Konzultace 4

- numerické řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou
- numerické řešení okrajových úloh - metoda sítí

Numerické řešení soustav ODR (1)

Diferenciální rovnice, resp. soustavy diferenciálních rovnic, které popisují reálný systém, nebudeme v řadě případů schopni analyticky vyřesit. Numerické metody nám však mohou pomoci získat přibližné hodnoty řešení v konečném počtu uzlových bodů.

Budeme se zabývat numerickýym výpočtem funkce $Y = Y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$, která na intervalu $\langle a, b \rangle$ vyhovuje soustavě rovnic

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'(x) &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

ekvivalentně zapsané vektorově

$$\frac{\mathrm{d}Y(x)}{\mathrm{d}x} = F(x, Y),$$

kde $F(x, Y) = (f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(x, y_1, \ldots, y_n))$.

Tento systém rovnic nazýváme soustavou n obyčejnýyh diferenciálních rovnic prvního řádu a z teorie je o něm známo, že řešení (pokud existuje) je určeno až na n volitelných parametrů. K jednoznačnosti řešení musí výše uvedených n rovnic splňovat n podmínek. Zadáme-li tyto podmínky ve tvaru

$$y_1(x_0) = c_1, \ldots, \; y_n(x_0) = c_n, \text{ kde } x_0 = a$$

ekvivalentně zapsané vektorově $Y(x_0) = C$, kde $C = (c_1, \ldots, c_n)$, nazýváme je tzv. počátečními podmínkami a celý systém rovnic doplněný o počáteční podmínky tak představuje počáteční úlohu pro soustavu obyčejných diferenciálních rovnic.

Numerické řešení soustav ODR (2)

Obyčejnou diferenciální rovnici m-tého řádu

$$f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m)}\right) = g(x)$$

převádíme na soustavu m diferenciálních rovnic 1. řádu pomocí následujících substitucí

$$y' \equiv z_1, \quad y'' \equiv z_2, \quad \ldots \quad y^{(m-1)} \equiv z_{m-1}$$

a dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} y' &= z_1 \\ z_1' &= z_2 \\ \ldots &\quad \ldots \\ z_{m-2}' &= z_{m-1} \\ f(x, y, z_1, \ldots, z_{m-1}, z_{m-1}') &= g(x) \end{aligned}$$

Poslední rovnici lze obvykle rozřešit vzhledem k z_{m-1}', pak ji lze psát ve tvaru

$$z_{m-1}' = \tilde{g}(x, y, z_1, \ldots, z_{m-1}).$$

Numerické řešení soustav ODR (3)

V dalším budeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $m = 1$ a budeme se zabývat numerickým řešením modelové počáteční úlohy pro skalární rovnici

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in \langle a, b \rangle,$$
$$y(a) = c.$$

Abychom měli zaručenu existenci a jednoznačnost řešení, budeme předpokladat, že $f : \langle a, b \rangle \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ je spojitá a že je lipschitzovská vzhledem k y, tj. že

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall\, x \in \langle a, b \rangle,\ y_1, y_2 \in \boldsymbol{R}.$$

Jako numerické řešení se postupně se generuje posloupnost uzlů $x_0 = a$, x_1, $x_2, \ldots$, pro které se stanoví čísla

$$y_0 = c, \quad y_1 \approx y(x_1), \quad y_2 \approx y(x_2), \quad \ldots$$

aproximující přesné řešení $y(x)$ v daných uzlech.

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že uzly jsou na intervalu $\langle a, b \rangle$ ekvidistantní s krokem h, tj.

$$x_i = x_{i-1} + h, \quad i = 1, \ldots, n,$$

cekový počet kroků je pak $n = (x_n - x_0)/h$.

Jednokrokové metody (1)

Nejjednoduší numerické metody pro řešení počáteční úlohy jsou tzv. jednokrokové metody, jejichž shéma můžeme obecně zapsat rekurentně:

$$y_0 = c,$$
$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \Phi(x_i, y_i, h), \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

kde $\Phi : \langle a, b\rangle \times \boldsymbol{R} \times \langle 0, h_0\rangle \to \boldsymbol{R}$, $h_0 > 0$ je spojitá funkce, která splňuje Lipschitzovu podmínku vzhledem k y s konstantou $L > 0$, tj.

$$|\Phi(x, y, h) - \Phi(x, y^*, h)| \leq L|y - y^*| \quad \forall\, x \in \langle a, b\rangle,\ y, y^* \in \boldsymbol{R},\ h \in \langle 0, h_0\rangle.$$

Fukce Φ (závisící na f) se nazývá přírůstková funkce a metody s funkcí Φ výše uvedených vlastností se nazývají regulární.

Jednokrokové metody tedy využívají k nalezení řešení $y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$ pouze předchozího bodu $[x_n, y_n]$.

Definice (Konvergence metody:)
Řekneme, že jednokroková metoda s přírůstkovou funkcí Φ je konvergentní, jestliže platí následující tvrzení: kdykoli je $y : \langle a, b\rangle \times \boldsymbol{R}$ řešením modelové počáteční úlohy, je

$$\forall\, x \in \langle a, b\rangle : \lim_{\substack{h \to 0+ \\ x_n = x}} y_n = y(x),$$

kde y_n je přibližné řešení v uzlu x_n.

Jednokrokové metody (2)

Chybu, které se dopustíme v jednom kroku metody, tj. nahradíme-li $y(x_1)$ přibližným řešením y_1 nazýváme lokální diskretizační chybou:

$$y(x_0) - y_0 = 0, \quad e_{loc}(h) = y(x_1) - y_1$$

Chybou metody (v bodě x_n) tzv. akumulovanou diskretizační chybou rozumíme rozdíl

$$e_n = y_n - y(x_n).$$

Definice (Řád metody:) *Řekneme, že metoda je řádu p, jestliže lokální diskretizační chyba je $O(h^{p+1})$, tj.*

$$\exists C > 0 : \frac{e_{loc}(h)}{h^{p+1}} \leq C \ \forall \ h \in \langle 0, h_0 \rangle.$$

Definice (Konsistence metody:) *Řekneme, že jednokroková metoda s přírůstkovou funkcí Φ pro řešení diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ je konsistentní, jestliže*

$$\Phi(x, y, 0) = f(x, y), \quad x \in \langle a, b \rangle, \ y \in \boldsymbol{R}.$$

Věta (Konvergence metody:) *Jednokroková metoda s přírůstkovou funkcí Φ zaručující regularitu metody je konvergentní, právě když je konsistentní.*

Eulerova metoda (1)

Nejjednodušší jednokrokovou metodou pro řešení počáteční úlohy je tzv. Eulerova metoda, kterou obdržíme z obecného schématu, zvolíme-li za přírůstkovou funkci $\Phi(x, y, h) = f(x, y)$, tj. celkově Eulerovu metodu zapíšeme

$$y_0 = c,$$
$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

Ekvivalentně lze tuto metodu odvodit pomocí Taylorova rozvoje řešení $y(x)$ bodě x_i

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + O(h^2),$$

zanedbáním členu $O(h^2)$ a nahrazením přesných hodnot řešení y hodnotami přibližnými.

Nejnižší zanedbaný člen určuje odhad lokální diskretizační chyby Eulerovy metody v bodě x_1

$$e_{loc} = y(x_1) - y_1 = O(h^2)$$

Chyba jednoho kroku je tedy úměrná h^2, počet kroků v daném intervalu $x \in \langle a, b \rangle$ je $n \sim 1/h$ a tedy celková chyba je úměrná

$$e \sim n \cdot h^2 \sim h^1$$

Eulerova metoda je metoda 1. řádu (přesnosti), je tedy málo přesná, vyžaduje velmi krátký krok, a proto se v praxi používá jen zřídka.

Rungeovy-Kuttovy metody (1)

Pro praktické užití jednokrokových metod je žádoucí zvýšit tedy jejich řád. Mezi jednokrokové metody vyšších řádů jsou řazeny tzv. metody Runge-Kutta, které jsou založeny na postupném zpřesňování hodnot v bodech mezi x_i a x_{i+1} včetně. Výpočetní vzorec Rungeovy-Kuttovy (RK) metody má standardní rekurentní tvar

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi_{RK}(x_i, y_i, h),$$

kde

$$\Phi_{RK}(x_i, y_i, h) = p_{r1}k_1(h) + p_{r2}k_2(h) + \cdots + p_{rr}k_r(h),$$

kde $p_{lm} \in \boldsymbol{R}$ a dále

$$\begin{aligned}
k_1(h) &= f(x_i, y_i) \\
k_2(h) &= f(x_i + \alpha_2 h, y_i + h\beta_{21}k_1) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
k_r(h) &= f\left(x_n + \alpha_r h, y_n + h(\beta_{r1}k_1 + \beta_{r2}k_2 + \cdots + \beta_{r,r-1}k_{r-1})\right)
\end{aligned}$$

Čísla α_l a β_{lm} nazýváme koeficienty příslušné RK metody. Pokud zvolíme $r = 1$, dostaneme Eulerovu metodu. Pro $r \leq 4$ se řád metody může rovnat r (chyba jednoho kroku $\sim h^{r+1}$). Pro konstrukci metody 5. řádu je však už zapotřebí alespoň $r = 6$.

RK metoda druhého řádu (1)

Zvolíme-li v přírůstkové funkci Φ_{RK} následně:

$$r = 2,\ \alpha_2 = 1,\ \beta_{21} = 1,\ p_{21} = \frac{1}{2},\ p_{22} = \frac{1}{2},$$

získáme tzv. Heunovu metodu, která je druhého řádu a rekurentně ji lze zapsat vzorci:

$$\begin{aligned} y_0 &= c, \\ k_1 &= f(x_i, y_i), \\ k_2 &= f(x_i + h, y_i + hk1), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \quad i = 0, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Naopak zvolíme-li v přírůstkové funkci Φ_{RK} následně:

$$r = 2,\ \alpha_2 = \frac{1}{2},\ \beta_{21} = \frac{1}{2},\ p_{21} = 0,\ p_{22} = 1,$$

získáme opět RK metodu, která je druhého řádu a rekurentně ji lze zapsat vzorci:

$$\begin{aligned} y_0 &= c, \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right), \\ y_{i+1} &= y_i + hk_2, \quad i = 0, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

RK metoda čtvrtého řádu (1)

Zvolíme-li v přírůstkové funkci Φ_{RK} následně:

$$r = 4,\ \alpha_2 = \frac{1}{2},\ \alpha_3 = \frac{1}{2},\ \alpha_4 = 1\ \beta_{21} = \frac{1}{2},\ \beta_{31} = 0,\ \beta_{32} = \frac{1}{2},\ \beta_{41} = 0,$$
$$\beta_{42} = 0,\ \beta_{43} = 1,\ p_{41} = \frac{1}{6},\ p_{42} = \frac{2}{6},\ p_{43} = \frac{2}{6},\ p_{44} = \frac{1}{6},$$

získáme tzv. Rungeovu-Kuttovu metodu čtvrtého řádu, kterou lze zapsat vzorci:

$$\begin{aligned}
y_0 &= c, \\
k_1 &= f(x_i, y_i), \\
k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right), \\
k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2\right), \\
k_4 &= f(x_i + h, y_i + hk3), \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 0, \ldots, n-1.
\end{aligned}$$

Stabilita metody (1)

V definici konceptu stability jednokrokových metod předpokládejme, že řešíme následující úlohu

$$y'(x) = \lambda y(x), \quad \lambda \in \mathbb{C},\ x \in (0, +\infty), \quad y(0) = y^0.$$

Definice (Stabilita metody:) *Řekneme, že funce $R : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je funkce stability jednokrokové metody s ekvidistantním krokem h, jestliže*

$$y_{i+1} = R(h\lambda) y_i.$$

Množinu

$$\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| < 1\}$$

nazýváme oblastí absolutní stability. Řekneme, že metoda je absolutně stabilní, jestliže $h\lambda \in \mathbb{S}$ pro daný krok h dělení intervalu $(0, +\infty)$. Řekneme, že metoda je nepodmíněně stabilní, jestliže metoda je stabilní pro krok h libovolné délky, v opačném případě říkáme, že metoda je podmíněně stabilní.

Použijeme-li pro řešení úlohy Eulerovu metodu, dostaneme

$$y_{i+1} = y_i + h\lambda y_i = (1 + h\lambda) y_i \ \Rightarrow\ R(z) = 1 + z$$

a oblastí stability vyhovující podmínce $|1 + z| < 1$ je kruh v komplexní rovině se středem v bodě $[-1, 0]$ a s poloměrem 1. Dále, pro $\lambda \in \boldsymbol{R}$ je $z \in (-2, 0)$, což spolu s $h > 0$ implikuje, že $\lambda < 0$ a platí

$$0 > h\lambda > -2 \ \Leftrightarrow\ 0 < h < \frac{-2}{\lambda} \ \Rightarrow\ h \in \left(0, \frac{-2}{\lambda}\right)$$

Pro Eulerovu metodu je tedy interval absolutní stability $(0, -2/\lambda)$.

Stabilita metody (2)

Použijeme-li pro řešení úlohy RK metodu 2. řádu, dostaneme

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(\lambda y_i + \lambda(y_i + h\lambda y_i)) = \left(1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}\right) y_i \Rightarrow R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2}$$

a oblast stability v komplexní rovině vyhovuje podmínce

$$\left|1 + z + \frac{z^2}{2}\right| < 1$$

Pro $\lambda \in \boldsymbol{R}$ je $z \in \boldsymbol{R}$ a platí

$$-2 < z + \frac{z^2}{2} < 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{z^2}{2} + z > 0 \wedge \frac{z^2}{2} + z + 2 > 0 \;\Rightarrow\; z \in (-2, 0),$$

což spolu s $h > 0$ implikuje, že $\lambda < 0$ a platí

$$0 > h\lambda > -2 \;\Leftrightarrow\; 0 < h < \frac{-2}{\lambda} \;\Rightarrow\; h \in \left(0, \frac{-2}{\lambda}\right)$$

Pro RK metodu 2. řádu je tedy interval absolutní stability $(0, -2/\lambda)$.

Odhad chyby metody (1)

Nechť existuje funkce $e : \langle a, b\rangle \times \boldsymbol{R}$ (závislá na y) taková, že akumulační chybu metody v bodě x_n lze aproximovat vztahem

$$e_n = h^p e(x_n) + O(h^{p+1}).$$

Pro odhad chyby použijeme tzv. metodu poloviční kroku, kdy na tutéž úlohu použijeme postupně metodu s krokem $2h$ a h. Dostaneme uzly a odpovídající hodnoty přibližného řešení:

$$x_i^{(2h)} = a + i(2h), \quad y_i^{(2h)} \quad \text{a} \quad x_i^{(h)} = a + ih, \quad y_i^{(h)}.$$

Vidíme, že $x_i^{(2h)} = x_{2i}^{(h)}$. V těchto bodech můžeme porovnat hodnoty přibližných řešení. Pro metodu p-tého řádu dostaneme

$$e_i^{(2h)} = y_i^{(2h)} - y\left(x_i^{(2h)}\right) = (2h)^p e\left(x_i^{(2h)}\right) + O(h^{p+1})$$

$$e_{2i}^{(h)} = y_{2i}^{(h)} - y\left(x_{2i}^{(h)}\right) = h^p e\left(x_i^{(2h)}\right) + O(h^{p+1})$$

Odtud plyne, že

$$y_i^{(2h)} - y_{2i}^{(h)} = (2^p - 1)h^p e\left(x_i^{(2h)}\right) + O(h^{p+1}) \Rightarrow h^p e\left(x_i^{(2h)}\right) = \frac{y_i^{(2h)} - y_{2i}^{(h)}}{2^p - 1} + O(h^{p+1})$$

a aproximaci

$$h^p e\left(x_i^{(2h)}\right) + O(h^{p+1}) = e_{2i}^{(h)} \approx \frac{y_i^{(2h)} - y_{2i}^{(h)}}{2^p - 1}$$

nazýváme odhadem chyby metodou poloviční kroku. Jedná se o tzv. aposteriorní odhad chyby, který získáme na základě přibližného řešení (a příp. dat úlohy).

Stiff úlohy (1)

Uvažujeme modelovou stiff rovnici druhého řádu

$$y'' + 101y' + 100y = 0,$$

její charakteristický polynom má kořeny $\lambda_1 = -100$ a $\lambda_2 = -1$, a tak její řešení je

$$y = C_1 e^{-100x} + C_2 e^{-x}$$

Čísla $\tau_i = -1/\lambda_i$, $i = 1, 2$, nazýváme tzv. charakteristickými časy úlohy.

Pro obvyklé metody musí pro zaručení stability platit:

$$h \leq \tau_1 \wedge h \leq \tau_2 \;\Leftrightarrow\; h \leq \tau_1 \wedge h \leq \tau_2 \Rightarrow h \lesssim \min_i \tau_i = 0.01.$$

Stiff úlohy jsou diferenciální rovnice, které v sobě obsahují útlum s charakteristickým časem $\tau_1 \ll \tau_{i\neq 1}$ a i když pro $\tau \gg \tau_1$ je rychle se tlumící složka zanedbatelně malá, přesto je nutné u dosud popsaných metod používat krok $h \lesssim \tau_1$. Stiff rovnice nazýváme též rovnicemi se silným tlumením.

Příčinu těchot potíží si můžeme demonstrovat na následující úloze

$$y' = -100y, \quad y(0) = y_0,$$

která má analytické řešení $y = y_0 \cdot e^{-100x}$ a $y \to 0$ pro $x \to +\infty$. Řešíme-li ji numericky Eulerovou metodou, dostaneme

$$y_{i+1} = y_i + h(-100y_i) = (1 - 100h)y_i \Rightarrow y_n = (1 - 100h)^n y_0.$$

Je-li $h > 0.02$, tak $|y_n| \to +\infty$ $x \to +\infty$ a řešení je zcela chybné. Metody dovolující prodloužení kroku h pro stiff úlohy se nazývají stiff stabilní.

Stiff úlohy (2)

Mezi nejjednodušší stiff stabilní metody patří tzv. implicitní Eulerova metoda, která má rekurentní předpis

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

a pro danou rovnici vede na tvar

$$y_{i+1} = y_i + h(-100y_{i+1}) \Rightarrow y_{i+1} = \frac{y_i}{(1+100h)} \Rightarrow y_n = \frac{y_0}{(1+100h)^n},$$

zde numerické řešení konverguje k 0 pro libovolný krok h.

Numerické řešení okrajových úloh (1)

V následující části se budeme zabývat řešením rovnice

$$-\alpha(x)y''(x) + \beta(x)y'(x) + \gamma(x)y(x) = f(x), \quad x \in \langle a, b\rangle,$$
$$y(a) = c_1, \quad y(b) = c_2,$$

kde $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ a $f(x)$ jsou omezené po částech spojité funkce a navíc splňují

$$\alpha(x) > 0,$$
$$\gamma(x) \geq 0, \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

Diferenciální rovnice je doplněna dvojicí podmínek které však nejsou zadány v jednom bodě (jak je tomu u počátečných úloh), ale ve dvou různých bodech - tyto podmínky nazýváme okrajové (mohou být formulovány i jako integrální podmínky). Obyčejnou diferenciální rovnici doplněnou okrajovými podmínkami nazýváme okrajovou úlohou.

Základní metody řešení okrajových úloh jsou:

- metoda sítí (konečných diferencí),
- variační metody.

Metoda sítí (1)

Nejprve provedeme tzv. diskretizaci úlohy. Zvolme $N \in \mathbb{N}$ a položme $x_0 = a$ a x_{N+1}. Mezi a a b vložíme body $x_1, \ldots, x_N$ a rozdělíme interval $\langle a, b \rangle$ na $N+1$ podintervalů o délkách

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h_i,$$

resp. krocích h_i. Body x_i nazýváme uzly a jejich množinu sítí.

Nejjednodušší je ekvidistantní dělění s krokem h, kdy klademe

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{N+1} = h, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Aproximaci řešení úlohy budeme hledat v jednotlivých uzlových bodech, tj. získáme množinu hodnot

$$y_0 = c_1, y_1, \ldots, y_N, y_{N+1} = c_2.$$

Derivace řešení aproximujeme pomocí tzv. konečných diferencí různými způsoby

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad \text{(dopředná diference)},$$

odvozenou z Taylorova rozvoje

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_i) + O(h^3),$$

a protože platí

$$y'(x_i) - \left(\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} \right) = \frac{1}{2} h y''(x_i) + O(h^2),$$

máme metodu prvního řádu přesnosti.

Metoda sítí (2)

Nahradíme-li derivaci vztahem

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad \text{(centrální diference)},$$

a protože platí

$$y'(x_i) - \left(\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} \right) = -\frac{h^2}{6} y'''(x_i) + O(h^4),$$

máme metodu druhého řádu přesnosti.

Druhou derivaci aproximujeme pomocí

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

a protože platí

$$y''(x_i) - \left(\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \right) = \frac{h^2}{12} y^{(4)}(x_i) + O(h^4),$$

máme metodu druhého řádu přesnosti.

Metoda sítí (3)

Uvažujme následující úlohu

$$-\alpha(x)y''(x) + \beta(x)y'(x) + \gamma(x)y(x) = f(x), \quad x \in \langle 0, 1\rangle, \quad y(0) = c_1,\ y(1) = c_2.$$

Položme dále

$$\alpha(x_i) = \alpha_i, \quad \beta(x_i) = \beta_i, \quad \gamma(x_i) = \gamma_i, \quad f(x_i) = f_i, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Použijeme-li centrální diference, můžeme tuto rovnici aproximovat ve všech vnitřních bodech sítě následně:

$$-\alpha_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \beta_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + \gamma_i y_i = f_i, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Tyto tzv. síťové rovnice můžeme upravit na tvar

$$\underbrace{\left(-\alpha_i - \beta_i \frac{h}{2}\right)}_{r_i} y_{i-1} + \underbrace{\left(2\alpha_i + \gamma_i h^2\right)}_{p_i} y_i + \underbrace{\left(-\alpha_i + \beta_i \frac{h}{2}\right)}_{q_i} y_{i+1} = h^2 f_i$$

představující tak ve skutečnosti soustavu N lineárních algebraických rovnic

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

pro neznámé $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_N)$.

Metoda sítí (4)

Získanou soustavu lineárních algebraických rovnic můžeme rozepsat podrobněji

$$\begin{pmatrix} p_1 & q_1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ r_2 & p_2 & q_2 & & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & & & r_{N-1} & p_{N-1} & q_{N-1} \\ 0 & & \cdots & & 0 & r_N & p_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f_1 - r_1 \frac{c_1}{h^2} \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N - q_N \frac{c_2}{h^2} \end{pmatrix}$$

a řešíme ji pomocí nějaké vhodné (iterační) metody.

Lze dokázat, že pro $h \to 0+$ platí

$$|y(x_i) - y_i| \to 0, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Poznámka: *Při řešení okrajobvých úloh pro obyčejné diferenciální rovnice metodou sítí je nutno řešit systémy lineárních algebraických rovnic s pásovou maticí.*