána rovnicemi:

$$x^2+y^2+z^2=4,\ x+2y+3z=0.$$

[0]

Příklad IV.16. Vypočítejte:

$$\iint_S (xz-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde plocha S je vnější povrch čtvrtiny koule ležící v prvním a druhém oktantu:

$$x^2+y^2+z^2=9,\ \ y=0,\ z=0.$$

[0]

Příklad IV.17. Vypočítejte:

$$\iint_S x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + 3z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde plocha S je vnější strana poloviny kulové plochy ležící v prvním až čtvrtém oktantu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ z = 0.$$

[108π]

Příklad IV.18. Vypočítejte:

$$\iint_S y\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde plocha S je vnější povrch kužele:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},\ 0 \leq z \leq 2.$$

[0]

Příklad IV.19. Vypočítejte:

$$\iint_S x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde plocha S je vnější povrch válce:

$$x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1.$$

[3π]

Příklad IV.20. Vypočítejte:

$$\iint_S xy\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde plocha S je vnější povrch koule:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

[0]

Příklad IV.21. Vypočítejte:

$$\int_C (y - z)\,\mathrm{d}x + (z - x)\,\mathrm{d}y + (x - y)\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C je kladně orientovaná kružnice $x^2 + z^2 = 4$ v rovině $y = 1$. [-8π]

Příklad IV.22. Vypočítejte:

$$\int_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C je kladně orientovaná kružnice dána rovnicemi:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0.$$

[-3π]

Příklad IV.23. Vypočítejte:

$$\int_C (x+y)\,\mathrm{d}x + (x+z)\,\mathrm{d}y + (x+y)\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C je řez válcové plochy $x^2+y^2=2y$ rovinou $z=y$. $[\pi]$

Příklad IV.24. Vypočítejte:

$$\iint_S (x^3-yz)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^3-xz)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (z^3-xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S je vnější povrch koule:

$$x^2+y^2+z^2=18z.$$

$\left[\frac{18^5}{5}\pi\right]$

Příklad IV.25. Vypočítejte:

$$\iint_S xz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S je vnější plocha čtyřstěnu, jehož stěny leží v rovinách:

$$x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=3.$$

$\left[\frac{27}{8}\right]$

Příklad IV.26. Vypočítejte:

$$\iint_S (6y+1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

kde plocha S je vnější strana kulové plochy:

$$x^2+y^2+z^2=16.$$

$[512\pi]$

Příklad IV.27. Vypočítejte:

$$\int_C y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C je kladně orientovaná hranice trojúhelníka, jehož vrcholy jsou průsečíky roviny $3x+2y+6z=6$ se souřadnicovými osami. $[-6]$

Příklad IV.28. Vypočítejte:

$$\int_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C je průniková křivka ploch:

$$z=xy,\ x^2+y^2=1,$$

orientovaná souhlasně s pořadím vrcholů $[1;0;0]$, $[0;1;0]$, $[-1;0;0]$. $[-\pi]$

Příklad IV.29. Vypočítejte:

$$\int_C yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C je kladně orientovaná kružnice dána rovnicemi:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \ (r > 0),\ x + y + z = 0.$$

[0]

Příklad IV.30. Vypočítejte:

$$\int_C (x + y + z)\,\mathrm{d}x,$$

kde křivka C je kladně orientovaná hranice trojúhelníka s vrcholy $[1; 0; 0]$, $[0; 1; 0]$, $[0; 0; 1]$.

[0]

Příklad IV.31. Vypočítejte:

$$\int_C (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y,$$

kde křivka C je hranice obdélníka ohraničeného přímkami:

$$x = 0,\ y = 0,\ x = 2,\ y = 4.$$

[16]

Příklad IV.32. Vypočítejte:

$$\iint_S xz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + yz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S je vnější plocha čtyřstěnu:

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z \leq 1.$$

$\left[\frac{1}{8}\right]$

Příklad IV.33. Vypočítejte:

$$\int_C z\,\mathrm{d}x + yz^2\,\mathrm{d}y - x\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C je daná podmínkami:

$$x^2 + z^2 = 4,\ \ y = 1,\ \ z \geq 0,$$

počáteční bod křivky C je bod $[2; 1; 0]$. $[-4\pi]$

Příklad IV.34. Vypočítejte:

$$\iint_S y^2 z\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 3y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + x^2 y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S je vnější plocha povrchu čtyřtěnu:

$$3x + y + z \leq 3,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0.$$

$\left[\frac{9}{2}\right]$

Příklad IV.35. Vypočítejte:

$$\int_C y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y - z^2\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C je daná podmínkami:

$$x^2 + y^2 = 4,\ z = 2,\ y \geq 0,$$

počáteční bod křivky C je bod $[2; 0; 2]$. $[-4\pi]$

Příklad IV.36. Vypočítejte:

$$\iint_S 3x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + xz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde S je vnější plocha povrchu čtyřtěnu:

$$x + y + 2z \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0.$$

$[8]$

Příklad IV.37. Vypočítejte:

$$\int_C z\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y - x\,\mathrm{d}z,$$

kde křivka C je daná podmínkami:

$$x^2 + z^2 = 9,\ z = y$$

a probíhá body $[-3; 0; 0]$, $[0; 3; 3]$ a $[3; 0; 0]$ v uvedeném pořadí. $[18\pi]$

Příklad IV.38. Vypočítejte:

$$\iint_S (y + z)\,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami:

$$x^2 + z^2 = 4,\ 0 \leq y \leq 1.$$

$[2\pi]$

Příklad IV.39. Vypočítejte:

$$\int_C y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z,$$

kde křivka C je daná podmínkami:

$$x^2 + y^2 = 9,\ z = 2y$$

a probíhá body $[-2; 0; 0]$, $[0; 2; 4]$ a $[2; 0; 0]$ v uvedeném pořadí. $[8\pi]$

Příklad IV.40. Vypočítejte:

$$\iint_S (x + y)\,\mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami:

$$y^2 + z^2 = 9,\ 0 \leq x \leq 2.$$

$[12\pi]$

Příklad IV.41. Vypočítejte:

$$\iint_S x \, \mathrm{d}S,$$

kde plocha S je určena podmínkami:

$$x + y + z = 2, \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; z \geq 0$$

$$\left[\tfrac{4}{\sqrt{3}}\right]$$

Část V - Mocninné řady

Příklad V.1. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n8^n}$$

$[R = 8,\ I^* = \langle -7, 9)]$

Příklad V.2. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x+1)^n}{n^2 2^n}$$

$\left[R = \frac{2}{3},\ I^* = \left\langle -1, \frac{1}{3} \right\rangle\right]$

Příklad V.3. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n$$

$[R = +\infty,\ I^* = (-\infty, +\infty)]$

Příklad V.4. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$[R = 1,\ I^* = \langle 0, 2)]$

Příklad V.5. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n+2) x^{n+1}$$

$[R = 1,\ I^* = (-1, 1)]$

Příklad V.6. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n (x+1)^n$$

$\left[R = \frac{3}{2},\ I^* = \left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)\right]$

Příklad V.7. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n}(x-2)^n$$

$\left[R = \frac{1}{5},\ I^* = \left\langle \frac{9}{5}, \frac{11}{5} \right)\right]$

Příklad V.8. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{3^{2n}} x^n$$

$[R = 9,\ I^* = (-9, 9)]$

Příklad V.9. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n+1} x^{2n+1}$$

$[R = 1,\ I^* = (-1, 1)]$

Příklad V.10. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^{3n}}{n8^n}$$

$[R = 2,\ I^* = \langle -1, 3)]$

Příklad V.11. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n!(x+1)^n$$

$[R = 0,\ I^* = \{-1\}]$

Příklad V.12. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n} x^n$$

$[R = 1,\ I^* = (-1, 1)]$

Příklad V.13. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n3^{n-1}}$$

$[R = 3,\ I^* = \langle -3, 3)]$

Příklad V.14. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{2\sqrt{n}}$$

$[R = 1,\ I^* = \langle 0, 2\rangle]$

Příklad V.15. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+2)(x+1)^n$$

$[R = 1,\ I^* = (-2, 0)]$

Příklad V.16. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{n!}$$

$[R = +\infty,\ I^* = (-\infty, +\infty)]$

Příklad V.17. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n}(x-3)^n$$

$[R = 0,\ I^* = \{3\}]$

Příklad V.18. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+2)^{n+1}}{n(n+3)}$$

$[R = 1,\ I^* = \langle -3, -1\rangle]$

Příklad V.19. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$$

$[R = 1,\ I^* = (-1, 1)]$

Příklad V.20. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{2n-1}$$

$\left[R = \frac{1}{2},\ I^* = \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right]$

Příklad V.21. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+8)^{3n}}{n^2}$$

$[R = 8,\ I^* = \langle -9, -7 \rangle]$

Příklad V.22. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-n)^{2n} x^{2n}$$

$[R = 0,\ I^* = \{0\}]$

Příklad V.23. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$$

$[R = 2,\ I^* = \langle -2, 2)]$

Příklad V.24. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{100}\right)^n x^n$$

$[R = 0,\ I^* = \{0\}]$

Příklad V.25. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} x^n$$

$\left[R = \frac{1}{2},\ I^* = \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right]$

Příklad V.26. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{10^n} x^n$$

$[R = 10,\ I^* = (-10, 10)]$

Příklad V.27. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}$$

$[R = +\infty,\ I^* = (-\infty, +\infty)]$

Příklad V.28. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}(x-2)^n$$

$[R = +\infty,\ I^* = (-\infty, +\infty)]$

Příklad V.29. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{2^n}(x-2)^n$$

$[R = 2,\ I^* = (0, 4)]$

Příklad V.30. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)(x-1)^{2n}$$

$[R = 2,\ I^* = (0, 2)]$

Příklad V.31. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n+1} x^{2n+1}$$

$[R = 1,\ I^* = (-1, 1)]$

Příklad V.32. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{3^{3n}} x^n$$

$[R = 27,\ I^* = (-27, 27)]$

Příklad V.33. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n-1}}(x-2)^n$$

$[R = 5,\ I^* = (-3, 7)]$

Příklad V.34. Určete poloměr a obor bodové konvergence mocninné řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ \frac{n}{8^n \left(n^2+1\right)}(x-2)^n$$

$[R =,\ I^* =]$

Část VI - Taylorovy řady

Příklad VI.1. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \sin(2x), \quad x_0 = 0$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1},\ I^{**} = (-\infty, +\infty)\right]$$

Příklad VI.2. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \cos(2x), \quad x_0 = 0$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n},\ I^{**} = (-\infty, +\infty)\right]$$

Příklad VI.3. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = e^{-x}, \quad x_0 = 0$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!},\ I^{**} = (-\infty, +\infty)\right]$$

Příklad VI.4. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \cosh x, \quad x_0 = 0$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},\ I^{**} = (-\infty, +\infty)\right]$$

Příklad VI.5. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \sinh x, \quad x_0 = 0$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ I^{**} = (-\infty, +\infty)\right]$$

Příklad VI.6. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = e^{5x}, \quad x_0 = 0$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n x^n}{n!},\ I^{**} = (-\infty, +\infty)\right]$$

Příklad VI.7. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 0$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} x^n,\ I^{**} = (-1, 1)\right]$$

Příklad VI.8. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \frac{1}{1-2x}, \quad x_0 = -2$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{5^{n+1}}(x+2)^n,\ I^{**} = \left(-\tfrac{9}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\right]$$

Příklad VI.9. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \sin x, \quad x_0 = \pi$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(x-\pi)^{2n+1},\ I^{**} =\right]$$

Příklad VI.10. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \cos x, \quad x_0 = \pi$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(x-\pi)^{2n},\ I^{**} = (-\infty, +\infty)\right]$$

Příklad VI.11. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \ln(1+x), \quad x_0 = 0$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1},\ I^{**} = (-1, 1)\right]$$

Příklad VI.12. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \ln(1-x), \quad x_0 = 0$$

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{x^n}{n},\ I^{**} = (-1, 1)\right]$$

Příklad VI.13. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \ln(1+2x), \quad x_0 = 0$$

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}x^n,\ I^{**} = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\right]$$

Příklad VI.14. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), \quad x_0 = 1$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{2n}(x-1)^{2n},\ I^{**} = (-\infty, +\infty)\right]$$

Příklad VI.15. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = x \sin x, \quad x_0 = 0$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+2},\ I^{**} =\right]$$

Příklad VI.16. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \sin^2 x, \quad x_0 = 0$$

$$\left[\tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\tfrac{(2x)^{2n}}{(2n)!},\ I^{**} = (-\infty, +\infty)\right]$$

Příklad VI.17. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \cos^2 x, \quad x_0 = \pi$$

$$\left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\tfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}(x-\pi)^{2n},\ I^{**} = (-\infty, +\infty)\right]$$

Příklad VI.18. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \sqrt[3]{(1+x)^2}, \quad x_0 = 0$$

$$\left[1 + \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{9}x^2 + \tfrac{4}{81}x^3 - \tfrac{7}{243}x^4 + \cdots,\ I^{**} = (-1, 1)\right]$$

Příklad VI.19. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x_0 = 0$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n},\ I^{**} = (-1, 1)\right]$$

Příklad VI.20. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad x_0 = 0$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n},\ I^{**} = (-1, 1)\right]$$

Příklad VI.21. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = x\cos x, \quad x_0 = 0$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n+1},\ I^{**} = (-\infty, +\infty)\right]$$

Příklad VI.22. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \ln x, \quad x_0 = 2$$

$$\left[\ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n+1}}{2^n n}(x-2)^n,\ I^{**} = (1, 3)\right]$$

Příklad VI.23. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^4}, \quad x_0 = 0$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \tfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} x^n,\ I^{**} = (-1, 1)\right]$$

Příklad VI.24. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}, \quad x_0 = 0$$

$$\left[\sum_{n=2}^{+\infty} \tfrac{(-1)^n}{(n-2)!} x^{2n-2},\ I^{**} = \right]$$

Příklad VI.25. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 2$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} (x-2)^n,\ I^{**} = (1, 3)\right]$$

Příklad VI.26. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \cos(x^3), \quad x_0 = 0$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(-1)^n x^{6n}}{(2n)!},\ I^{**} = \right]$$

Příklad VI.27. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = xe^{-x}, \quad x_0 = 0$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(-1)^n}{n!} x^{n+1},\ I^{**} = \right]$$

Příklad VI.28. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = x \ln(1+x), \quad x_0 = 0$$

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{n+1}}{n} x^{n+1},\ I^{**} = \right]$$

Příklad VI.29. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \sin(x^2), \quad x_0 = 0$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \tfrac{x^{4n+2}}{(2n+1)!},\ I^{**} = (-\infty, +\infty)\right]$$

Příklad VI.30. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \ln(x+2), \quad x_0 = 1$$

$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n\, n}(x-1)^n,\ I^{**} =\right]$

Příklad VI.31. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = -2$$

$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(x+2)^n,\ I^{**} =\right]$

Příklad VI.32. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}, \quad x_0 = 0$$

$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!},\ I^{**} = (-\infty, +\infty)\right]$

Příklad VI.33. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = x \cdot \ln(1 + x^2), \quad x_0 = 1$$

$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n},\ I^{**} =\right]$

Příklad VI.34. Nalezněte Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x}, \quad x_0 = 0$$

$\left[\sum_{n=0}^{+\infty},\ I^{**} =\right]$

Část VII - Fourierovy řady

Příklad VII.1. Nalezněte Fourierův rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, má-li periodická funkce f na základním intervalu periodicity tvar:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle 0, 2), \\ -1, & x \in \langle 2, 4). \end{cases}$$

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} x\right), \ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.2. Nalezněte Fourierův rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, má-li periodická funkce f na základním intervalu periodicity tvar:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \in \langle 0, 2), \\ 3-x, & x \in \langle 2, 4). \end{cases}$$

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-8}{(2n-1)^2\pi^2} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} x\right), \ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.3. Nalezněte Fourierův rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, má-li periodická funkce f na základním intervalu periodicity tvar:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle 0, 1), \\ 1, & x \in \langle 1, 2). \end{cases}$$

$$\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2n-1)\pi} \sin\left((2n-1)\pi x\right), \ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.4. Nalezněte Fourierův rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, má-li periodická funkce f na základním intervalu periodicity tvar:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle 0, 1), \\ 0, & x \in \langle 1, 2). \end{cases}$$

$$\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \sin\left((2n-1)\pi x\right), \ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.5. Nalezněte Fourierův rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, má-li periodická funkce f na základním intervalu periodicity tvar:

$$f(x) = x, \ x \in \langle 0, 1)$$

$$\left[\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\pi} \sin\left(2n\pi x\right), \ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.6. Nalezněte Fourierův rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, má-li periodická funkce f na základním intervalu periodicity tvar:

$$f(x) = x^2,\ x \in \langle 0, \pi)$$

$$\left[\tfrac{\pi^2}{3} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{n^2}\cos(2nx) + \tfrac{\pi}{n}\sin(2nx)\right),\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.7. Nalezněte Fourierův rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, má-li periodická funkce f na základním intervalu periodicity tvar:

$$f(x) = x^2,\ x \in \langle -\pi, \pi)$$

$$\left[\tfrac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx),\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.8. Nalezněte Fourierův rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, má-li periodická funkce f na základním intervalu periodicity tvar:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in \langle -\pi, 0), \\ \ \ x^2, & x \in \langle 0, \pi). \end{cases}$$

$$\left[4\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\tfrac{\pi(-1)^{n+1}}{2n} + \tfrac{(-1)^n - 1}{\pi n^3}\right)\sin(nx),\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.9. Nalezněte Fourierův rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, má-li periodická funkce f na základním intervalu periodicity tvar:

$$f(x) = x^2,\ x \in \langle 0, 1)$$

$$\left[\tfrac{1}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\tfrac{\cos(2n\pi x)}{n^2\pi^2} - \tfrac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}\right),\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.10. Nalezněte Fourierův rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, má-li periodická funkce f na základním intervalu periodicity tvar:

$$f(x) = 1 - x,\ x \in \langle 0, 1)$$

$$\left[\tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{\sin(2n\pi x)}{n\pi},\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.11. Nalezněte Fourierův rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, má-li periodická funkce f na základním intervalu periodicity tvar:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle 0, \pi), \\ 0, & x \in \langle \pi, 2\pi). \end{cases}$$

$$\left[\tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{2}{(2n-1)\pi}\sin((2n-1)x),\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.12. Nalezněte Fourierův rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, má-li periodická funkce f na základním intervalu periodicity tvar:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle 0, \pi), \\ 1, & x \in \langle \pi, 2\pi). \end{cases}$$

$$\left[\tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{-2}{(2n-1)\pi} \sin\left((2n-1)x\right),\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.13. Nalezněte Fourierův rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, má-li periodická funkce f na základním intervalu periodicity tvar:

$$f(x) = |x|,\ x \in \langle -\pi, \pi)$$

$$\left[\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{(2n-1)^2} \cos\left((2n-1)x\right),\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.14. Nalezněte Fourierův rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, má-li periodická funkce f na základním intervalu periodicity tvar:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \langle -1, 0), \\ x, & x \in \langle 0, 1). \end{cases}$$

$$\left[-\tfrac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) + \tfrac{1-2(-1)^n}{n\pi} \sin(n\pi x),\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.15. Nalezněte sinový rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = x - x^2,\ x \in \langle 0, 1)$$

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{8}{(2n-1)^3\pi^3} \sin((2n-1)x),\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.16. Nalezněte sinový rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \cos x,\ x \in \langle 0, \pi)$$

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{8n}{(4n^2-1)\pi} \sin(2nx),\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.17. Nalezněte sinový rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = x(\pi - x),\ x \in \langle 0, \pi)$$

$$\left[\tfrac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)^3},\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.18. Nalezněte sinový rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in \langle 0, 2), \\ 3 - x, & x \in \langle 2, 4). \end{cases}$$

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty},\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.19. Nalezněte kosinový rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle 0, 1), \\ 0, & x \in \langle 1, 4). \end{cases}$$

$$\left[\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right),\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.20. Nalezněte kosinový rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = x(\pi - x),\ x \in \langle 0, \pi)$$

$$\left[\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos(2nx),\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.21. Nalezněte kosinový rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = \sin(2x),\ x \in \langle 0, \pi)$$

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-8}{pi((2n-1)^2-4)} \cos(nx) \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right),\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.22. Nalezněte kosinový rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = x,\ x \in \langle 0, \pi)$$

$$\left[\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2},\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.23. Nalezněte Fourierův rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, má-li periodická funkce f na základním intervalu periodicity tvar:

$$f(x) = 1 - x^2,\ x \in \langle -1, 1)$$

$$\left[\frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(n\pi x),\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.24. Nalezněte Fourierův rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, má-li periodická funkce f na základním intervalu periodicity tvar:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x, & x \in \langle -\pi, 0), \\ \frac{\pi}{2} - x, & x \in \langle 0, \pi). \end{cases}$$

$$\left[\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2},\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.25. Nalezněte Fourierův rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, má-li periodická funkce f na základním intervalu periodicity tvar:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle -\pi, 0), \\ \sin x, & x \in \langle 0, \pi). \end{cases}$$

$$\left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1},\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.26. Nalezněte Fourierův rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, má-li periodická funkce f na základním intervalu periodicity tvar:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \langle -\pi, -\frac{\pi}{2}), \\ 0, & x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ 1, & x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi). \end{cases}$$

$$\left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right) \sin(nx),\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.27. Nalezněte Fourierův rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, má-li periodická funkce f na základním intervalu periodicity tvar:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \langle -\pi, 0), \\ 0, & x \in \langle 0, \pi). \end{cases}$$

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty},\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.28. Nalezněte Fourierův rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, má-li periodická funkce f na základním intervalu periodicity tvar:

$$f(x) = 1 + x,\ x \in \langle -\pi, \pi)$$

$$\left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx),\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.29. Nalezněte Fourierův rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, má-li periodická funkce f na základním intervalu periodicity tvar:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle -1, 0), \\ x, & x \in \langle 0, 1). \end{cases}$$

$$\left[\frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) - \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x),\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.30. Nalezněte Fourierův rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, má-li periodická funkce f na základním intervalu periodicity tvar:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \langle -3, 0), \\ 1, & x \in \langle 0, 3). \end{cases}$$

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 - 2(-1)^n}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right),\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.31. Nalezněte Fourierův rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, má-li periodická funkce f na základním intervalu periodicity tvar:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle -\pi, 0), \\ x, & x \in \langle 0, \pi). \end{cases}$$

$$\left[\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\cos((2n-1)x)}{2n-1} + \frac{(-1)^{n-1} \sin(nx)}{n}\right),\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.32. Nalezněte Fourierův rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, má-li periodická funkce f na základním intervalu periodicity tvar:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle -2, 0), \\ 2, & x \in \langle 0, 2). \end{cases}$$

$$\left[1 + \tfrac{4}{\pi} \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{2n-1} \sin \tfrac{(2n-1)\pi x}{2},\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.33. Nalezněte sinový rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, je-li:

$$f(x) = -1,\ x \in \langle 0, \pi)$$

$$\left[-\tfrac{4}{\pi} \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{\sin((2n-1)x)}{2n-1},\ I^{**} = \right]$$

Příklad VII.34. Nalezněte Fourierův rozvoj funkce f vzhledem k úplnému trigonometrickému systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence, má-li periodická funkce f na základním intervalu periodicity tvar:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in \langle -4, 0), \\ 0, & x \in \langle 0, 4). \end{cases}$$

$$\left[\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty},\ I^{**} = \right]$$