Konzultace 2

- iterační metody řešení úlohy $Ax = b$ s regulární maticí
- řešení soustav lineárních rovnic s obdélníkovými maticemi

Obecná iterační metoda (1)

Uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

s regulární čtvercovou maticí $\mathbf{A} = (a_{ij})$ řádu n, vektorem pravé strany $\mathbf{b} = (b_i)$ a vektorem neznámých $\mathbf{x} = (x_i)$.

Iterační metody umožňují řešit soustavy lineárních rovnic pomocí postupného přibližování k přesnému řešení. Počítá se posloupnost vektorů aproximací $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ taková, že

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}, \quad \text{kde } \mathbf{x} \text{ je řešením } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Vlastnosti iteračních metod:

- v každé iteraci známe aproximaci řešení $\mathbf{x}^{(k)}$,
- v každé iteraci je nejpracnější operací násobení matice a vektoru,
- méně citlivé na zaokrouhlovací chyby než metody přímé.

Doporučení: Přímé metody se obvykle používají, je-li matice soustavy malá ($1 \leq n \leq 10000$), plná a dobře podmíněná. Iterační metody lze uplatnit zejména pro velké soustavy ($n > 10000$) s řídkou maticí.

Obecná iterační metoda (2)

Soustavu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ přepíšeme na ekvivalentní soustavu (obě soustavy mají stejné řešení) v iteračním tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{c},$$

kde $\mathbf{B}$ je iterační matice řádu n a $\mathbf{c}$ je sloupcový vektor.

Iterační metody spočívají v konstrukci posloupnosti vektorů, která je dána rekurentním předpisem:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{C}\mathbf{b}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

kde $\mathbf{x}^{(0)}$ je zvolený počáteční vektor a matice $\mathbf{B}$ a $\mathbf{C}$ splňují $\mathbf{B} + \mathbf{C}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Jestliže posloupnost vektorů $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ konverguje k vektoru $\mathbf{x}$, pak limitním přechodem získáme řešení $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. V numerických programech výpočet ukončíme, jestliže aproximace řešení $\mathbf{x}^{(k)}$ splňuje požadovanou přesnost - ukončovací kritérium

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}\| \leq \varepsilon,$$

kde $\varepsilon > 0$ je daná přesnost a $\|\cdot\|$ je vhodná norma.

Definice (Reziduum soustavy rovnic:)
Nechť $\mathbf{x}^{(k)}$ je řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, které získáme pomocí libovolné iterační metody v k-tém kroce. Předpisem

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}$$

definujeme tzv. reziduum soustavy.

Obecná iterační metoda (3)

Věta (Nutná a postačují podmínka konvergence iterační metody:)
Posloupnost $\mathbf{x}^{(k)}$ konverguje k přesnému řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě tehdy, když $\rho(\mathbf{B}) < 1$.

Věta (Postačují podmínka konvergence iterační metody I:)
Je-li $\|\mathbf{B}\| < 1$ pro libovolnou normu matice $\|\cdot\|$, potom posloupnost $\mathbf{x}^{(k)}$ konverguje k přesnému řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Věta (Postačují podmínka konvergence iterační metody II:)
Nechť $\mathbf{B}$ je iterační matice, která má n lineárně nezávislých vlastních vektorů. Iterační metoda daná obecným vzorcem konverguje pro každou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^{(0)}$, právě když všechna vlastní čísla matice $\mathbf{B}$ jsou v absolutní hodnotě menší než jedna.

Algoritmus obecné iterační metody:

Vstup: $\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathbf{x}^{(0)}, \varepsilon$.

Opakuj

$\quad \mathbf{x}^{(k+1)} := \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$;

dokud $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| > \varepsilon$.

Výstup: $\mathbf{x}^{(k)}$.

Poznámka: Úpravy, které nemění řešení:

- záměna pořadí rovnic,
- vynásobení rovnice nenulovým číslem,
- přičtení nenulového násobku rovnice k jiné rovnici.

Jacobiova metoda (1)

Uvažujme následující aditivní rozklad matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$,

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U},$$

kde

- $\mathbf{L} = (l_{ij})$, $l_{ij} = a_{ij}, i > j, l_{ij} = 0, i \leq j$, je dolní trojúhelníková matice,
- $\mathbf{D} = (d_{ij})$, $d_{ii} = a_{ii}, d_{ij} = 0, i \neq j$, je diagonální matice,
- $\mathbf{U} = (u_{ij})$, $u_{ij} = 0, i \geq j, u_{ij} = a_{ij}, i < j$, je horní trojúhelníková matice.

Budeme předpokládat, že diagonální prvky matice **D**, nenulové, tj. matice **A** je regulární. Potom můžeme původní soustavu ekvivalentně upravit:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{Dx} + (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{Dx} = -(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

a vynásobíme-li zleva poslední rovnici inverzní maticí k matici **D** získáme

$$\mathbf{x} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b},$$

ze které snadno odvodíme iterační předpis tvaru

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

tzn. iterační matice (dle obecné iterační metody) dána vztahem $\mathbf{B} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$ a vektor $\mathbf{c} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$.

Jacobiova metoda (2)

Jacobiova metodu můžeme ekvivalentně zapsat i po složkách pomocí rekurentních vzorců

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \ldots, n, \text{ pro } k = 0, 1, 2, \ldots,$$

které bychom analogicky získáli tak, že z i-té rovnice

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

vyjádříme i-tou neznámou a položíme $x_i^{(k+1)} = x_i$ a $x_j^{(k)} = x_j, j \neq i$.

Posloupnost vektorů $\mathbf{x}^{(k)}$ získaná Jacobiovou metodou konverguje k přesnému řešení právě tehdy, když

$$\rho(\mathbf{B}) = \rho(-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})) < 1.$$

Tuto podmínku splňují například ostře diagonálně dominantní matice.

Definice (Ostře diagonálně dominantní matice)
Nechť $\mathbf{B} = (b_{ij})$ je čtvercová matice. Řekneme, že matice $\mathbf{B}$ ostře diagonálně dominantní, je-li splněna následující podmínka

$$|b_{ii}| > \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |b_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n$$

Gauss-Seidelova metoda (1)

Budeme-li vycházet z iteračního předpisu pro Jacobiovu metodu a uvědomíme-li si , že při výpočtu jednotlivých složek $x_i^{(k+1)}$ můžeme použít přesnější aproximace $x_j^{(k+1)}, j \leq i$ (tj. použijeme všechny složky vektoru $\mathbf{x}^{(k+1)}$, které byly již vypočteny), obdržíme tzv. Gauss-Seidelovu metodu.

Gauss-Seidelovu metodu můžeme tedy zapsat po složkách pomocí rekurentních vzorců

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \dots, n, \text{ pro } k = 0, 1, 2, \dots,$$

Analogicky lze odvodit maticový zápis této metody. Původní soustavu ekvivalentně upríme:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{D} + \mathbf{L})\mathbf{x} + \mathbf{Ux} = \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{D} + \mathbf{L})\mathbf{x} + = -\mathbf{Ux} + \mathbf{b},$$

a vynásobíme-li zleva poslední rovnici inverzní maticí k matici $(\mathbf{D} + \mathbf{L})$ získáme

$$\mathbf{x} = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{Ux} + (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{b},$$

ze které snadno odvodíme iterační předpis tvaru

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{Ux}^{(k)} + (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

tzn. iterační matice (dle obecné iterační metody) dána vztahem $\mathbf{B} = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$ a vektor $\mathbf{c} = (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$.

Gauss-Seidelova metoda (2)

Posloupnost vektorů $\mathbf{x}^{(k)}$ získaná Gauss-Seidelovou metodou konverguje k přesnému řešení právě tehdy, když

$$\rho(\mathbf{B}) = \rho(-(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}) < 1.$$

Tuto podmínku splňují například ostře diagonálně dominantní matice a také symetrické pozitivně definitní matice.

Definice (Pozitivně definitivní matice)
Nechť $\mathbf{B} = (b_{ij})$ je čtvercová matice. Řekneme, že matice $\mathbf{B}$ je pozitivně definitivní, je-li splněna následující podmínka

$$\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} > 0 \ \textit{pro všechna}\ \mathbf{x} \neq 0.$$

Superrelaxační metoda (1)

Modifikací Gaussovy-Seidelovy metody můžeme získat zrychlení konvergence, tuto metodu nazýváme tzv. superrelaxační a konstruujeme při ní posloupnost vektorů podle vzorce:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (1-\omega)\mathbf{x}^{(i)} + \omega\hat{\mathbf{x}}^{(k+1)},$$

kde

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)} + (\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}, \quad k = 0,1,\ldots$$

Parametr ω se nazývá relaxační faktor a volí se z intervalu $(0,2)$, obvykle $\omega \in (1,2)$. Pro symetrické pozitivně definitní matice soustavy tato volba parametru vede ke konvergenci posloupnosti $\mathbf{x}^{(k)}$ k řešení. Volbou $\omega = 1$ dostaneme Gaussovu-Seidelovu metodu. Po úpravě snadno odvodíme iterační předpis tvaru

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})^{-1}(-\omega\mathbf{U} + (1-\omega)\mathbf{D})\mathbf{x}^{(k)} + \omega(\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}, \quad k = 0,1,\ldots$$

tzn. iterační matice (dle obecné iterační metody) dána vztahem $\mathbf{B} = (\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})^{-1}(-\omega\mathbf{U} + (1-\omega)\mathbf{D})$ a vektor $\mathbf{c} = \omega(\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$.

Superrelaxační metodu můžeme opět zapsat po složkách pomocí rekurentních vzorců $(k = 0,1,\ldots)$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) + (1-\omega)x_i^{(k)}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Metoda konjugovaných gradientů (1)

Nechť $\mathbf{A} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ je symetrická pozitivně definitní matice a $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ je vektor pravé strany. Hledáme řešení $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ následujícího lineárního systému:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

který má jednoznačné řešení.
Tuto úlohu převedeme na problém minimalizace kvadratického funkcionálu:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x}) \quad \text{pro} \quad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}) - (\mathbf{b}, \mathbf{x}),$$

kde $(\cdot, \cdot)$ značí skalární součin a platí $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$.
Řešení v k-tém kroce konstruujeme podle rekurentní formule:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \gamma_k p^{(k)},$$

kde $p^{(k)}$ je zvolený směr a koeficient $\gamma_{k-1} \in \mathbf{R}$ určíme tak, aby vektor $\mathbf{x}^{(k+1)}$ byl bodem minima funkce f na přímce $\mathbf{x}^{(k)} + tp^{(k)}, t \in \boldsymbol{R}$, tj.

$$\gamma_k = \frac{(\mathbf{r}^{(k)}, p^{(k)})}{(p^{(k)}, \mathbf{A}p^{(k)})}.$$

Metoda konjugovaných gradientů (2)

Směrové vektory $p^{(k)}$ volíme podle následující rekurentní formule:

$$p^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)} + \beta_k p^{(k-1)},$$

kde $p^0 = \mathbf{r}^0$ a koeficienty $\beta_k \in \mathbf{R}$ volíme tak, aby posloupnost směrů $\{p^{(k)}\}, k = 0, 1, \ldots$ tvořila tzv. systém A-ortogonálních vektorů tj. vektorů, pro které platí:

$$(\mathbf{A}p^{(k)}, p^{(l)}) = 0,\ k \neq l, \quad \text{a} \quad (\mathbf{A}p^{(k)}, p^{(k)}) \neq 0.$$

Poznámka: Převedením původní úlohy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ na problém minimalizace funkcionálu můžeme CGM považovat za iterativní metodu, což dokládají i numerické výpočty, kdy k nalezení dostatečně přesného řešení stačí podstatně menší počet iterací než je hodnost matice $\mathbf{A}$.

Poznámka: Na druhou stranu stranu můžeme na CGM nahlížet jako na metodu finitní (tj. metodu přímou), která končí nejpozději po n krocích, neboť A-ortogonalita směrů a dimenze prostoru $\boldsymbol{R}^n$ implikuje $\mathbf{r}^n = 0$.

Metoda konjugovaných gradientů (3)

Algoritmus metody sdružených gradientů:

Vstup: $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{x}^{(0)}, \varepsilon$.

(1) $\mathbf{r}^0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^0,\ p^0 = \mathbf{r}^0,\ k = 1$

(2) **repeat**

(2a) **if** $(\mathbf{r}^{k-1} < \varepsilon)$ **then** exit loop **end if**

(2b)
$$\gamma_{k-1} = \frac{(\mathbf{r}^{k-1}, \mathbf{r}^{k-1})}{(p^{k-1}, \mathbf{A}p^{k-1})}$$

(2c)
$$\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k-1} + \gamma_{k-1} p^{k-1}$$

(2d)
$$\mathbf{r}^k = \mathbf{r}^{k-1} - \gamma_{k-1} \mathbf{A} p^{k-1}$$

(2e)
$$\beta_k = \frac{(\mathbf{r}^k, \mathbf{r}^k)}{(\mathbf{r}^{k-1}, \mathbf{r}^{k-1})}$$

(2f)
$$p^k = \mathbf{r}^k + \beta_k p^{k-1}$$

(2g) $k = k + 1$

end repeat

Výstup: $\mathbf{x}^{(k)}$.

Soustavy s obdélníkovou maticí (1)

Nyní se budeme se zabývat numerickým rešením soustavy m rovnic s n neznámými pro $m \neq n$, tj. soustav s obdélníkovou maticí, kterou můžeme zapsat vektorově:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \text{pro} \quad \mathbf{A} \in R^{m \times n},\ \mathbf{x} \in R^n,\ \mathbf{b} \in R^m.$$

Věta (Frobeniova věta:) *Nechť* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *představuje soustavu algebraických rovnic typu* $m \times n$.

a) *Je-li* $hod(\mathbf{A}) \neq hod(\mathbf{A_b})$, *potom soustava* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *nemá řešení.*

b) *Je-li* $hod(\mathbf{A}) = hod(\mathbf{A_b}) = n$, *potom soustava* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *má právě jedno řešení.*

c) *Je-li* $hod(\mathbf{A}) = hod(\mathbf{A_b}) < n$, *potom soustava* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *má nekonečně mnoho řešení.*

Pro obdélníkové matice lze zobecnit definici inverzní matice (příp. podmíněnosti).

Definice (Pseudoinverzní matice:) *Nechť* $\mathbf{A} \in R^{m \times n}$. *Matice* $\mathbf{A}^+$ *se nazývá pseudoinverzní matice k matici* $\mathbf{A}$ *nebo také Mooreova - Penroseova inverzní matice, jestliže platí:*

a) $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$,

b) $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$,

c) $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$,

d) $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$.

Ke každé matici existuje matice pseudoinverzní. Navíc, je-li matice $\mathbf{A}$ regulární, potom je pseudoinverzní matice rovna matici inverzní.

Soustavy s obdélníkovou maticí (2)

Věta (Číslo podmíněnosti matice:) *Nechť* $\mathbf{A} \in R^{m \times n}$ *je obdélníková matice. Číslo podmíněnosti matice* $\mathbf{A}$ *je definováno předpisem*

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{+}\|.$$

Věta (Otázky řešitelnosti:) *Pro libovolnou soustavu* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *může nastat vždy jen jedna z následujícíhc tří možností:*

a) *Jestliže soustava* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *má nekonečně mnoho řešení, potom* $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b}$ *je řešení s nejmenší Euklidovskou normou.*

b) *Jestliže soustava* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *má právě jedno řešení, potom* $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b}$ *je řešení soustavy.*

c) *Jestliže soustava* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *nemá řešení, potom* $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b}$ *splňuje*

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}^*\|_2 \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{Ay}\|_2, \ \mathbf{y} \in R^n.$$

V dalším se budeme zabývat případem, kdy soustava nemá řešení a budeme hledat takové řešení $\mathbf{x}^*$, pro které je euklidovská norma rezidua $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2$ minimální. V tomto případě obvykle hovoříme o tzv. řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ve smyslu nejmenších čtverců.

Soustavy s obdélníkovou maticí (3)

Věta (Soustava normálních rovnic:) *Uvažujme soustavu*

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \textit{pro} \quad \mathbf{A} \in R^{m\times n},\ \mathbf{x} \in R^n,\ \mathbf{b} \in R^m.$$

předpokládejme, že $m > n$ *a* $hod(\mathbf{A}) = n$. *Potom soustava*

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$$

má právě jedno řešení $\mathbf{x}^*$ *a toto řešení* $\mathbf{x}^*$ *je řešením soustavy* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *ve smyslu nejmenších čtverců.*

Řešit původní soustavu pomocí této věty muže být vhodné zejména pokud $n \ll m$, protože soustava $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ je představuje výrazne menší problém než původní soustava. Tuto novou soustavu nazýváme tzv. soustavou normálních rovnic. Matice této soustavy je symetrická pozitivně definitní (pro řešení můžeme použít např. Choleského rozklad).

Nevýhodou tohoto postupu je rostoucí číslo podmíněnosti matice soustavy normálních rovnic v druhé mocnině čísla podmíněnosti matice původní soustavy:

$$\kappa(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \kappa^2(\mathbf{A}).$$

Ze soustavy normálních rovnic dostaneme vztah pro výpočet pseudoinverzní matice:

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T.$$

Singulární rozklad (1)

Věta (O singulárním rozkladu:) *Každou matici* $\mathbf{A} \in R^{m \times n}$ *lze rozložit na součin matic*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T,$$

kde $\mathbf{U} \in R^{m \times m}$, $\mathbf{V} \in R^{n \times n}$ *jsou ortonormální matice a matice* $\Sigma \in R^{m \times n}$ *je diagonální,*

$$\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k), \; k = \min(m, n),$$

jejíž diagonální prvky splňují

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_k = 0,$$

kde $r = hod(\mathbf{A})$.

Diagonální prvky $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ matice Σ se nazývají singulární čísla matice $\mathbf{A}$, i-tý sloupec matice $\mathbf{U}$ se nazývá i-tý levý singulární vektor, i-tý sloupec matice $\mathbf{V}$ se nazývá i-tý pravý singulární vektor. Zřejme platí

$$\mathbf{u}_i^T\mathbf{A} = \sigma_i\mathbf{v}_i^T, \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i, \; i = 1, 2, \ldots, k.$$

Užití singulárního rozkladu:

- výpočet pseudoinverzní matice:
  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\Sigma^+\mathbf{U}^T$, $\Sigma^+ = diag\left(\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \ldots, \sigma_k^{-1}, 0, \ldots, 0\right) \in R^{n \times m}$
- výpočet spektrální normy matice: $\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_1$,
- výpočet podmíněnosti matice vzhledem ke spektrální normě : $\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}$.