Matematika III (numerická matematika)

Cvičení pro kombinované studium fakulty strojní

TU v Liberci

Jiří Hozman

Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

2. června 2014

Příklad 1. Vypočtěte l^1-normu, l^2-normu a l^∞-normu vektoru $\boldsymbol{v}$, kde

a) $\boldsymbol{v} = (-1, 0, 2, 3)$ $\qquad [\|\boldsymbol{v}\|_1 = 6,\ \|\boldsymbol{v}\|_2 = \sqrt{14},\ \|\boldsymbol{v}\|_\infty = 3]$

b) $\boldsymbol{v} = (4, 4, -6, -18)$ $\qquad [\|\boldsymbol{v}\|_1 = 32,\ \|\boldsymbol{v}\|_2 = 14\sqrt{2},\ \|\boldsymbol{v}\|_\infty = 18]$

Příklad 2. Vypočtěte $\|\boldsymbol{A}\|_1$, $\|\boldsymbol{A}\|_\infty$ a $\|\boldsymbol{A}\|_F$ pro matice $\boldsymbol{A}$, jestliže:

a) $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad [\|\boldsymbol{A}\|_1 = 7,\ \|\boldsymbol{A}\|_\infty = 7,\ \|\boldsymbol{A}\|_F = \sqrt{37}]$$

b) $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 12 \end{pmatrix} \qquad [\|\boldsymbol{A}\|_1 = 28,\ \|\boldsymbol{A}\|_\infty = 35,\ \|\boldsymbol{A}\|_F = 6\sqrt{13}]$$

c) $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad [\|\boldsymbol{A}\|_1 = 19,\ \|\boldsymbol{A}\|_\infty = 24,\ \|\boldsymbol{A}\|_F = 12\sqrt{2}]$$

d) $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad [\|\boldsymbol{A}\|_1 = 10,\ \|\boldsymbol{A}\|_\infty = 10,\ \|\boldsymbol{A}\|_F = 8]$$

e) $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad [\|\boldsymbol{A}\|_1 = 4,\ \|\boldsymbol{A}\|_\infty = 4,\ \|\boldsymbol{A}\|_F = \sqrt{15}]$$

h) $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad [\|\boldsymbol{A}\|_1 = 16,\ \|\boldsymbol{A}\|_\infty = 13,\ \|\boldsymbol{A}\|_F =]$$

Příklad 3. Pomocí přímého chodu Gaussovy eliminace bez pivotace převeďte matice $\boldsymbol{A}$ na horní trojúhelníkové matice U, jestliže:

a) $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left[U = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{13} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{22} \end{pmatrix} \right]$$

b) $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left[U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

c) $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left[U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right]$$

Příklad 4. Určete LU rozklad matice $\boldsymbol{A}$ s pivotací, tj. nalezněte matice L, U, P tak, aby platilo $LU = P\boldsymbol{A}$, kde P je permutační matice, jestliže:

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\left[L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{10} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$

b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\left[L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$

c) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ $\left[L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$

d) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -6 & -19 & 10 \\ 3 & 9 & -5 \end{pmatrix}$ $\left[L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} -6 & -19 & 10 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$

e) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\left[L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$

Příklad 5. Rozhodněte, zdali je matice $\boldsymbol{A}$ pozitivně definitní. V kladném případě nalezněte její Choleského rozklad, tj. nalezněte dolní trojúhelníkovou matici L tak, aby platilo $\boldsymbol{A} = LL^T$, jestliže:

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ $\left[L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right]$

b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 7 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ $\left[L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right]$

c) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 20 & 8 \\ 0 & 8 & 32 \end{pmatrix}$ $\left[L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \right]$

Příklad 6. Napište předpis Jacobiho metody pro řešení dané soustavy. Rozhodněte, zda pro tuto soustavu Jacobiho metoda konverguje a rozhodnutí zdůvodněte.

a) $\begin{aligned} 16x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 8x_2 - 3x_3 &= -4 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 &= 3 \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x_1^{k+1} &= -\tfrac{1}{8}x_2^k + \tfrac{1}{16}x_3^k \\ x_2^{k+1} &= -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x_1^k + \tfrac{3}{8}x_3^k \\ x_3^{k+1} &= -\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4}x_1^k + \tfrac{1}{4}x_2^k \end{aligned} \right]$

b) $\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 9x_3 &= 1 \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x_1^{k+1} &= \tfrac{5}{4} + \tfrac{1}{2}x_2^k - \tfrac{1}{4}x_3^k \\ x_2^{k+1} &= \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}x_1^k - \tfrac{1}{2}x_3^k \\ x_3^{k+1} &= -\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{9}x_1^k + \tfrac{2}{9}x_2^k \end{aligned} \right]$

c) $\begin{aligned} 8x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 8x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 2x_4 &= 5 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 8x_4 &= 4 \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x_1^{k+1} &= \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{4}x_2^k + \tfrac{1}{4}x_3^k - \tfrac{1}{8}x_4^k \\ x_2^{k+1} &= \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{8}x_1^k - \tfrac{1}{8}x_3^k + \tfrac{1}{4}x_4^k \\ x_3^{k+1} &= -\tfrac{5}{8} + \tfrac{1}{8}x_1^k + \tfrac{1}{2}x_2^k + \tfrac{1}{4}x_4^k \\ x_4^{k+1} &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8}x_1^k + \tfrac{3}{8}x_2^k + \tfrac{3}{8}x_3^k \end{aligned} \right]$

d) $\begin{aligned} -7x_1 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 + 7x_2 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 - 14x_3 + 3x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 9x_4 &= 2 \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x_1^{k+1} &= -\tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{7}x_3^k + \tfrac{3}{7}x_4^k \\ x_2^{k+1} &= \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{7}x_1^k + \tfrac{1}{7}x_4^k \\ x_3^{k+1} &= -\tfrac{1}{7} + \tfrac{5}{14}x_1^k + \tfrac{1}{14}x_2^k + \tfrac{3}{14}x_4^k \\ x_4^{k+1} &= \tfrac{2}{9} - \tfrac{1}{9}x_1^k + \tfrac{1}{9}x_2^k + \tfrac{2}{9}x_3^k \end{aligned} \right]$

Příklad 7. Napište předpis Gauss-Seidelovy metody pro řešení dané soustavy. Rozhodněte, zda pro tuto soustavu Gauss-Seidelova metoda konverguje a rozhodnutí zdůvodněte.

a) $\begin{array}{rcrcrl} 16x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = 0 \\ 4x_1 & + & 8x_2 & - & 3x_3 & = -4 \\ x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = 3 \end{array}$ $\left[\begin{array}{lcl} x_1^{k+1} & = & -\frac{1}{8}x_2^k + \frac{1}{16}x_3^k \\ x_2^{k+1} & = & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1^{k+1} + \frac{3}{8}x_3^k \\ x_3^{k+1} & = & -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x_1^{k+1} + \frac{1}{4}x_2^{k+1} \end{array}\right]$

b) $\begin{array}{rcrcrl} 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = 5 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 9x_3 & = 1 \end{array}$ $\left[\begin{array}{lcl} x_1^{k+1} & = & \frac{5}{4} + \frac{1}{2}x_2^k - \frac{1}{4}x_3^k \\ x_2^{k+1} & = & \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x_1^{k+1} - \frac{1}{2}x_3^k \\ x_3^{k+1} & = & -\frac{1}{9} + \frac{1}{9}x_1^{k+1} + \frac{2}{9}x_2^{k+1} \end{array}\right]$

c) $\begin{array}{rcrcrcrl} 8x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = 1 \\ x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = 1 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 8x_3 & + & 2x_4 & = 5 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & - & 8x_4 & = 4 \end{array}$ $\left[\begin{array}{lcl} x_1^{k+1} & = & \frac{1}{8} - \frac{1}{4}x_2^k + \frac{1}{4}x_3^k - \frac{1}{8}x_4^k \\ x_2^{k+1} & = & \frac{1}{8} - \frac{1}{8}x_1^{k+1} - \frac{1}{8}x_3^k + \frac{1}{4}x_4^k \\ x_3^{k+1} & = & -\frac{5}{8} + \frac{1}{8}x_1^{k+1} + \frac{1}{2}x_2^{k+1} + \frac{1}{4}x_4^k \\ x_4^{k+1} & = & -\frac{1}{2} + \frac{1}{8}x_1^{k+1} + \frac{3}{8}x_2^{k+1} + \frac{3}{8}x_3^{k+1} \end{array}\right]$

d) $\begin{array}{rcrcrcrl} -7x_1 & & & - & x_3 & + & 3x_4 & = 1 \\ x_1 & + & 7x_2 & & & - & x_4 & = 4 \\ 5x_1 & + & x_2 & - & 14x_3 & + & 3x_4 & = 4 \\ x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & 9x_4 & = 5 \end{array}$ $\left[\begin{array}{lcl} x_1^{k+1} & = & -\frac{1}{7} - \frac{1}{7}x_3^k + \frac{3}{7}x_4^k \\ x_2^{k+1} & = & \frac{4}{7} - \frac{1}{7}x_1^{k+1} + \frac{1}{7}x_4^k \\ x_3^{k+1} & = & -\frac{4}{7} + \frac{5}{14}x_1^{k+1} + \frac{1}{14}x_2^{k+1} + \frac{3}{14}x_4^k \\ x_4^{k+1} & = & \frac{5}{9} - \frac{1}{9}x_1^{k+1} + \frac{1}{9}x_2^{k+1} + \frac{2}{9}x_3^{k+1} \end{array}\right]$

Příklad 8. Napište příklad matice řádu 4, která není diagonální a pro kterou

a) Jacobiho metoda konverguje, [ostře diagonálně dominantní matice řádu 4]

b) Gaussova-Seidelova metoda konverguje, [ostře diagonálně dominantní matice řádu 4]

c) superrelaxační metoda konverguje. [ostře diagonálně dominantní matice řádu 4]

Příklad 9. Metodou nejmenších čtverců řešte soustavu

a) $\begin{array}{rcrl} x & + & y & = 4 \\ x & + & 3y & = 5 \\ 2x & + & y & = 5 \end{array}$ $\left[x = \dfrac{13}{6},\ y = 1\right]$

b) $\begin{array}{rcrl} x & + & y & = 3 \\ 2x & + & y & = 4 \\ x & + & 3y & = 5 \end{array}$ $\left[x = \dfrac{22}{15},\ y = \dfrac{6}{5}\right]$

c) $\begin{array}{rcrl} x & + & y & = 2 \\ x & + & 2y & = 3 \\ x & + & 3y & = 4 \\ x & + & 4y & = 6 \end{array}$ $\left[x = \dfrac{1}{2},\ y = \dfrac{13}{10}\right]$

d) $\begin{array}{rcrl} x & + & y & = 2 \\ 2x & + & y & = 3 \\ 3x & + & y & = 4 \\ 4x & + & y & = 6 \end{array}$ $\left[x = \dfrac{13}{10},\ y = \dfrac{1}{2}\right]$

Příklad 10. Metodou bisekce (půlení intervalu) řešte následující rovnice na příslušných intervalech s chybou menší než ε:

a) $\cos x = \ln x$ na intervalu $\langle 1, 2\rangle$ pro $\varepsilon = 0.2$, $[x^* = 1.375]$

b) $\sin x = \ln x$ na intervalu $\langle 2, 3\rangle$ pro $\varepsilon = 0.2$, $[x^* = 2.125]$

Příklad 11. Metodou prostých itearcí řešte následující rovnice na příslušných intervalech s chybou menší než ε:

a) $e^x = 3 - x^2$ na intervalu $\langle -2, -1\rangle$ pro $\varepsilon = 0.01$, $[x^* = -1.67]$

b) $2\ln x = x - 2$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ pro $\varepsilon = 0.01$, $[x^* = 0.46]$

c) $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ na intervalu $\langle 1, 2\rangle$ pro $\varepsilon = 10^{-4}$, $[x^* = 1.3652]$

d) $3x^2 - e^x = 0$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ pro $\varepsilon = 0.01$, $[x^* =]$

Příklad 12. Newtonovou metodou řešte následující rovnice pro počáteční podmínky x_0 a výsledek určete s přesností na 3 platné cifry:

a) $\cos x = \ln x$ pro $x_0 = 1$, $[x^* = 1.303]$

b) $\sin x = \ln x$ pro $x_0 = 1$, $[x^* = 2.219]$

Příklad 13. Metodou sečen řešte následující rovnice pro počáteční hodnoty x_0, x_1 a výsledek určete s přesností na 3 platné cifry:

a) $\cos x = x$ pro $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $[x^* = 0.739]$

b) $x^3 = x + 1$ pro $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $[x^* = 1.32]$

Příklad 14. Určete Lagrangeův interpolační polynom (v Newtonově tvaru), který prochází body

a) $[0; 2], [1; 0], [3; 2]$ a $[5; 4]$, $\left[2 - 2x + x(x-1) - \frac{1}{5}x(x-1)(x-3)\right]$

b) $[0; 1], [1; 1], [3; 2]$ a $[4; 3]$, $\left[1 + \frac{1}{6}x(x-1)\right]$

c) $[1; 1], [2; 1], [4; 2]$ a $[5; 3]$. $\left[1 + \frac{1}{6}(x-1)(x-2)\right]$

Příklad 15. Vypočtěte níže uvedené určité integrály pomocí složeného obdélníkového pravidla s daným krokem h (výsledky zaokrouhlete na 3 desetinná místa), je-li:

a) $\int_0^1 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ pro $h = 0.25$, [0.307]

b) $\int_0^1 \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ pro $h = 0.25$, [0.909]

c) $\int_0^1 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ pro $h = 0.2$, [0.308]

d) $\int_0^1 \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ pro $h = 0.2$, [0.907]

Příklad 16. Vypočtěte níže uvedené určité integrály pomocí složeného lichoběžníkového pravidla s daným krokem h (výsledky zaokrouhlete na 3 desetinná místa), je-li:

a) $\int_0^1 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ pro $h = 0.25$, [0.316]

b) $\int_0^1 \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ pro $h = 0.25$, [0.899]

c) $\int_0^1 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ pro $h = 0.2$, [0.314]

d) $\int_0^1 \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ pro $h = 0.2$, [0.899]

Příklad 17. Vypočtěte níže uvedené určité integrály pomocí složeného Simpsonova pravidla s daným krokem h (výsledky zaokrouhlete na 3 desetinná místa), je-li:

a) $\int_0^1 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ pro $h = 0.5$, [0.310]

b) $\int_0^1 \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ pro $h = 0.5$, [0.905]

c) $\int_0^1 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ pro $h = 0.25$, [0.310]

d) $\int_0^1 \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ pro $h = 0.25$, [0.905]

Příklad 18. Převeďte následující diferenciální rovnice s danými podmínkami na soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu s počátečními podmínkami, je-li:

a) $y^{(4)} + 3y^{(3)} + 2y + \sin x = 0$ a $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$, $y''(0) = 3$, $y^{(3)}(0) = 2$,

$$\left[\begin{array}{lcll} y_1' & = & y_2 & \\ y_2' & = & y_3 & \\ y_3' & = & y_4 & \\ y_4' & = & -3y_4 - 2y_1 - \sin x, & \qquad y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 5,\ y_3(0) = 3,\ y_4(0) = 2 \end{array}\right]$$

b) $y^{(4)} + 3y^{(2)} + 2y' + \cos x = 0$ a $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = 1$, $y^{(3)}(0) = 1$,

$$\left[\begin{array}{lcll} y_1' & = & y_2 & \\ y_2' & = & y_3 & \\ y_3' & = & y_4 & \\ y_4' & = & -3y_3 - 2y_2 - \cos x, & \qquad y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 4,\ y_3(0) = 1,\ y_4(0) = 1 \end{array}\right]$$

Příklad 19. Eulerovou metodou s krokem h řešte následující diferenciální rovnice pro počáteční podmínky $y(0) = x_0$ na daném intervalu (výsledky zaokrouhlete na 3 desetinná místa), je-li:

a) $y' = -y + \sin x$ pro $y_0 = 1$, $h = 0.25$ na $\langle 0; 1\rangle$
[$y_0 = 1.0$, $y_1 = 0.75$, $y_2 = 0.624$, $y_3 = 0.588$, $y_4 = 0.612$]

b) $y' = -y + \cos x$ pro $y_0 = 2$, $h = 0.2$ na $\langle 0; 1\rangle$
[$y_0 = 2.0$, $y_1 = 1.8$, $y_2 = 1.636$, $y_3 = 1.493$, $y_4 = 1.360$, $y_5 = 1.227$]

c) $y' = y \sin x$ pro $y_0 = 1$, $h = 0.1$ na $\langle 0; 0.5\rangle$
[$y_0 = 1.0$, $y_1 = 1.0$, $y_2 = 1.01$, $y_3 = 1.03$, $y_4 = 1.061$, $y_5 = 1.109$]

d) $y' = y \cos x$ pro $y_0 = -1$, $h = 0.25$ na $\langle 0; 2\rangle$
[$y_0 = -1.0$, $y_1 = -1.25$, $y_2 = 1.553$, $y_3 = -1.894$, $y_4 = -2.240$,
$y_5 = -2.542$, $y_6 = -2.749$, $y_7 = -2.791$, $y_8 = -2.667$]

Příklad 20. Napište předpis Eulerovy metody s obecným krokem h pro níže uvedené počáteční úlohy. Pro jakou volbu kroku je tato metoda stabilní?

a) $y' = -5y$, $\quad y(0) = 4$ na $\langle 0; 1\rangle$ $\qquad$ [$y_0 = 4$, $y_{k+1} = y_k - 5hy_k$, $h \in (0, 0.4\rangle$]
b) $y' = -10y$ $\quad y(0) = 4$ na $\langle 0; 1\rangle$ $\qquad$ [$y_0 = 4$, $y_{k+1} = y_k - 10hy_k$, $h \in (0, 0.2\rangle$]

Příklad 21. *Převeďte níže uvedené diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami na diferenciální rovnice s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami.

a) $u'' + 2u = \sin x$ pro $x \in (2; 5), u(2) = 2, u(5) = -1$
[$z'' + 2z = \sin x + 2x - 8, \quad z(2) = z(5) = 0$]

b) $u'' + 4u = \cos x$ pro $x \in (1; 4), u(1) = 2, u(4) = -1$
[$z'' + 4z = \cos x + 4x - 12, \quad z(1) = z(4) = 0$]

Příklad 22. *Určete soustavu lineárních algebraických rovnic pro přibližné řešení níže uvedených diferenciálních rovnic metodou sítí s daným krokem h, je-li

a) $u'' + 2u = x^2$ na $(1; 3)$, $u(1) = 0$, $u(3) = 4$ pro $h = 1/2$

$$\left[\begin{array}{rcrcrcr} -\frac{3}{2}u_1 & + & u_2 & & & = & \frac{9}{16} \\ u_1 & - & \frac{3}{2}u_2 & + & u_3 & = & 1 \\ & & u_2 & - & \frac{3}{2}u_3 & = & -\frac{39}{16} \end{array}\right]$$

b) $u'' + u = 3x^2$ na $(0; 2)$, $u(0) = -6$, $u(2) = 6$ pro $h = 1/2$

$$\left[\begin{array}{rcrcrcr} -\frac{7}{4}u_1 & + & u_2 & & & = & \frac{99}{16} \\ u_1 & - & \frac{7}{4}u_2 & + & u_3 & = & \frac{3}{4} \\ & & u_2 & - & \frac{7}{4}u_3 & = & -\frac{69}{16} \end{array}\right]$$

Příklad 23. *Určete soustavu lineárních algebraických rovnic pro přibližné řešení níže uvedených eliptických parciálních diferenciálních rovnic metodou sítí s daným prostorovým krokem h, je-li

a)
$$\Delta u = 2x \quad \text{na } \Omega, \quad u(x,y) = xy^2 \quad \text{na } \partial\Omega,$$

kde krok $h = 2$ a oblast Ω je vnitřek trojúhelníka s vrcholy $[0;0], [8;0]$ a $[0;8]$.

$$\left[\begin{array}{ccccccc} -4u_1 & + & u_2 & + & u_3 & = & 16 \\ u_1 & - & 4u_2 & + & & = & -56 \\ u_1 & & & - & 4u_3 & = & -120 \end{array}\right]$$

b)
$$\Delta u = 2y \quad \text{na } \Omega, \quad u(x,y) = x^2y \quad \text{na } \partial\Omega,$$

kde krok $h = 1$ a oblast Ω je vnitřek trojúhelníka s vrcholy $[0;0], [4;0]$ a $[0;4]$.

$$\left[\begin{array}{ccccccc} -4u_1 & + & u_2 & + & u_3 & = & 4 \\ u_1 & - & 4u_2 & + & & = & -132 \\ u_1 & & & - & 4u_3 & = & -80 \end{array}\right]$$

c)
$$\Delta u = 5 \quad \text{na } \Omega, \quad u(x,y) = x \quad \text{na } \partial\Omega,$$

kde krok $h = 1/3$ a oblast Ω je vnitřek čtverce s vrcholy $[0;0], [1;0], [1;1]$ a $[0;1]$.

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} -36u_1 & + & 9u_2 & + & 9u_3 & & & = & 2 \\ 9u_1 & - & 36u_2 & & & + & 9u_4 & = & -10 \\ 9u_1 & & & - & 36u_3 & + & 9u_4 & = & 2 \\ & & 9u_2 & + & 9u_3 & - & 36u_4 & = & -10 \end{array}\right]$$

Příklad 24. *Určete soustavu lineárních algebraických rovnic pro přibližné řešení níže uvedených parabolických parciálních diferenciálních rovnic metodou sítí s daným prostorovým krokem h a časovým krokem τ, je-li

a)
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{na } (0;1) \times (0;1)$$

s podmínkami

$$u(x;0) = x^2(1-x) \text{ pro } x \in (0;1), \quad u(0;t) = u(1;t) = 0 \text{ pro } t \in (0;1)$$

a kroky $h = \tau = 1/3$.

$$\left[\begin{array}{lcl} u_1^{k+1} & = & 3u_0^k - 5u_1^k + 3u_2^k \\ u_2^{k+1} & = & 3u_1^k - 5u_2^k + 3u_3^k,\ k = 0,1,2 \\ & & u_0^0 = u_0^1 = u_0^2 = u_3^0 = u_3^1 = u_3^2 = 0 \\ & & u_1^0 = \frac{2}{27},\ u_2^0 = \frac{4}{27} \end{array}\right]$$

b)
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{na } (0;1) \times (0;1)$$

s podmínkami

$$u(x;0) = x\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \text{ pro } x \in (0;1), \quad u(0;t) = u(1;t) = 0 \text{ pro } t \in (0;1)$$

a kroky $h = \tau = 1/4$.

$$\left[\begin{array}{lcl} u_1^{k+1} & = & 4u_0^k - 7u_1^k + 4u_2^k \\ u_2^{k+1} & = & 4u_1^k - 7u_2^k + 4u_3^k \\ u_3^{k+1} & = & 4u_2^k - 7u_3^k + 4u_4^k,\ k = 0,1,2,3 \\ & & u_0^0 = u_0^1 = u_0^2 = u_0^3 = u_4^0 = u_4^1 = u_4^2 = u_4^3 = 0 \\ & & u_1^0 = \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{8},\ u_2^0 = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4},\ u_3^0 = \frac{3}{4}\cos\frac{3\pi}{8} \end{array}\right]$$

c)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{na } (0;3) \times (0;3)$$

s podmínkami

$$u(x;0) = x \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \text{ pro } x \in (0;3), \quad u(0;t) = u(3;t) = 0 \text{ pro } t \in (0;3)$$

a kroky $h = \tau = 1$.

$$\left[\begin{array}{lcl} u_1^{k+1} & = & u_0^k - u_1^k + u_2^k \\ u_2^{k+1} & = & u_1^k - u_2^k + u_3^k,\ k = 0,1,2 \\ & & u_0^0 = u_0^1 = u_0^2 = u_3^0 = u_3^1 = u_3^2 = 0 \\ & & u_1^0 = \sin\frac{\pi}{3},\ u_2^0 = 2\sin\frac{2\pi}{3} \end{array}\right]$$

d)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{na } (0;3) \times (0;3)$$

s podmínkami

$$u(x;0) = x(3-x) \text{ pro } x \in (0;3), \quad u(0;t) = u(3;t) = 0 \text{ pro } t \in (0;3)$$

a kroky $h = \tau = 1$.

$$\left[\begin{array}{lcl} u_1^{k+1} & = & u_0^k - u_1^k + u_2^k \\ u_2^{k+1} & = & u_1^k - u_2^k + u_3^k,\ k = 0,1,2 \\ & & u_0^0 = u_0^1 = u_0^2 = u_3^0 = u_3^1 = u_3^2 = 0 \\ & & u_1^0 = 2,\ u_2^0 = 2 \end{array}\right]$$