Konzultace 5

- klasifikace parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu
- numerické řešení eliptických parciálních diferenciálních rovnic
- numerické řešení parabolických parciálních diferenciálních rovnic
- numerické řešení hyperbolických parciálních diferenciálních rovnic

Klasifikace PDR 2. řádu (1)

Rovnici ve tvaru

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

nazýváme parciální diferenciální rovnicí druhého řádu pro neznámou funkci $u = u(x, y)$.

Jestliže rovnice výše uvedená rovnice je lineární vzhledem k druhým derivacím funkce u, tj. má tvar

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K = 0$$

kde funkce A, B, C, K závisí na $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$, nazývá se tato rovnice kvazilineární parciální diferenciální rovnicí druhého řádu.

Jestliže však funkce A, B, C závisí pouze na x a y a funkce K je lineární v $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ přejde tato rovnice na tvar

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + E(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + F(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + G(x,y) = 0$$

a nazývá se lineární parciální diferenciální rovnicí druhého řádu.

Klasifikace PDR 2. řádu (2)

Nechť v oblasti $\Omega \subset \boldsymbol{R}^2$, kde $A(x,y), B(x,y), C(x,y), D(x,y), E(x,y), F(x,y)$ a $G(x,y)$ jsou spojité, je dána rovnice

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + E(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + F(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + G(x,y) = 0$$

a nazývá se lineární parciální diferenciální rovnicí druhého řádu.

Uvažujeme bod $[x_0, y_0] \in \Omega$ a definujme

$$D(x_0,y_0) = B^2(x_0,y_0) - 4A(x_0,y_0)C(x_0,y_0).$$

Jestliže v tomto bodě platí:

1) $D(x_0,y_0) < 0$ nazývá se tato rovnice eliptická v tomto bodě,
2) $D(x_0,y_0) = 0$ nazývá se tato rovnice parabolická v tomto bodě,
3) $D(x_0,y_0) > 0$ nazývá se tato rovnice hyperbolická v tomto bodě.

Výše uvedená rovnice se nazývá eliptická, resp. parabolická, resp. hyperbolická v oblasti Ω, jestliže v každém bodě oblasti Ω je tato rovnice eliptická, resp. parabolická, resp. hyperbolická.

Klasifikace PDR (3)

Každou parciální diferenciální rovnici druhého řádu ve tvaru můžeme převést na tzv. kanonický tvar. Níže uvedeme souhrnně zmíněné rovnice, ppři zápisu použijeme symboly x, y pro nezávisle proměnné a u pro hledanou funkci:

$$\text{a) eliptický typ:} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\text{b) parabolický typ:} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\text{c) hyperbolický typ:} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Nechť n je dimenze prostoru. Diferenciální operátor

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i}$$

se nazývá Laplaceův operátor, speciálně pro 2D úlohy píšeme

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Klasifikace PDR (4)

Některé rovnice druhého řádu mají rozumnou fyzikální interpretaci, použije-li se jedna proměnná pro čas a zbývající proměnné pro prostorové souřadnice, tyto rovnice se nazývají evoluční. Abychom výrazněji odlišili časovou proměnnou a prostorové proměnné, používáme značení (x, t) pro dvojici (prostorový bod, časový okamžik). V evolučních rovnicích předpokládáme, že proměnná x probíhá množinu $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$, proměnná t je jednorozměrná, nejčastěji jde o omezený interval $(0, T)$, $T > 0$. V našem případě prostorový bod bude ležet na reálné ose, tj. $\Omega \subset \boldsymbol{R}$ a platí $[x, t] \in \Omega \times (0, T) \equiv Q_T$, kde množinu Q_T nazýváme časoprostorový válec. Řešení parciálních diferenciálních rovnic je poněkud komplikovanější a samotné řešení dané rovnice není rovnicí určeno jednoznačně. Chceme-li určit některé řešení jednoznačným způsobem, musíme je definovat dalšími podmínkami, které mohou být velmi různorodé:

- počáteční podmínka - v nestacionárních (časově závislých, tj. evolučních) úlohách je nutné zadat rozložení veličiny u v počátečním čase $t_0 = 0$:
$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{v } \Omega$$
- Dirichletova okrajová podmínka - zadáme-li na $\partial\Omega_D$, části hranice oblasti Ω, veličinu u, tj.
$$u(x, t) = u_D(x, t) \quad \text{na } \partial\Omega_D$$
- Neumanova okrajová podmínka - zadáme-li na $\partial\Omega_N$, části hranice oblasti Ω, hustotu vtoku veličiny u, tj.
$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} = u_N(x, t) \quad \text{na } \partial\Omega_N,$$
kde $\vec{n}$ je vnější jednotková normála k $\partial\Omega_N$. Speciálně, požadujeme-li neprostupnost veličiny u hranicí $\partial\Omega_N$ je $u_N \equiv 0$.

Klasifikace PDR (5)

Rovnici tvaru

$$-\varepsilon \Delta u = f(x, y), \quad \varepsilon > 0$$

nazýváme Poissonovou rovnicí a jelikož platí

$$A(x, y) = -\varepsilon,\ B(x, y) = 0,\ C(x, y) = -\varepsilon \ \Rightarrow\ D(x, y) = -4\varepsilon^2$$

je tato rovnice eliptická v $\boldsymbol{R}^2$. Speciálně, je-li $f(x, y) = 0$, pak se tato rovnice nazývá Laplaceova.
K úloze najít rešení Poissonovy rovnice zpravidla pridáváme Dirichletovu nebo Neumannovu okrajovou podmínku. Přidáme-li obě podmínky současně (každou však na jiné části hranice), hovoříme o tzv. smíšených okrajových podmínkách.

Nejčastěji se eliptické parciální diferenciální rovnice vyskytují v modelech stacionárních (tzn. časově stálých), tj.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Klasifikace PDR (6)

Rovnice tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \Delta u = f(x, y), \quad \varepsilon > 0$$

resp. rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, y), \quad \varepsilon > 0,$$

pro kterou platí

$$A(x, y) = -\varepsilon,\ B(x, y) = 0,\ C(x, y) = 0 \ \Rightarrow\ D(x, y) = 0$$

je rovnice parabolická v $\boldsymbol{R}^2$. Speciálně, je-li $f(x, y) = 0$, pak se tato rovnice nazývá rovnicí vedení tepla nebo též rovnice difuze.

K úloze najít rešení parabolické rovnice přidáváme Dirichletovu nebo Neumannovu okrajovou podmínku nebo smíšené okrajové podmínky současně podmínku počáteční, neboť z fyzikálního hlediska považujeme parabolickou parciální diferenciální rovnici za evoluční (tj. nestacionární), tj. obecně

$$\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0.$$

Klasifikace PDR (7)

Rovnice tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varepsilon \Delta u = f(x,y), \quad \varepsilon > 0$$

resp. rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,y), \quad \varepsilon > 0,$$

pro kterou platí

$$A(x,y) = -\varepsilon,\ B(x,y) = 0,\ C(x,y) = 1 \ \Rightarrow \ D(x,y) = 4\varepsilon$$

je rovnice hyperbolická v $\boldsymbol{R}^2$. Speciálně, je-li $f(x,y) = 0$, pak se tato rovnice nazývá vlnovou rovnicí.

K úloze najít rešení hyperbolické rovnice přidáváme Dirichletovu nebo Neumannovu okrajovou podmínku nebo smíšené okrajové podmínky současně podmínky počáteční, a to

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(u,0) = u_1(x) \quad \text{v } \Omega$$

Hyperbolická parciální diferenciální rovnici patří mezi evoluční (tj. nestacionární) rovnice.

Klasifikace PDR (8)

Mezi vlnovou rovnicí a rovnicí vedení tepla jsou značné rozdíly. Pomineme-li fakt, že u vlnové rovnice zadáváme na počátku nejen funkci, ale i derivaci, hlavní rozdíly jsou následující:

- Rovnice vedení tepla zhlazuje, tedy i nehladká počátecní podmínka dává od samého počátku hladké rešení. Vlnová rovnice muže hrubosti a singularity pocátecních podmínek šírit dál
- Rovnice vedení tepla šíří informaci nekonečnou rychlostí. To je sice nefyzikální, ale přesto rovnice vystihuje v rámci možností fyzikální realitu dost verne. Vlnová rovnice šíří informaci konstantní rychlostí (v tom tvaru jak ji máme zapsanou je to rychlost 1 pro $\varepsilon = 1$)
- Rovnici vedení tepla má smysl řešit jen dopředu v čase, to znamená, že úloha určit z rozložení teploty v nejakém časovém okamžiku její rozložení v minulosti je nekorektní. Vlnová rovnice se dá řešit dopředu i zpět.

Numerické řešení eliptických PDR 2. řádu (1)

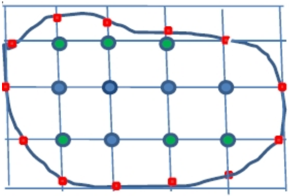
Uvažujme Dirichletovu úlohu pro Poissonovu (Laplaceovu) rovnici

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(x,y) \quad \text{v } \Omega \subset \boldsymbol{R}^2 \\ u(x,y) &= u_D(x,y) \quad \text{na } \partial\Omega \end{aligned}$$

Při konstrukci numerického řešení metodou sítí postupujeme podle následujících kroků:

a) zvolíme prostorový krok h, stejný na osách x a y (obecně může být i různý), a zadanou oblast Ω pokryjeme sítí, kterou tvoří síťové přímky rovnoběžné s osami x a y, vzdálené o h ve směru x i y

b) označíme a očíslujeme průsečíky síťových přímek uzly sítě, které dále dělíme na
   - regulární, tj. všechny 4 sousední uzly jsou ve vzdálenosti h,
   - neregulární, tj. aspoň jeden sousední uzel je ve vzdálenosti $< h$,
   - hraniční, tj. průsečík síťové přímky s hranicí oblasti $\partial\Omega$.



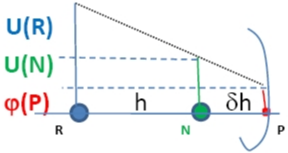
Numerické řešení eliptických PDR 2. řádu (2)

c) v regulárních uzlech sítě nahradíme 2. derivace centrálními diferencemi, tj.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x-h,y)}{h^2} + O(h^2)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{u(x,y+h) - 2u(x,y) + u(x,y-h)}{h^2} + O(h^2)$$

d) v neregulárních uzlech použijeme lineární interpolaci - Nechť neregulární uzel $N = [x_N, y_N]$ má sousední hraniční uzel $P = [x_P, y_P]$ ve vzdálenosti δ, $(0 < \delta < 1)$, a na stejné síťové přímce má sousední regulární uzel $R = [x_R, y_R]$ ve vzdálenosti h. Hledanou hodnotu $u(x_N, y_N)$ interpolujeme z hodnot v regulárním uzlu $u(x_R, y_R)$ a v hraničním uzlu $u(x_P, y_P) = u_D(x_P, y_P)$, tj.

$$\frac{u(x_R, y_R) - u_D(x_P, y_P)}{h + \delta h} = \frac{u(x_R, y_R) - u(x_N, y_N)}{h}$$



Postupem a)-d) jsme tak obdrželi numerické schéma.

Numerické řešení eliptických PDR 2. řádu (3)

e) Pro každý vnitřní uzel sítě sestavíme, tzv. síťovou rovnici podle numerického schématu, přičemž rozlišujeme:
- síťová rovnice pro regulární uzel $X_{ij} = [x_i, y_j]$: Označme $U_{ij} \approx u(x_i, y_j)$ a $F_{ij} = f(x_i, y_j)$, dále platí

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) \quad \text{pro každý regulární uzel } X_{ij}$$

a zanedbáme-li chybu dosadíme-li do rovnice 2. centrání diference, dostaneme

$$\begin{aligned} -\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2} - \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2} &= F_{ij} \\ -U_{i-1,j} - U_{i,j-1} + 4U_{i,j} - U_{i+1,j} - U_{i,j+1} &= h^2 F_{ij} \end{aligned}$$

Poslední rovnice je síťová rovnice pro regulární uzel X_{ij}.
- síťová rovnice pro neregulární uzel $N = [x_N, y_N]$: Označme $U_N \approx u(x_N, y_N)$, dále $U_{D,P} = u_D(x_P, y_P)$, kde $P = [x_P, y_P]$ je hraniční uzel, a $U_R \approx u(x_R, y_R)$, kde $R = [x_R, y_R]$ je regulární uzel $R = [x_R, y_R]$, z intepolovaných hodnot plyne

$$\frac{u_R - u_{D,P}}{h + \delta h} = \frac{U_R - U_N}{h} \Rightarrow \frac{u_R - u_{D,P}}{1 + \delta} = \frac{U_R - U_N}{1} \Rightarrow$$
$$U_R - u_{D,P} = U_R(1+\delta) - U_N(1+\delta) \Rightarrow (1+\delta)U_N - \delta U_R = u_{D,P}$$

Poslední rovnice je síťová rovnice pro neregulární uzel N.

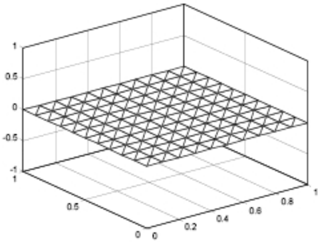
f) vyřešením soustavy síťových rovnic (lineárních rovnic)

$$\mathbb{A}U = b$$

získáme numerické řešení, tj. přibližné hodnoty hledané funkce u ve všech vnitřnch uzlech sítě.

Numerické řešení eliptických PDR 2. řádu (4)

V dalším budeme uvažovat, že řešíme problém pouze na síti s regulárními a hraničními uzly, tj. nemusíme sestavovat síťové rovnice v neregulárních uzlech. Pro jednoduchost uvažujme oblast $\Omega = \langle 0, 1 \rangle^2$ s prostorovým krokem $h = 1/n$.



Při řešení soustavy lineárních rovnic hledáme neznámý vektor

$$U = (U_{11}, \dots, U_{1,n-1}, U_{21}, \dots, U_{2,n-1}, \dots, U_{n-1,1}, \dots, U_{n-1,n-1})^T \in \boldsymbol{R}^{(n-1)\times(n-1)}$$

Numerické řešení eliptických PDR 2. řádu (5)

Matici soustavy síťových rovnic můžeme zapsat následovně

$$
\mathbb{A} = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccc}
\multicolumn{4}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{U_{11},\dots,U_{1,n-1}}} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{U_{21},\dots,U_{2,n-1}}} & & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{U_{n,1},\dots,U_{n,n-1}}}
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
4 & -1 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-1 & 4 & \ddots & \vdots & 0 & -1 & \ddots & \vdots & \cdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & -1 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & -1 & 4 & 0 & \cdots & 0 & -1 & & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-1 & 0 & \cdots & 0 & 4 & -1 & \cdots & 0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & -1 & \ddots & \vdots & -1 & 4 & \ddots & \vdots & \cdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & -1 & & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & -1 & 4 & & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 & & \vdots & & & & \vdots & & \ddots & & & \vdots & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 4 & -1 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \cdots & -1 & 4 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & 0 & \cdots & -1 & 4
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Numerické řešení eliptických PDR 2. řádu (6)

Vektor pravé strany můžeme zapsat následovně

$$b = \begin{pmatrix} h^2 F_{11} + U_{0,1} + U_{1,0} \\ h^2 F_{12} + U_{0,2} \\ \vdots \\ h^2 F_{1,n-1} + U_{0,n-1} + U_{1,n} \\ \hline h^2 F_{21} + U_{1,0} \\ h^2 F_{22} \\ \vdots \\ h^2 F_{2,n-1} + U_{2,n} \\ \hline \vdots \\ \hline h^2 F_{n-1,1} + U_{0,1} + U_{1,0} \\ h^2 F_{n-1,2} + U_{0,2} \\ \vdots \\ h^2 F_{n-1,n-1} + U_{n,n-1} + U_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

Numerické řešení eliptických PDR 2. řádu (7)

Soustavu síťových rovnic můžeme zapsat také blokově

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{T} & -\mathbb{I} & \cdots & \mathbb{O} \\ -\mathbb{I} & \mathbb{T} & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{T} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} h^2 F^1 \\ h^2 F^2 \\ \vdots \\ h^2 F^{n-1} \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \\ \vdots \\ U^{n-1} \end{pmatrix}$$

kde

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

jsou matice řádu $(n-1) \times (n-1)$ a

$$F^i = \left(F_{i,1}, F_{i,2}, \ldots, F_{i,n-1}\right)^T, \quad U^i = \left(U_{i,1}, U_{i,2}, \ldots, U_{i,n-1}\right)^T \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

V tomto případě jsme navíc předpokládali homogenní Dirichletovy okrajové podmínky, tj.

$$U_{0,j} = U_{n,j} = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n-1, \qquad U_{i,0} = U_{i,n} = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n-1$$

Numerické řešení parabolických PDR 2. řádu (1)

Uvažujme rovnici vedení tepla

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \quad \text{v } Q_T = (a,b) \times (0,T) \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad \text{na } \langle a,b \rangle \\ u(a,t) &= \alpha(t), \quad u(b,t) = \beta(t), \end{aligned}$$

kde $a, b \in \boldsymbol{R}, a < b$ a $\varepsilon, T \in \boldsymbol{R}^+$ Při konstrukci numerického řešení metodou sítí postupujeme podle následujících kroků:

a) ověříme tzv. podmínky souhlasu, tj. shody hodnot $u(x,t)$ daných po.čáteční a okrajovou podmínkou v bodech $[a,0]$ a $[b,0]$:

$$u_0(a) = \alpha(0), \quad u_0(b) = \beta(0)$$

b) zvolíme prostorový krok h a čaasový krok τ a ověříme stabilitu numericke metody:
   - explicitní schéma je stabilní pro $\frac{\varepsilon\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$,
   - implicitní schéma je nepodmíněně stabilní

c) vybereme numerickou metodu: explicitní nebo implicitní metoda sítí.

Numerické řešení parabolických PDR 2. řádu (2)

d) podle zvolených kroků h, τ vytvoříme síť - uzly sítě jsou body:

$$P_i^k = [x_i, t_k], \quad x_i = a + ih, t_k = \tau k.$$

Množina uzlů P_i^k tvoří při pevném k tzv. k-tou časovou vrstvu. Numerické řešení jsou vypočítané hodnoty

$$U_i^k \approx u(x_i, t_k)$$

v uzlech sítě a tyto hodnoty U_i^k určujeme ve směru rostoucího t, po jednotlivých časových vrstvách.

e) prostorové derivace v uzlu P_i^k nahradíme druhou centrální diferencí, tj.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) \approx \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k - U_{i+1}^k}{h^2}$$

f) časové derivace v uzlu P_i^k nahradíme bud dopřednou diferencí, tj.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k) \approx \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau}$$

nebo zpětnou diferencí

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k) \approx \frac{U_i^k - U_i^{k-1}}{\tau}.$$

Numerické řešení parabolických PDR 2. řádu (3)

g) použijeme-li dopředné diference, tak po dosazení do rovnice vedení tepla dostaneme explicitní schéma

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = \varepsilon \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} + F_i^k$$

$$U_i^{k+1} = \frac{\varepsilon\tau}{h^2} U_{i-1}^k + \left(1 - 2\frac{\varepsilon\tau}{h^2}\right) U_i^k + \frac{\varepsilon\tau}{h^2} U_{i+1}^k + \tau F_i^k$$

Poslední identita přestavuje rovnici pro uzel P_i^k pro $i = 1, n-1$ a $k \geq 0$.

h) použijeme-li zpětné diference, tak po dosazení do rovnice vedení tepla dostaneme implicitní schéma

$$\frac{U_i^k - U_i^{k-1}}{\tau} = \varepsilon \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} + F_i^k$$

$$-\frac{\varepsilon\tau}{h^2} U_{i-1}^k + \left(1 + 2\frac{\varepsilon\tau}{h^2}\right) U_i^k - \frac{\varepsilon\tau}{h^2} U_{i+1}^k = U_i^{k-1} + \tau F_i^k$$

Poslední identita přestavuje soustavu rovnic pro k-tou časovou vrstvu, $k \geq 1$.

V obou schématech klademe, je-li $k = 0$, pak $U_i^0 = u_0(x_i)$, dále je-li $i = 0$, pak $U_0^k = \alpha(t_k)$ a je-li $n = 0$, pak $U_n^k = \beta(t_k)$

V obou schématech se dopouštíme chyby řádu $O(h^2 + \tau)$, tj. schéma jsou druhého řádu přesnosti v prostoru a prvního řádu přesnosti v čase.

Numerické řešení hyperbolických PDR 2. řádu (1)

Uvažujme vlnovou rovnici

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \quad \text{v } Q_T = (a,b) \times (0,T) \\
u(x,0) &= u_0(x) \quad \text{na } \langle a,b \rangle \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= u_1(x) \quad \text{na } \langle a,b \rangle \\
u(a,t) &= \alpha(t), \quad u(b,t) = \beta(t),
\end{aligned}
$$

kde $a, b \in \boldsymbol{R}, a < b$ a $\varepsilon, T \in \boldsymbol{R}^+$ Při konstrukci numerického řešení metodou sítí postupujeme podle následujících kroků:

a) ověříme tzv. podmínky souhlasu, tj. shody hodnot $u(x,t)$ daných po.čáteční a okrajovou podmínkou v bodech $[a,0]$ a $[b,0]$:

$$u_0(a) = \alpha(0), \quad u_1(a) = \alpha'(0), \quad u_0(b) = \beta(0), \quad u_1(b) = \beta'(0)$$

b) zvolíme prostorový krok h a časový krok τ a ověříme stabilitu numerické metody:
   - explicitní schéma je stabilní pro $\frac{\varepsilon\tau}{h^2} \leq 1$,
   - implicitní schéma je nepodmíněně stabilní

c) vybereme numerickou metodu: explicitní nebo implicitní metoda sítí.

Numerické řešení hyperbolických PDR 2. řádu (2)

d) podle zvolených kroků h, τ vytvoříme síť - uzly sítě jsou body:

$$P_i^k = [x_i, t_k], \quad x_i = a + ih, t_k = \tau k.$$

Množina uzlů P_i^k tvoří při pevném k tzv. k-tou časovou vrstvu. Numerické řešení jsou vypočítané hodnoty

$$U_i^k \approx u(x_i, t_k)$$

v uzlech sítě a tyto hodnoty U_i^k určujeme ve směru rostoucího t, po jednotlivých časových vrstvách.

e) prostorové derivace v uzlu P_i^k nahradíme druhou centrální diferencí, tj.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) \approx \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k - U_{i+1}^k}{h^2}$$

f) časové derivace v uzlu P_i^k nahradíme druhou centrální derivací, tj.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k) \approx \frac{U_i^{k-1} - 2U_i^k - U_i^{k+1}}{\tau^2}$$

Numerické řešení hyperbolických PDR 2. řádu (3)

g) po dosazení do vlnové rovnice dostaneme explicitní schéma

$$\frac{U_i^{k-1} - 2U_i^k - U_i^{k+1}}{\tau^2} = \varepsilon \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} + F_i^k$$
$$U_i^{k+1} = \frac{\varepsilon^2\tau^2}{h^2} U_{i-1}^k + 2\left(1 - \frac{\varepsilon^2\tau^2}{h^2}\right) U_i^k + \frac{\varepsilon^2\tau^2}{h^2} U_{i+1}^k - U_i^{k-1} + \tau^2 F_i^k$$

Poslední identita přestavuje rovnici pro uzel P_i^k pro $i = 1, n-1$ a $k \geq 2$.

h) odvodíme rovnice pro první časovou vrstvu s chybou $O(\tau)$: v počáteční podmínce nahradíme derivaci v čase $t = 0$, tj. v uzlech P_i^0, dopřednou diferencí

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) = \frac{u(x_i, t_1) - u(x_i, 0)}{\tau} + O(\tau) = u_1(x_i), \quad u(x_i, 0) = u_0(x_i)$$
$$U_i^1 = u_0(x_i) + \tau u_1(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Poslední identita přestavuje soustavu rovnic pro první časovou vrstvu.

Numerické řešení hyperbolických PDR 2. řádu (4)

i) chceme-li zachovat řád schématu $O(h^2+\tau^2)$, musíme použít pro první časovou vrstvu rovnice s chybou $O(\tau^2)$:

$$U_i^1 = \frac{\varepsilon^2\tau^2}{2h^2}u_0(x_{i-1}) + \left(1-\frac{\varepsilon^2\tau^2}{h^2}\right)u_0(x_i) + \frac{\varepsilon^2\tau^2}{2h^2}u_0(x_{i+1}) + \tau u_1(x_i) + \frac{\tau^2}{2}f(x_i,0),$$

$i=1,\ldots,n-1$. Poslední identita přestavuje soustavu rovnic pro první časovou vrstvu.