Konzultace 3

- řešení nelineárních rovnic
- interpolace
- numerická integrace

Řešení nelineárních rovnic (1)

Naší modelovou úlohu bude nalezení reálných kořenů nelineární rovnice

$$f(x) = 0,$$

kde f je dostatečně hladká funkce.

V řadě případů se nám však nepodaří explicitně vyjádřit analyticky kořeny této rovnice, a proto k jejich výpočtu používáme metody iterační: počítající posloupnost $\{x^k\}$ konvergující pro $k \to \infty$ ke kořenu x^*.

Pro některé metody stačí, když zadáme pouze interval $\langle a, b\rangle$ obsahuje hledaný kořen. Jiné zase metody vyžadují, aby počáteční aproximace x^0 byla k hledanému kořenu dostatečně blízko. Jednotlivé iterační metody se pak liší rychlostí konvergence.

Pro hrubý rozbor rovnice a určení počáteční aproximace x^0 použijeme tzv. separaci kořenů, jejíž výsledkem je rozdělení kořenů do dostatečně krátkých intervalů.

- grafická separace - z grafu funkce f nalezneme přibližnou polohu průsečíků s osou x,
- separace tabelací - sestavíme tabulku funkčních hodnot funkce f a podle znaménkových změn určíme intervaly obsahující kořeny.

Věta (O znaménkových změnách:)
Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, pro kterrou platí

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Pak uvnitř intervalu (a, b) leží aspoň jeden kořen rovnice $f(x) = 0$.

Metoda půlení intervalů (1)

Metoda půlení intervalů (bisekce) je založena na postupném zkracování intervalu, který obsahuje kořen, tj. na konstrukci intervalů splňujících

$$\langle a^0, b^0 \rangle \supset \langle a^1, b^1 \rangle \supset \ldots \supset \langle a^k, b^k \rangle \supset\ni x^* \Leftrightarrow x^i \in \langle a^i, b^i \rangle,\ i = 0, 1, \ldots$$

Tato strategie zaručuje konvergenci pro každou spojitou funkci, výpočet je však pomalý.

Předpokládejme tedy, že f je spojitá funkce na intervalu $\langle a^k, b^k \rangle$, pro niž platí $f(a^k) \cdot f(b^k) < 0$. Nový bod x^{k+1} určíme jako střed intervalu $\langle a^k, b^k \rangle$ podle vzorce

$$x^{k+1} = \frac{a^k + b^k}{2},$$

kterým rozdělíme původní interval na dvě části, a jako nový interval $\langle a^{k+1}, b^{k+1} \rangle$ vezmeme tu část, v níž leží kořen x^* (rozhodujeme se podle věty o znaménkových změnách).

Intervaly tedy postupně dělíme a jejich středy tvoří posloupnost $\{x^k\}$ konvergující ke kořenu x^*. Výpočet je ukončen při dosažení zadané přesnosti ε, tj.

$$|x^* - x^{k+1}| \le \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b^k - a^k}{2} \le \varepsilon.$$

a poslední střed x^{k+1} je pak aproximací kořene x^* s přeností ε.

Metoda půlení intervalů (2)

Algoritmus metody půlení intervalů:

Vstup: f, a^0, b^0, ε.

Pro $k = 0, 1, \ldots$ opakuj:

$x^{k+1} := (a^k + b^k)/2$

je-li $f(x^{k+1}) = 0$, potom jdi na Výstup

je-li $f(a^k)f(x^{k+1}) < 0$, potom $a^{k+1} := a^k, b^{k+1} := x^{k+1}$

je-li $f(x^{k+1})f(b^k) < 0$, potom $a^{k+1} := x^{k+1}, b^{k+1} := b^k$

dokud $(b^{k+1} - a^{k+1})/2 > \varepsilon$.

Výstup: poslední hodnota x^{k+1}.

Metoda prosté iterace (1)

Naší modelovou úlohu $f(x) = 0$ převedeme na ekvivalentní rovnici $x - g(x) = 0$, kde g je vhodná spojitá funkce. Místo původní rovnice budeme tak řešit rovnici v iteračním tvaru:

$$x = g(x)$$

a číslo x^*, které je řešením této rovnice, se nazývá pevný bod funkce g.

Věta (Brouwerova věta o pevném bodu:)
Nechť g je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, pro kterou platí

$$g(x) \in \langle a, b\rangle,$$

tj. funkce g zobrazuje interval $\langle a, b\rangle$ do sebe. Pak na intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje pevný bod funkce g.

Nechť $x^0 \in \langle a, b\rangle$ je počáteční aproximace. Metodou prostých iterací nebo také metodou postupných aproximací nazýváme výpočet podle předpisu:

$$x^{k+1} = g(x^k),\ k = 0, 1, 2, \dots$$

Jestliže posloupnost $\{x_k\}$ sestavená tímto postupem konverguje k čísku x^*, pak

$$\lim_{k\to\infty} x^{k+1} = \lim_{k\to\infty} x^k = x^*,$$

kde x^* je pevným bodem funkce g.

Metoda prosté iterace (2)

Definice (Kontrakce:)
Funkce g se nazývá kontrakce na intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže existuje konstanta L, $0 < L < 1$, taková, že

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y| \quad \forall\, x, y \in \langle a, b\rangle.$$

Věta (Konvergence metody prostých iterací:)
Nechť g je spojitá kontrakce na $\langle a, b\rangle$, která zobrazuje tento interval do sebe. Pak na intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje jediný pevný bod x^* funkce g. Navíc posloupnost posloupnost postupných aproximací $\{x^k\}$ konverguje k x^* pro každou počáteční aproximaci $x^0 \in \langle a, b\rangle$.

Poznámka: *Je-li číslo*

$$M_g = \max_{x\in(a,b)} |g'(x)|$$

menší než jedna, pak můžeme položit $L = M_g$ a funkce g bude kontrakce na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Newtonova metoda (1)

Předpokládejme, že známe aproximaci x^k kořene x^* rovnice $f(x) = 0$ a chceme určit další aproximaci x^{k+1}. Zapíšeme-li danou rovnici pomocí Taylorova polynomu prvního stupně v okolí bodu $[x^k, f(x^k)]$, dostaneme

$$0 = f(x) = f(x^k) + (x - x^k)f'(x^k) + (x - x^k)^2 \frac{f''(\xi)}{2}, \ \xi \in (x, x^k), \text{ resp. } (x^k, x).$$

Nyní provedeme tzv. linearizaci, kdy vypustíme kvadratický člen na pravé straně. Řešením nové linearizované rovnice určíme aproximaci x^{k+1}, tj.

$$f(x^k) + (x^{k+1} - x^k)f'(x^k) = 0,$$

kterou snadno převedeme do iteračního tvaru

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)},$$

představující tzv. Newtonovu metodu
Rovnice

$$t : y = f(x^k) + (x - x^k)f'(x^k)$$

představuje z geometrického hlediska rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[x^k, f(x^k)]$, proto se Newtonova metoda nazývá také jako metoda tečen.

Newtonova metoda (2)

Algoritmus Newtonovy metody:

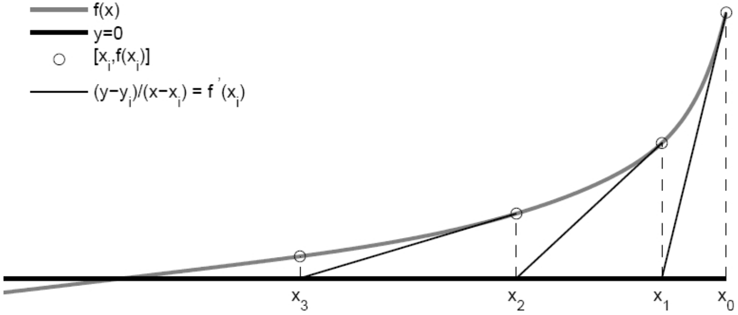
Vstup: f, f', x^0, ε.

Pro $k = 0, 1, \ldots$ opakuj:

$$x^{k+1} := x^k - f(x^k)/f'(x^k);$$

dokud $|x^{k+1} - x^k| > \varepsilon$.

Výstup: poslední hodnota x^{k+1}.



Newtonova metoda (3)

Věta (Řád konvergence Newtonovy metody:)
Nechť f'' je spojitá, f' nenulová na $\langle a, b\rangle$ a nechť $\{x^k\}$ je posloupnost na $\langle a, b\rangle$ sestrojená pomocí Newtonovy metody, která konverguje k číslu x^*. Potom x^* je kořenem rovnice $f(x) = 0$ a platí:

$$|x^* - x^{k+1}| \leq C|x^* - x^k|^2 \quad \textit{pro} \;\; k = 0, 1, 2, \ldots,$$

kde konstanta $C > 0$ nezávislá na k, tzn. Newtonova metoda je druhého řádu.

Newtonova metoda vždy konverguje za předpokladu, že počáteční aproximaci zvolíme dostatečně blízko ke kořenu. Obecně můžeme postupovat podle následující věty.

Věta (Postačující podmínky konvergence Newtonovy metody:)
Nechť jsou splněny následující předpoklady:

a) *f' je nenulová na intervalu $\langle a, b\rangle$,*
b) *f'' nemění znaménko v intervalu (a, b),*
c) *platí $f(a) \cdot f(b) < 0$,*
d) *platí $|f(a)/f'(a)| < b - a$ a $|f(b)/f'(b)| < b - a$.*

Potom posloupnost $\{x^k\}$ počítaná podle Newtonovy metody konverguje pro libovolnou počáteční aproximaci $x^0 \in \langle a, b\rangle$.

Metoda sečen (1)

V každém kroku Newtonovy metody musíme počítat hodnotu $f(x^k)$ a derivaci $f'(x^k)$. Když vzorec pro výpočet derivace nemáme k dispozici, můžeme derivaci aproximovat podílem

$$f'(x^k) \approx \frac{f(x^k) - f(x^{k-1})}{x^k - x^{k-1}}.$$

Touto modifikací Newtonovy metody dostaneme tzv. metodu sečen: ze dvou počátečních aproximací x^0 a x^1 počítáme $x^2, x^3, \ldots$ podle iteračního předpisu

$$x^{k+1} = x^k - \frac{x^k - x^{k-1}}{f(x^k) - f(x^{k-1})} f(x^k).$$

Název této metody vychází z její geometrické interpretace, neboť x^{k+1} je ve skutečnosti x-ová souřadnice průšečíku přímky procházející body $[x^{k-1}, f(x^{k-1})]$ a $[x^k, f(x^k)]$ s osou x, tj. sečny grafu funkce f o rovnici

$$s : y = f(x^k) + \frac{f(x^k) - f(x^{k-1})}{x^k - x^{k-1}}(x - x^k).$$

Metoda sečen zaručeně konverguje, pokud zvolíme startovací hodnoty x^0 a x^1 dostatečně blízko ke kořenu x^*, to lze zajistit např. metodou půlení intervalů.

Metoda sečen (2)

Algoritmus metody sečen:

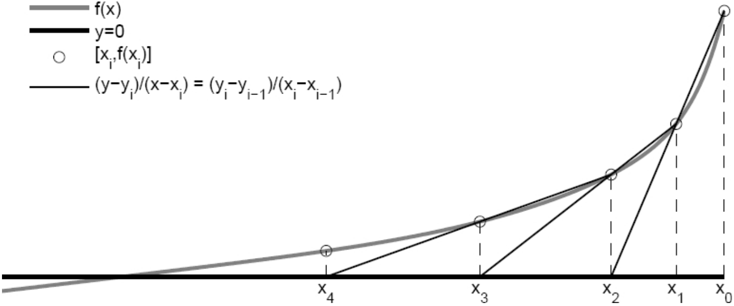
Vstup: f, x^0, x^1, ε.

Pro $k = 0, 1, \ldots$ opakuj:

$$x^{k+1} := x^k - \frac{x^k - x^{k-1}}{f(x^k) - f(x^{k-1})} f(x^k)$$

dokud $|x^{k+1} - x^k| > \varepsilon$.

Výstup: poslední hodnota x^{k+1}.



Lagrangeova interpolace (1)

Lagrangeova interpolace je aproximace funkce pomocí polynomu, který v daných bodech nabývá předepsaných hodnot. Uvažujme funkci f, která je definována na intervalu $\langle a, b\rangle$. Mějme dáno $n+1$ navzájem ruzných bodů $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ a k nim příslušné funkční hodnoty $f(x_0)$, $f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Body $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \langle a, b\rangle$ se nazývají interpolační uzly. Polynom P stupně nejvýše n, pro který platí

$$P(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \ldots, n,$$

se nazývá Lagrangeův interpolační polynom.

Věta (Lagrangeova interpolace:) *Nechť je funkce f definována na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ jsou navzájem různé body. Potom existuje právě jeden polynom stupně nejvýše n, pro který platí*

$$P(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \ldots, n.$$

Tento polynom lze vyjádřit v tzv. Lagrangeově interpolačním tvaru

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_i(x),$$

kde funkce $\varphi_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ tvoří tzv. Lagrangeovu bázi ($\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$), tj.

$$\varphi_i(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}.$$

Lagrangeova interpolace (2)

Věta (Odhad chyby:) *Nechť je funkce f definována na intervalu $\langle a, b\rangle$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ jsou navzájem různé body. Nechť dále $f \in C^{n+1}(\langle a, b\rangle)$, potom platí*

$$|f(x) - P(x)| \leq \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f^{n+1}(x)| \frac{|\omega_{n+1}(x)|}{(n+1)!}$$

kde

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n).$$

Častěji se však k výpočtu používá tzv. Newtonův tvar Lagrangeova interpolačního polynomu, který používá poměrné diference.

Definice (Poměrné diference:) *Nechť jsou dány vzájemně různé uzly x_i a funkční hodnoty $f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Poměrné diference k-tého řádu $f[x_{i+k}, \ldots, x_i]$, $i = 0, 1, \ldots, n - k$ definujeme rekurentně:*

- *pro $k = 0 : f[x_i] = f(x_i)$,*
- *pro $k = 1$:*
$$f[x_{i+1}, x_i] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i},$$
- *pro $k \leq n$:*
$$f[x_{i+k}, \ldots, x_i] = \frac{f[x_{i+k}, \ldots, x_{i+1}] - f[x_{i+k-1}, \ldots, x_i]}{x_{i+k} - x_i}.$$

Lagrangeova interpolace (3)

Uvažujme zápis polynomu ve tvaru:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

Jestliže dosadíme do interpolačních rovností $P(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n$, dostaneme soustavu lineárních rovnic s dolní trojúhelníkovou maticí:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Řešením této soustavy získáme

$$a_i = f[x_i, \ldots, x_0],\ i = 0, 1, \ldots, n$$

a Lagrangeův interpolační polynom lze psát v Newtonově tvaru

$$\begin{aligned} P(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\ &\quad + \cdots + (x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})f[x_0, \ldots, x_n] \end{aligned}$$

Hermitova interpolace (1)

Interpolační polynom stupně $2n+1$, který v daných uzlech nabývá předepsaných funkčních hodnot a jehož první derivace nabývá předepsaných hodnot, se nazývá Hermitův interpolační polynom.

Věta (Hermitova interpolace:) *Nechť je funkce f definovaná a diferencovatelná na intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ jsou navzájem různé body. Potom existuje právě jeden polynom stupně nejvýše $2n+1$, pro který platí*

$$P(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,1,\ldots,n.$$

a

$$P'(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0,1,\ldots,n.$$

Pokud navíc $f \in C^{2n+2}(\langle a,b\rangle)$, potom platí

$$|f(x) - P(x)| \leq \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f^{2n+2}(x)| \frac{|\omega_{n+1}(x)|}{(2n+2)!}.$$

Interpolace pomocí spline (1)

Definice (Spline k-tého řádu:) *Nechť $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ jsou navzájem různé body. Funkci, která je na každém intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$, $i = 0, \dots, n$, polynomem stupně k a která má v intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$ spojité derivace až do řádu $k - 1$, nazýváme splinem řádu k.*

Pro danou funkci f definovanou na intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$ je příslušný interpolační spline S řádu k určen podmínkami:

$$\begin{aligned} f(x_i) &= S(x_i), j = 1, \dots, k-1, \ i = 0, \dots, n \\ S_i^{(j)}(x_i) &= S_{i+1}^{(j)}(x_i + 1), \ j = 1, \dots, k-1, \ i = 0, \dots, n-1, \end{aligned}$$

kde $S_i = S| \langle x_{i-1}, x_i \rangle$.

Lineárním spline nazýváme funkci $S(x)$, která je spojitá na intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$ a na každém podintervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$, $i = 1, \dots, n$, je polynomem prvního stupně, tj.

$$S(x) = f(x_i) + (x - x_i) \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle, \ i = 1, \dots, n-1.$$

Grafem lineárního spline je lomená čára interpolující danou funkci f uzlech $x_0, \dots, x_n$.

Kubickým spline nazýváme funkci $S_3(x)$, která má na intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$ dvě spojité derivace a na každém podintervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$, $i = 1, \dots, n$, je polynomem třetího stupně.

Numerická integrace (1)

Při řešení různých úloh je potřeba nalézt hodnotu určitého integrálu. Některé integrály lze vypočítat snadno pomocí tabulek či klasických integračních metod. Na druhou stranu někdy je vhodnější (néli nutné) vypočítat určitý integrál

$$I(f) := \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

pouze přibližně (numericky), a to zejména v následujcích případech:

- $I(f)$ neumíme spočítat analytickými metodami,
- analytický výpočcet je příliš náročný,
- funkce $f(x)$ je dána jen tabulkou.

Přibližnou hodnotou integrálu $I(f)$ budeme označovat určitý integrál

$$Q(f) := I(P),$$

kde $P(x)$ je vhodná interpolace funkce $f(x)$.

Předpis $Q(f)$ pro numerický výpočet integrálu se nazývá kvadraturní formule. Rozdíl $I(f) - Q(f)$ označujeme symbolem $R(f)$ a nazýváme integrační chybou kvadraturní formule, tj.

$$I(f) = Q(f) + R(f).$$

Numerická integrace (2)

Definice (Řád kvadraturní formule:) *Řekneme, že kvadraturní formule $Q(f)$ je řádu r, když integruje přesně všechny polynomy až do stupně r včetně, tj.*

$$R(x^k) = 0 \text{ pro } k = 0, 1, \ldots, r, \quad \text{a} \quad R(x^{r+1}) \neq 0.$$

Pro jednoduchost uvažujme na intervalu $\langle a, b \rangle$ ekvidistantní uzly

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad h = (b-a)/n.$$

Kvadraturní formuli $Q(f)$ budeme hledat ve tvaru, aby platilo

$$I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b P(x)\mathrm{d}x,$$

kde P je polynom interpolující funkci f v daných uzlech, který zapíšeme v Lagrangeově tvaru, tj.

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_i(x), \quad \text{kde } \varphi_i(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

a odvodíme tzv. Newton-Cotesovy vzorce:

$$I(f) \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) =: Q(f), \quad \text{kde } w_i = \int_a^b \varphi_i(x)\mathrm{d}x, \ \ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Hodnoty w_i nazýváme integračními váhami kvadraturní formule $Q(f)$ a body x_i kvadraturními uzly.

Obdélníkové pravidlo (1)

Položíme-li $n = 0$, x_0 střed intervalu $\langle a, b\rangle$ a za interpolační polynom zvolíme konstantní funkci $P_0(x) = f(x_0)$, pak kvadraturní formuli

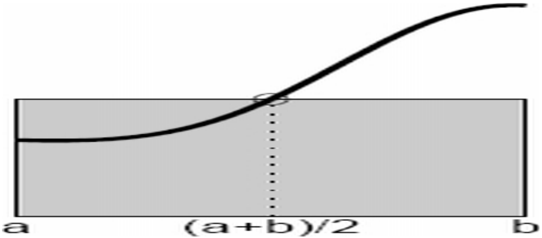
$$Q_M(f) := \int_a^b P_0(x)\mathrm{d}x = (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

nazýváme obdélníkovým pravidlem.

Věta (Integrační chyba:) *Nechť funkce f má na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitou druhou derivaci. Pak platí:*

$$I(f) - Q_M(f) = \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3,$$

kde $\xi \in (a, b)$ je blíže neurčený bod.



Lichobežníkové pravidlo (1)

Položíme-li $n = 1$, $x_0 = a$, $x_1 = b$ a za interpolační polynom $P_1(x)$ zvolíme lineární funkci procházející body $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_1, f(x_1)]$, pak kvadraturní formuli

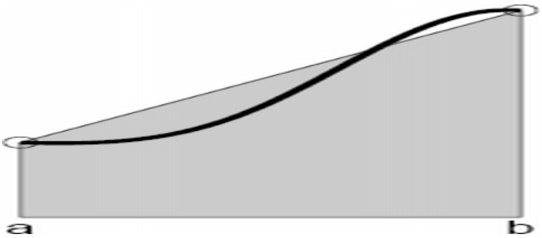
$$Q_T(f) := \int_a^b P_1(x)\mathrm{d}x = \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b))$$

nazýváme lichoběžníkovým pravidlem.

Věta (Integrační chyba:) *Nechť funkce f má na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitou druhou derivaci. Pak platí:*

$$I(f) - Q_T(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3,$$

kde $\xi \in (a, b)$ je blíže neurčený bod.



Simpsonovo pravidlo (1)

Položíme-li $n = 2$, $x_0 = a$, $x_1 = (a+b)/2$, $x_2 = b$ a za interpolační polynom $P_2(x)$ zvolíme kvadratickou funkci procházející body $[x_0, f(x_0)]$, $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$, pak kvadraturní formuli

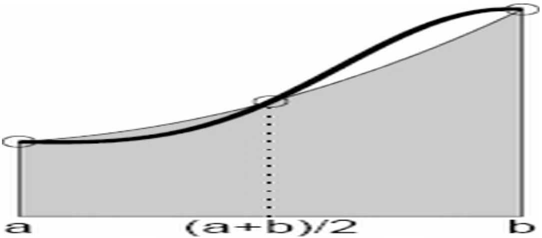
$$Q_S(f) := \int_a^b P_2(x)\mathrm{d}x = \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

nazýváme Simpsonovým pravidlem, s váhami $w_0 = w_2 = \frac{1}{6}(b-a)$ a $w_1 = \frac{4}{6}(b-a)$.

Věta (Integrační chyba:) *Nechť funkce f má na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitou čtvrtou derivaci. Pak platí:*

$$I(f) - Q_S(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5,$$

kde $\xi \in (a, b)$ je blíže neurčený bod.



Složené kvadraturní formule (1)

Abychom dostali dostatečně přesnou aproximaci integrálu $I(f)$, rozdělíme interval $\langle a, b\rangle$ na kratší podintervaly a na každém z nich použijeme některou ze základních formulí, tímto postupem získáme tzv. složené kvadraturní formule. Omezíme se pouze na případ, kdy tyto formule na podintervalech jsou vždy stejné a navíc budeme uvažovat ekvidistantní dělení s krokem h.

Složená kvadraturní pravidla:

$$Q_M^n(f) = h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$$

$$Q_T^n(f) := h\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right)$$

$$Q_S^n(f) := \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots$$
$$+2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big)$$