

Matematika III (Numerická matematika)

Fakulta strojní

Jiří Hozman ¹

jiri.hozman@tul.cz

¹Technická univerzita v Liberci
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

únor 2015

Numerická matematika

Anotace:

- numerické metody a jejich paralelizace,
- řešení soustav lineárních algebraických rovnic,
- řešení nelineárních rovnic,
- interpolace funkce a numerická integrace,
- řešení ODR,
- metoda sítí pro PDR 2.řádu.

Časová náročnost:

- 5 konzultací (G315, Univezitní náměstí 1),
- 2 soustředění (G315, Univezitní náměstí 1) - zápočet.

Literatura:

- Vicher , M.: Numerika (<http://mbox.troja.mff.cuni.cz/vicher>),
- Mošová, V.: Numerické metody,
- Černá, D.: studijní materiály KMD/MA3-P pro denní studium

Konzultace:

- Pá 9:30 - 10:30, budova G, 4.patro, místnost č. 04070/454
- Út, St 10:00 - 14:00 (pouze po předchozí domluvě), budova G, 4.patro

Elektronické texty:

- <http://kmd.fp.tul.cz/> (Hozman → Výuka → MA3-K)

Konzultace 1

Konzul. 1

Numerické
metody
Numerická
lineární
algebra
Přímé
metody
Gaussova
eliminace
LU-
rozklad
Choleského
rozklad
Složitost
přímých
metod

- numerické metody
- paralelizace numerických metod - samostudium
- přímé metody řešení úlohy $Ax = b$

Numerické metody (1)

Matematický model je umělý objekt, který reflektuje a reprodukuje základní vlastnosti, vztahy (strukturu) a funkce konkrétního objektu nebo jevu (skutečnosti) jednodušším způsobem a může tedy být využit pro vyšetřování a analýzu skutečnosti.

- redukuje realitu,
- zjednodušuje práci s objektem nebo jevem,
- účel modelu je třeba vzít v úvahu při výběru vlastností modelovaného objektu nebo jevu,
- často má vlastnosti, které neodpovídají ničemu v původním objektu nebo jevu,
- často máme velké množství modelů, které jsou více či méně vhodné k analýze a popisu konkrétních vlastností.

Účel modelu:

- získávání informací, např. optimalizace tvaru křídla letadla,
- šíření informací, např. letecký simulátor,
- technické aplikace, např. autopilot.

Žádná analýza modelu nebo simulace nemůže nahradit empirické experimenty.

Matematické modely se však často formulují jako úlohy spojité, u nichž se mezi vstupními nebo výstupními daty vyskytují **spojité funkce**.

Diskretizace je proces při němž spojitý problém nahradíme vhodným diskrétním problémem, který pracuje s konečným počtem vyhodnocení aritmetických operací.

Numerické úlohy patří do skupiny tzv. diskrétních úloh.

Numerické metody (2)

Numerickou úlohou rozumíme jasný a jednoznačný popis vztahu mezi **konečným** počtem vstupních a výstupních dat (reálných čísel). Konečnost vstupního a výstupního souboru nám umožňuje při řešení použít počítač. Postupy řešení numerických úloh se nazývají numerické nebo počítačové metody.

Omezení numerických výpočtů:

- počítače používají **konečnou množinu racionálních čísel** (floating point numbers) a ostatní čísla musí být aproximována těmito čísly,
- výsledky aritmetických operací musí být **aproximovány**, protože aritmetické operace **nejsou uzavřené** na této množině,
- funkční hodnoty elementárních funkcí musí být aproximovány,
- **neexistují** libovolně velká ani libovolně malá čísla,
- výpočty mohou obsahovat jen **konečný počet kroků**,
- obvykle nelze spočítat přesný výsledek,
- výpočetní náročnost všech výpočtů s maximální přesností nelze zanedbat,
- cílem je nalézt přibližné řešení, které splní požadavky uživatele na přesnost a je co nejméně výpočetně náročné.

Numerický problém = matematický problém + požadovaná přesnost výsledků.

Numerické metody musí obsahovat prostředky k odhadům přesnosti přibližných řešení.

Chyby v numerických výpočtech:

- **chyba matematického modelu** - místo skutečného technického nebo fyzikálního problému řešíme jeho matematický model,
- **aproximační chyba** - vzniká při aproximaci matematického modelu jednodušší úlohou (např. z důvodu náročnosti či nemožnosti řešení původního modelu),
- **chyby vstupních dat** - vstupní data mohou být naměřené veličiny, jejichž nepřesnost je dána rozlišovací schopností měřících zařízení,
- **chyba diskretizační** - je důsledkem nahrazení spojitého problému diskrétním,
- **zaokrouhlovací chyba** - k zaokrouhlování mezivýsledků dochází v průběhu celého výpočtu, protože pro ukládání čísel je k dispozici pouze omezený paměťový prostor
- velikosti jednotlivých druhů chyb by měly být vyvážené
- pro mnoho numerických metod je možné odvodit odhad chyby

Nastane-li při numerickém výpočtu situace, kdy se zaokrouhlovací chyby nekontrolovatelně hromadí a mohou znehodnotit výsledek, nazýváme takovýto výpočet **numericky nestabilní**. Za **numericky stabilní výpočet** označíme takový výpočet, který je málo citlivý na vliv zaokrouhlovacích chyb.

Numerické metody (4)

Definice (Absolutní a relativní chyba:) *Nechť \bar{x} je přesná hodnota reálného čísla a x je jeho aproximace. Rozdíl $e(x) = \bar{x} - x$ se nazývá absolutní chyba. Odhad absolutní chyby je číslo $\varepsilon(x)$, pro které platí*

$$|\bar{x} - x| \leq \varepsilon(x).$$

Je-li $x \neq 0$, pak číslo

$$r(x) = \frac{\bar{x} - x}{x}$$

se nazývá relativní. chyba. Odhad relativní chyby je číslo $\delta(x)$, pro které platí

$$\left| \frac{\bar{x} - x}{x} \right| \leq \delta(x).$$

V případě, kdy přesná hodnota i její aproximace nejsou reálná čísla, lze definice uvedené výše snadno rozšířit nahrazením absolutní hodnoty vhodnou normou.

Relativní chyba a její odhad se často udávají v procentech. Nerovnost

$$|\bar{x} - x| \leq \varepsilon(x)$$

znamená, že $\bar{x} \in \langle x - \varepsilon, x + \varepsilon \rangle$, což symbolicky zapisujeme $\bar{x} = x \pm \varepsilon$.

Poznámka: *Při odčítání blízkých čísel x_1, x_2 má na velikost relativní chyby rozhodující vliv zlomek $1/|x_1 - x_2|$, který ukazuje, že dochází ke ztrátě relativní přesnosti.*

Numerické metody (5)

Konvergence a řád numerické metody

Numerickou metodu budeme považovat za **konvergentní**, pokud v nějakém smyslu lze touto metodou získat libovolně přesné řešení dané úlohy, tedy je-li možné chybu metody libovolně zmenšit, zpravidla snížením kroku, nebo zvýšením počtu uzlů, iterací apod.

Definice (Řád chyby numerické metody): *Nechť h je parametr charakterizující metodu (např. krok metody). Řekneme, že chyba metody $e(h)$ je řádu $f(h)$, kde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jestliže existují konstanty h_0 a C tak, že*

$$e(h) \leq C \cdot f(h) \quad \forall h \leq h_0$$

a značíme pak $e(h) = O(f(h))$.

Speciálně, je-li f mocninná funkce, pak platí:

$$e(h) \leq C \cdot h^p \quad \forall h \leq h_0,$$

kde C je konstanta nezávislá na h , a číslo p nazýváme řádem metody.

Třídy konvergence a řádu metody

- lineární konvergence: $e(h) = O(h)$
- kvadratická konvergence: $e(h) = O(h^2)$
- kubická konvergence: $e(h) = O(h^3)$

Numerické metody (6)

Matematickou úlohu lze chápat jako **zobrazení** $y = U(x)$, které vstupním datům $x \in D$ přiřazuje výstupní data $y \in R$. Řekneme, že matematická úloha

$$y = U(x), \quad x \in D, y \in R$$

je **korektní (well-posed)**, když jsou splněny následující dvě podmínky

- pro každé $x \in D$ existuje právě jedno $y \in R$,
- řešení **závisí spojitě** na vstupních datech:

$$x \rightarrow a \Rightarrow U(x) \rightarrow U(a).$$

Definice (Číslo podmíněnosti): *Uvažujem úlohu $\bar{y} = U(\bar{x})$. Necht' x je porušená vstupní hodnota a y je odpovídající porušená hodnota výsledku. Číslem podmíněnosti úlohy U nazýváme číslo C_U , pro které platí*

$$|r(y)| = C_U |r(x)|,$$

kde $r(x)$ a $r(y)$ jsou relativní chyby.

Číslo podmíněnosti vyjadřuje citlivost úlohy na poruchu ve vstupních datech. Je-li $C_U \approx 1$, říkáme, že úloha U je **dobře podmíněná**. Jinými slovy, korektní úloha je dobře podmíněná, jestliže malá změna ve vstupních datech způsobí malou změnu ve výstupních datech. Je-li $C_U \gg 1$, říkáme, že úloha U je **špatně podmíněná**.

V případě, že můžeme určit jenom odhady relativních chyb, stanovíme číslo podmíněnosti přibližně

$$C_U \approx \frac{\delta(y)}{\delta(x)}.$$

Numerické metody (7)

Algoritmus

Algoritmem budeme nazývat teoretický princip či přesný postup řešení daného typu úloh.

Složitost algoritmu

Nechť N je parametr charakterizující algoritmus (např. parametr charakterizující velikost dat, velikost vektoru, počet uzlů). **Složitost algoritmu** $C(N)$ je veličina charakterizující výpočtovou náročnost algoritmu, nejčastěji počet operací s plovoucí řádovou čárkou.

Definice (Složitost algoritmu): Řekneme, že složitost algoritmu $C(N)$ je řádu $f(N)$, kde $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, jestliže existují konstanty N_0 a C tak, že

$$C(N) \leq C \cdot f(N) \quad \forall N \geq N_0$$

a značíme pak $C(N) = O(f(N))$.

Třídy složitosti algoritmu

- konstantní: $O(1)$
- logaritmická: $O(\log N)$
- lineární: $O(N)$ nebo $O(N \log N)$
- polynomiální: $O(N^m)$, $m \in \mathbf{N}$ - kvadratická ($m = 2$) a kubická ($m = 3$)
- exponenciální: $O(c^N)$, $c \in \mathbf{R}^+$

Numerická lineární algebra (1)

Definice (Norma vektoru:) *Nechť vektor $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $\|\cdot\|_p$ - norma vektoru u je definována vztahem:*

$$\|u\|_p = \begin{cases} (\sum_{i=1}^n |u_i|^p)^{1/p}, & \text{pro } p \in \mathbb{N}, \\ \max_{1 \leq i \leq n} |u_i|, & \text{pro } p = +\infty. \end{cases}$$

Norma $\|\cdot\|_1$ se nazývá **oktaedrická**, norma $\|\cdot\|_2$ **Euklidovská** a norma $\|\cdot\|_\infty$ **krychlová**.

Definice (Norma matice a spektrální poloměr:) *Nechť je dána matice $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Matricovou p - normu definujeme následně:*

$$\|A\|_p = \max_{u \neq 0} \frac{\|Au\|_p}{\|u\|_p}$$

Frobeniovu (Schurovu) normu:

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

Spektrální poloměr matice A je definován:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ je vlastní číslo matice } A\}.$$

Numerická lineární algebra (2)

Věta (Vlastnosti maticové normy:) *Nechť jsou dány matice $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak pro libovolnou normu matice $\|\cdot\|$ platí:*

- $\|A\| \geq 0$ a přitom $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A$ je nulová matice,
- $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,
- $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Věta (Vlastnosti spektrálního poloměru:) *Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a libovolnou normu matice $\|\cdot\|$ platí*

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

Věta (Základní maticové normy:) *Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí:*

a) *sloupcová:*

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

b) *řádková:*

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

c) $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$,

d) *Je-li matice A symetrická, potom $\|A\|_2 = \rho(A)$.*

Numerická lineární algebra (3)

Jednou ze základních numerických úloh je řešení soustavy lineárních algebraických rovnic, na které lze převést řadu optimalizačních problémů či numerického řešení diferenciálních rovnic.

Budeme se zabývat numerickým řešením soustavy m rovnic s n neznámými:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m,$$

kde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ pro $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

Častěji se však můžeme setkat s vektorovým zápisem soustavy:

$$Ax = b.$$

Matici $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ nazýváme maticí soustavy, vektor $b = (b_1, \dots, b_m)$ vektorem pravé strany a vektor $x = (x_1, \dots, x_n)$ se nazývá vektor neznámých.

Je-li $b \neq 0$, soustava se nazývá **nehomogenní**. Je-li $b = 0$, soustava se nazývá **homogenní**.

Množina

$$\text{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}.$$

se nazývá **jádro (nulový prostor)** matice A .

Numerická lineární algebra (4)

Dále zavádíme pojem **rozšířená matice soustavy**

$$A_b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$$

Věta (Frobeniova věta:) *Nechť $Ax = b$ představuje soustavu algebraických rovnic typu $m \times n$, kde $n \leq m$.*

- Je-li $\text{hod}(A) \neq \text{hod}(A_b)$, potom soustava $Ax = b$ nemá řešení.*
- Je-li $\text{hod}(A) = \text{hod}(A_b) = n$, potom soustava $Ax = b$ má právě jedno řešení.*
- Je-li $\text{hod}(A) = \text{hod}(A_b) < n$, potom soustava $Ax = b$ má nekonečně mnoho řešení.*

Matice soustavy, která má mnohem více nulových prvků než nenulových prvků se nazývá **řádká**. Matice, která není řádká se nazývá **hustá (plná)**.

Matice $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, která má nenulový determinant se nazývá regulární, v opačném případě hovoříme o tzv. **singulární matici**.

Ke každé regulární matici A existuje jediná inverzní matice A^{-1} , pro niž platí

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

kde I je matice jednotková.

Tedy pro řešení soustavy lineárních algebraických rovnic lze odvodit vzorec

$$x = A^{-1}b.$$

Numerická lineární algebra (5)

Věta (Číslo podmíněnosti matice:) *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je regulární matice. Číslo podmíněnosti matice A je definováno předpisem*

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

Věta (O podmíněnosti matice:) *Nechť A je regulární čtvercová matice řádu n a nechť $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$ a $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ jsou vektory takové, že platí:*

$$Ax = b.$$

Dále nechť $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$ a $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ jsou vektory takové, že platí:

$$A\bar{x} = \bar{b}.$$

Potom

$$\frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|b - \bar{b}\|}{\|b\|}.$$

Jestliže relativní malé změny prvků matice způsobí relativně velké změny v řešení je matice **špatně podmíněná**.

Přímé metody (1)

Numerické metody řešení soustavy lineárních algebraických rovnic dělíme na metody přímé a iterační.

Přímé metody řešení soustav lineárních rovnic jsou založeny na **eliminaci** neznámých. Základní idea je založena na tom, že z některé rovnice vyjádříme jednu neznámou a dosadíme ji do ostatních rovnic tak, aby soustava po eliminaci byla **snáze řešitelná než soustava původní**.

Základní algoritmus tohoto typu je **Gaussova eliminační metoda**. V maticovém zápisu ji odpovídá **LU-rozklad matice**. Charakteristickým rysem přímých metod je výpočet (přesného) řešení po **konečném počtu** eliminací, tj. po **konečném počtu aritmetických operací**.

Mezi přímé metody ředíme

- Gaussovu eliminaci
- Gauss-Jordanovu eliminaci
- LU-rozklad
- Choleského rozklad

Gaussova eliminace (GEM)

Uvažujme soustavu $Ax = b$, kde A je čtvercová regulární matice řádu n . Gaussova eliminace se skládá z následujících dvou částí:

- **přímý chod GEM** - po $n - 1$ krocích dostaneme pomocí známých elementárních transformací soustavu s horní trojúhelníkovou maticí $Ux = y$, která je ekvivalentní s původní soustavou.

```
for  $k = 1, \dots, n - 1$   
  for  $i = k + 1, \dots, n$   
     $a_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$   
    for  $j = k + 1, \dots, n$   
       $a_{ij} = a_{ij} - a_{ik} a_{kj}$   
    end  
     $b_i = b_i - a_{ik} b_k$   
  end  
end
```

- **zpětný chod GEM** - výpočet řešení $Ux = y$ postupným dosazováním 'od konce'

```
for  $i = n, \dots, 1$   
   $x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right)$   
end
```

Výběr hlavního prvku (pivotace)

Prvek a_{kk} , který je v k -tém kroku Gaussovy eliminace na pozici (k, k) v matici A a kterým dělíme, se nazývá **pivot** neboli **hlavní prvek**. Pokud je tento prvek malý ve srovnání s ostatními prvky, může dojít k velkým zaokrouhlovacím chybám, příp. je-li tento prvek nulový nemůžeme s ním dělit.

Cílem je tedy vybrat hlavní prvek tak, aby byl co největší v absolutní hodnotě. Tento postup lze snadno realizovat přehazováním řádků. Do algoritmu dopředného chodu GEM stačí na začátek k -té fáze vsunout následující doplněk:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Najdi } p, p \geq k, \text{ takové, že } |a_{pk}^{(k)}| = \max\{|a_{ik}^{(k)}|, i \geq k\}, \\ \text{Prohod' } p\text{-tý a } k\text{-tý řádek matice v } k\text{-té fázi.} \end{array} \right.$$

Tento proces se nazývá **částečná** nebo také **sloupcová pivotace**.

Algoritmus dopředného chodu GEM s výběrem hlavního prvku je použitelný pro každou regulární matici.

Gaussova eliminace (3)

Gaussova eliminace pro třídiagonální matici

Definice (Třídiagonální matice:) Matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nazýváme třídiagonální, jestliže pro jednotlivé složky matice platí

$$a_{ij} = 0 \quad \text{pro} \quad |i - j| > 1.$$

$$A = \begin{pmatrix} s_1 & t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ r_2 & s_2 & t_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_3 & s_3 & t_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & r_{n-1} & s_{n-1} & t_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & r_n & s_n \end{pmatrix}$$

LU-rozklad (1)

K regulární matici $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ budeme hledat dolní trojúhelníkovou matici L a horní trojúhelníkovou matici U tak, aby platilo

$$LU = A.$$

Věta (LU-rozklad bez pivotace:) *Nechť $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ je matice, kterou lze dopředným chodem GEM bez výběru hlavního prvku upravit na horní trojúhelníkovou matici U . Nechť m_{ik} , $k = 1, \dots, n-1$, $i = k+1, \dots, n$ jsou multiplikátory k -té fáze, z nichž vytvoříme dolní trojúhelníkovou matici $L = (l_{ik})$ tak, že $l_{ik} = -m_{ik}$, $i > k$, $l_{ij} = 1$ a $l_{ik} = 0$, $i < k$. Potom platí*

$$A = LU.$$

Věta (Obecný tvar LU-rozkladu:) *Nechť $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ je matice. Pak existují dolní trojúhelníková matice L , horní trojúhelníková matice U a permutační matice P řádu n takové, že*

$$PA = LU.$$

Při praktickém výpočtu LU-rozkladu lze postupovat následně:

- vytvoříme pomocné matice $\tilde{U} = A$, $\tilde{P} = I$ a $\tilde{L} = I$,
- v matici \tilde{U} provádíme dopředný chod GEM s pivotací,
- v matici \tilde{P} přehazujeme řádky stejně jako v matici \tilde{U} ,
- do matice \tilde{L} zapíšeme v každé fázi multiplikátory (s opačnými znaménky) a při přehození řádků v U přehodíme v L řádky i sloupce,
- nakonec položíme $P = \tilde{P}$, $L = \tilde{L}$ a $U = \tilde{U}$.

LU-rozklad (2)

Uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$Ax = b$$

s regulární čtvercovou maticí řádu n a předpokládejme, že P , L a U jsou matice, které tvoří LU-rozklad $PA = LU$. Pak platí následující ekvivalence:

$$Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow LUx = Pb.$$

Poslední rovnici rozložíme s využitím pomocné proměnné y na dvě rovnice

$$Ly = Pb, \quad Ux = y$$

a dostáváme následující algoritmus.

Algoritmus řešení soustavy pomocí LU-rozkladu:

Vstup: A , b .

- (1) Vypočti matice P , L a U , které tvoří LU-rozklad $PA = LU$.
- (2) Vyřeš soustavu lineárních rovnic $Ly = Pb$.
- (3) Vyřeš soustavu lineárních rovnic $Ux = y$.

Výstup: x .

LU-rozklad (3)

Algoritmus LU-rozkladu:

```
 $u_{11} = a_{11}$   
for  $i = 1, \dots, n$   
     $l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}$   
end  
for  $k = 2, \dots, n$   
     $u_{1k} = a_{1k}$   
    for  $i = 1, \dots, k$   
         $u_{1k} = a_{1k} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}u_{jk}$   
    end  
    for  $i = k + 1, \dots, n$   
         $l_{ik} = \frac{1}{u_{kk}} \left( a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij}u_{jk} \right)$   
    end  
end
```

Další užití LU-rozkladu:

- výpočet inverzní matice,
- výpočet determinantu.

Choleského rozklad (1)

Pokud je matice soustavy A **symetrická pozitivně definitní**, potom lze použít **Choleského rozklad** $A = LL^T$, kde L je dolní trojúhelníková matice (nyní nepředpokládáme jedničky na diagonále).

Matici L vypočteme pomocí vzorců:

$$l_{rr} = \left(a_{rr} - \sum_{s=1}^{r-1} l_{rs}^2 \right)^{1/2}, \quad r = 1, \dots, n,$$

a

$$l_{ir} = \frac{1}{l_{rr}} \left(a_{ir} - \sum_{s=1}^{r-1} l_{rs} l_{is} \right), \quad i = r + 1, \dots, n.$$

Potom řešení soustavy $Ax = b$ je ekvivalentní řešení soustav

$$Ly = b \quad \text{a} \quad L^T x = y.$$

Složitost přímých metod (1)

Nechť n je rozměr čtvercové matice.

Porovnání složitosti přímých metod pro soustavy s **obecnou** maticí:

- Gaussova eliminace: $\frac{2n^3}{3} + O(n^2)$
- Gauss-Jordanova eliminace: $n^3 + O(n^2)$
- LU-rozklad: $\frac{2n^3}{3} + O(n^2)$
- Choleského rozklad: $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$

Porovnání složitosti přímých metod pro soustavy s **třídiagonální** maticí:

- Gaussova eliminace: $O(n)$
- LU-rozklad: $O(n)$