Cvičení z metody konečných prvků

Jiří Hozman

Předmluva

Níže uvedené úlohy by měly jednak sloužit k procvičování látky probrané na přednášce ke stejnojmennému předmětu a také k doplnění předpokládaných znalostí. Náplň cvičení se bude průběžně upravovat v závislosti na aktuálním stavu přednášky.

1. Střípky z funkcionální analýzy a moderní teorie PDR

Úloha 1.1. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s lipschitzovsky spojitou hranicí $\partial\Omega$. Napište předpisy pro normy a seminormy Sobolevových prostorů $W^{k,p}(\Omega)$, je-li $p = 1$, $p = 2$ a $p = \infty$. Popište vlastnosti těchto prostorů. V případě, že daný prostor je Hilbertův, uveďte skalární součin, který indukuje příslušnou normu prostoru.

Úloha 1.2. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s lipschitzovsky spojitou hranicí $\partial\Omega$. Dokažte následující implikaci

$$v \in W_0^{1,p}(\Omega) \Rightarrow v\big|_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Úloha 1.3. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s lipschitzovsky spojitou hranicí $\partial\Omega$. Dokažte, že seminorma $|\cdot|_{1,\Omega}$ je na prostoru $H_0^1(\Omega)$ současně normou.

Úloha 1.4. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s lipschitzovsky spojitou hranicí $\partial\Omega$. Uvažujme následující úlohu:

$$-\Delta u = f \quad \text{v } \Omega \tag{1.1}$$
$$u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \tag{1.2}$$

a) Připomeňte si definici klasického řešení dané PDR.

b) Odvoďte slabou formulaci úlohy pro vhodné Sobolevovy prostrory.

c) Dokažte spojitost příslušné bilineární formy.

d) Dokažte spojitost funkcionálu pravé strany f.

e) Ukažte, že klasické řešení je současně slabým řešením pro danou úlohu.

f) Ukažte, že slabé řešení o dostatečné regularitě (a jaké konkrétně) je zároveň klasickým řešením pro danou úlohu.

g) Dokažte V-elipticitu příslušné bilineární formy.

h) Ukažte, že daný eliptický variační problém má právě jedno řešení.

i) Zformulujte Galerkinovu metodu pro numerické řešení dané úlohy.

j) Napište předpis pro minimalizaci daného funkcionálu v Ritzově metodě.

Úloha 1.5. Ukažte, že v případě symetrické bilineární formy splňující předpoklady Lax-Milgramova lemma je Galerkinova metoda ekvivalentní s Ritzovou metodou.

Úloha 1.6. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s lipschitzovsky spojitou hranicí $\partial\Omega$. Uvažujme následující úlohu:

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= f \quad \text{v } \Omega && (1.3)\\
u &= u_0 \quad \text{na } \partial\Omega && (1.4)
\end{aligned}
$$

a) Postupujte analogicky jako v Úloze 1.4.

b) Uvažujte řešení ve tvaru $u = \tilde{u_0} + w$, kde $w \in H_0^1(\Omega)$ a $\tilde{u_0} \in H^1(\Omega)$ takové, že $\tilde{u_0}\big|_{\partial\Omega} = u_0$. Ukažte, že u nezávisí na volbě $\tilde{u_0}$.

Úloha 1.7. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s lipschitzovsky spojitou hranicí $\partial\Omega$. Uvažujme následující úlohu:

$$
\begin{aligned}
-\Delta u + u &= f \quad \text{v } \Omega && (1.5)\\
\frac{\partial u}{\partial n} &= g \quad \text{na } \partial\Omega && (1.6)
\end{aligned}
$$

a) Postupujte analogicky jako v Úloze 1.4.

b) Uvažujte řešení ve tvaru $u = \tilde{u_0} + w$, kde $w \in H_0^1(\Omega)$ a $\tilde{u_0} \in H^1(\Omega)$ takové, že $\tilde{u_0}\big|_{\partial\Omega} = u_0$. Ukažte, že u nezávisí na volbě $\tilde{u_0}$.

Úloha 1.8. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s lipschitzovsky spojitou hranicí $\partial\Omega$. Uvažujme následující úlohu:

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= f \quad \text{v } \Omega && (1.7)\\
\frac{\partial u}{\partial n} &= g \quad \text{na } \partial\Omega && (1.8)
\end{aligned}
$$

a) Postupujte analogicky jako v Úloze 1.4.

b) Stanovte nutnou a postačují podmínku pro existenci slabého řešení. Tvrzení dokažte.

Úloha 1.9. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s lipschitzovsky spojitou hranicí $\partial\Omega$, která se skládá ze tří disjunktních částí, pro které platí $\overline{\partial\Omega} = \overline{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3}$. Uvažujme následující úlohu:

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= f \quad \text{v } \Omega && (1.9)\\
u &= 0 \quad \text{na } \Gamma_1 && (1.10)\\
\frac{\partial u}{\partial n} &= g \quad \text{na } \Gamma_2 && (1.11)\\
\frac{\partial u}{\partial n} + u &= h \quad \text{na } \Gamma_3 && (1.12)
\end{aligned}
$$

a) Postupujte analogicky jako v Úloze 1.4.

2. MKP vs. metoda sítí

Úloha 2.10. Uvažujme následující úlohu:

$$
\begin{aligned}
-\varepsilon u'' + bu' &= f \quad \text{v } (0,1) && (2.13)\\
u(0) = u(1) &= 0, && (2.14)
\end{aligned}
$$

kde ε, b, f jsou konstanty ($\varepsilon > 0$).

a) Sestrojte soustavu síťových rovnic.

b) Zformulujte diskrétní úlohu pomocí metody konečných prvků pro prostor

$$V_h = \left\{ v \in \mathcal{C}([0,1]), v(0) = v(1) = 0, v\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1(x_i, x_{i+1}), i = 0, \ldots, N-1 \right\}. \quad (2.15)$$

c) Definujte vhodné bázové funkce a sestrojte matici a pravou stranu výsledné soustavy lineárních rovnic.

d) Ověřte řešitelnost výsledné soustavy lineárních rovnic.

3. Příklady konečných prvků definovaných na n-simplexech a kvádrech v $\mathbb{R}^n$

Úloha 3.11. Uvažujte n-simplex T pro $n = 1$.

a) Sestrojte hlavní mřížku n-simplexu řádu k pro $k = 1, 2, \ldots, 3$.

b) Popište těžiště a vrcholy n-simplexu pomocí barycentrických souřadnic.

c) Popište body hlavní mřížky $L_k(T)$ pomocí barycentrických souřadnic pro příslušné řády.

Úloha 3.12. Uvažujte n-simplex T pro $n = 2$.

a) Postupujte analogicky jako v Úloze 3.11.

Úloha 3.13. Sestrojte bázové funkce a definujte množinu stupňů volnosti pro níže uvedené konečné prvky:

a) lineární simpliciální konečný prvek Lagrangeova typu v $\mathbb{R}^2$.

b) kvadratický simpliciální konečný prvek Lagrangeova typu v $\mathbb{R}^2$.

c) kubický simpliciální konečný prvek Lagrangeova typu v $\mathbb{R}^2$.

Úloha 3.14. Popište redukovaný kubický simpliciální konečný prvek Lagrangeova typu v $\mathbb{R}^2$.

Úloha 3.15. Ukažte, že každé dva simpliciální konečné prvky Lagrangeova typu (T, P, Σ) a (T', P', Σ') jsou afinně ekvivalentní, platí-li $T = T'$ a $P = P'$.