Úvodní pojmy

Osnova přednášky

- **Matematická logika.**
- **Logická stavba matematiky.**
- **Množiny, ohraničenost číselných množin.**

Klíčová slova: *výrok, výroková spojka, implikace, ekvivalence, tautologie, kvantifikátor, axiom, množina, rozšíření reálných čísel, ohraničenost množin, maximum, minimum, suprémum, infimum.*

Stručný obsah přednášky, důležité pojmy a věty

Matematická logika

Základní pojmy:

- *Výrok* - tvrzení, o němž má smysl rozhodovat, zda je pravdivé, nebo nepravdivé. Má formu oznamovací věty.
- *Negace výroku p* - ... není pravda, že platí p.
- *Složený výrok* - vznikne spojením více výroků užitím logických operací.
- *Logické operace* - slouží pro vytváření složených výroků. Zapisují se pomocí logických (výrokových) spojek.
- *Výrokové proměnné* - proměnné zastupující jednotlivé výroky v logických výrazech.
- *Logický výraz* - výraz sestavený z více výrokových proměnných, jejich negací a logických spojek. Jeho výsledek se často vyhodnocuje pravdivostní tabulkou.
- *Tautologie* - logický výraz, který je pravdivý vždy.
- *Výroková forma* s proměnnou x na množině M - formulace, která se až po dosazení hodnoty z množiny M za x stane výrokem (pravdivým, nebo nepravdivým).

Základní složené výroky a jejich zápis pomocí logických spojek:

Složený výrok	**Spojka**	**Čteme**
konjunkce	$\wedge$	... a současně ...
disjunkce	$\vee$	... nebo ...
implikace	$\Rightarrow$	... z toho plyne ...
ekvivalence	$\Leftrightarrow$	... právě když ...
negace	$\neg$	... neplatí, že ...

Priorita logických spojek je dána buď závorkami, nebo je v následujícím pořadí (od nejvyšší): $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.
Implikaci $p \Rightarrow q$ lze též zapsat $\neg q \Rightarrow \neg p$. Význam obou zápisů je stejný.

Kvantifikátory jsou symboly, které se používají pro zkrácený a přehledný zápis matematických tvrzení:

Kvantifikátor	**Zápis**	**Význam**
obecný	$\forall$	Pro všechna, pro každý ...
existenční	$\exists$	Existuje ...
jednoznačné existence	$\exists!$	Existuje právě jeden ...

Poznámka:
Negací výroku: $\forall x$ *platí ...* je výrok: $\exists x$*, že neplatí ...*
Negací výroku: $\exists x$*, že platí ...* je výrok: $\forall x$ *neplatí ...*

Logická stavba matematiky

Při výkladu matematické teorie se používají tyto základní kategorie:
Axiom - základní matematický výrok, jehož pravdivost je zřejmá a nedokazuje se.
Definice - udává název nového pojmu a jeho charakteristické vlastnosti pomocí pojmů dříve definovaných či obecně známých.
Matematická věta - je pravdivé tvrzení (výrok), jehož platnost lze dokázat. Obvykle má tvar implikace (z jistých předpokladů vyplývá tvrzení věty) nebo ekvivalence (platí první část věty, právě když platí druhá část věty).

K dokazování vět se nejčastěji používají typy důkazů:
- přímý důkaz (ze známých skutečností dokážeme přímo platnost věty),
- důkaz sporem (předpokládáme, že by věta neplatila, a pak dojdeme ke sporu),
- důkaz matematickou indukcí - pro dokazování vět typu "$P(n)$ ... *platí pro všechna* n *...*". Důkaz je ve dvou krocích:
  a) dokážeme platnost pro $P(n_1)$, obvykle $n_1 = 1$,
  b) z předpokladu platnosti pro $P(k)$ dokážeme platnost pro $P(k+1)$.
- konstrukční důkaz (pro důkaz existence jistého objektu)
- a další.

Poznámka: V rámci tohoto kurzu nebudou ve stručných přehledech důkazy vět uváděny. Zájemci je mohou nalézt v doporučené literatuře.

Množiny

Množina je souhrn nějakých prvků, chápaných jako jeden celek. Zadávají se výčtem prvků, nějakou společnou vlastností, která množinu charakterizuje, graficky apod. Množiny budeme značit velkými písmeny: A, B, C.... Dále označujeme:

$A \subset B$ ... množina A je podmnožinou množiny B,
$x \in A$ .... x je prvkem množiny A,
$x \notin A$ .... x není prvkem množiny A,
$\emptyset$ .... prázdná množina.

Množinové operace:
$A \cup B$ ... sjednocení množin A a B,

$A \cap B$ ... průnik množin A a B,
$A \setminus B$ ... rozdíl množin A a B, $A \setminus B = \{x, x \in A \wedge x \notin B\}$,
$A \, \mathrm{x} \, B$ ... kartézský součin množin A a B, $A \, \mathrm{x} \, B = \{[x, y], x \in A \wedge y \in B\}$.

Jestliže dvě množiny nemají žádný společný prvek (tj. $A \cap B = \emptyset$), pak říkáme, že jsou *disjunktní*.

Číselné množiny

Značení číselných množin, používaných v tomto kurzu:
N ... množina přirozených čísel,
Z ... množina celých čísel,
Q ... množina racionálních čísel,
R ... množina reálných čísel.

Další značení:
N_0 ... množina přirozených čísel a nuly,
Z^+ ... množina celých čísel kladných apod.

Definujeme ještě množinu R^* - tzv. rozšíření reálných čísel:
$R^* = R \cup \{+\infty, -\infty\}$.
Počítání v R^* je analogické jako v R, s úvahou, že za „∞“ si představíme číslo „obrovské“ hodnotou, se znaménkem buď kladným, nebo záporným. Nelze však provést některé operace, protože jejich výsledek není definován – např.„$\infty - \infty$“, „$\frac{\infty}{\infty}$“ a další. (Blíže se jim budeme věnovat u limit.)

Ohraničenost číselných množin

Pro uvedené číselné množiny platí: $N \subset Z \subset Q \subset R$.
Prvky všech těchto množin jsou tzv. uspořádané, tj. vždy platí některý ze vztahů: $a < b, a > b, a = b$.
Na základě uspořádání lze zavést ohraničenost číselné množiny M:

Definice: Mějme $M \subset R^*$, $a, b, c, d \in R^*$. Pak
a) a se nazývá horní závora množiny M, jestliže $\forall x \in M \ (x \leq a)$,
b) b se nazývá dolní závora množiny M, jestliže $\forall x \in M \ (x \geq b)$,
c) nejmenší horní závora M se nazývá *suprémum* množiny M,
d) největší dolní závora M se nazývá *infimum* množiny M,
e) je-li $c \in M$ a c je horní závora M, pak se c nazývá maximum množiny M,
f) je-li $d \in M$ a d je dolní závora M, pak se d nazývá minimum množiny M.
Značení: $\sup(M)$, $\inf(M)$, $\max(M)$, $\min(M)$.

Definice: Mějme $M \subset R^*$. Pak se množina M nazývá
a) *ohraničená (omezená) shora*, jestliže $\sup(M) < \infty$,
b) *ohraničená (omezená) zdola*, jestliže $\inf(M) > -\infty$,
c) *ohraničená (omezená)*, jestliže je ohraničená shora i zdola.

Poznámky:
a) Suprémum a infimum množiny $M, M \subset R^*$ existují vždy. Mohou a nemusí být prvkem množiny M.
b) Existuje-li $\max(M)$, příp. $\min(M)$, pak $\sup(M)=\max(M)$, příp. $\inf(M)=\min(M)$.