

Aplikace derivací - 2. část

Osnova přednášky

- Konvexnost a konkávnost funkce.
- Vyšetřování průběhu funkce.
- Diferenciál funkce a Taylorův polynom.

Klíčová slova: Konvexní, konkávní funkce, inflexe, inflexní body, průběh funkce, asymptoty, diferenciál, Taylorův polynom.

Stručný obsah přednášky, důležité pojmy a věty

Konvexnost a konkávnost funkce

Pomocí derivace lze určit nejen monotonii, ale i tzv. konvexnost funkce. Pojmy *konvexní* / *konkávní* popisují prohnutí grafu f .

Definice: Funkce f se na intervalu J nazývá
a) *konvexní*, jestliže

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in J \ (x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}),$$

b) *konkávní*, jestliže

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in J \ x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Poznámky:

- a) Je-li nerovnost v definici ostrá, funkce se nazývá *ryze konvexní/konkávní* na J .
b) Konvexnost lze zavést také geometricky - pro uvedené prvky x_1, x_2, x_3 a odpovídající body grafu $P_1[x_1, f(x_1)], P_2[x_2, f(x_2)], P_3[x_3, f(x_3)]$ platí: U konvexní funkce leží bod P_2 „pod“ úsečkou P_1, P_3 , u konkávní funkce leží bod P_2 „nad“ touto úsečkou (nebo na ní).

Věta 12. Mějme funkci f spojitou na intervalu J . Je-li v každém vnitřním bodě intervalu J

- a) $f''(x) > 0$, pak je f na J konvexní,
b) $f''(x) < 0$, pak je f na J konkávní.

Definice: Body spojitosti funkce f , v nichž se konvexnost mění na konkávnost (nebo naopak), se nazývají body *inflexe* funkce f .

Věta 13. Má-li funkce f v bodě c inflexi, pak je buď $f''(c) = 0$, nebo $f''(c)$ neexistuje.

Vyšetřování průběhu funkce

Je to jedna z nejdůležitějších aplikací limit a derivací – cílem celého postupu je zjistit o zadané funkci f její důležité vlastnosti, pomocí nichž lze načrtnout přibližný graf funkce. Z něj pak lze získat o funkci další informace.

Postup:

1. Určíme definiční obor f a její zřejmé vlastnosti (spojitost, kladná/záporná, sudá/lichá apod.)
2. Spočteme limity funkce (případně jednostranné limity) v bodech nespojitosti a v krajních bodech $D(f)$, včetně $+\infty$ a $-\infty$, je-li $D(f)$ neomezený.
3. Z limit určíme asymptoty grafu funkce, pokud existují (viz dále).
4. Spočteme průsečíky funkce s osami (pokud existují).
5. Pomocí první derivace určíme intervaly monotonie a lokální extrémy – odpovídající body grafu se nazývají horní a dolní vrcholy.
6. Pomocí druhé derivace určíme intervaly konvexnosti, konkávnosti a body inflexe – odpovídající body grafu se nazývají inflexní body.
7. Všechny nalezené body a limity funkce vyznačíme do jednoho obrázku a pomocí zjištěných vlastností zakreslíme přibližný graf funkce.

Obvykle je takto načrtnutý graf dostatečný pro zjištění dalších vlastností zadané funkce (zda je prostá, a tedy zda má funkci inverzní, počet jejích kořenů, ohraničenost, existence absolutních extrémů, apod.)

Asymptoty

Asymptoty lze charakterizovat jako přímky, ke kterým se blíží graf funkce f , jestliže body grafu jdou „do nekonečna“. Zjišťují se pomocí limit a rozdělujeme je do tří typů:

- *Svislá asymptota* má rovnici $x = a$ a může být v bodě nespojitosti nebo v krajním bodě definičního oboru. Existuje tehdy, jestliže v bodě a je alespoň jedna z jednostranných limit nevlastní.
- *Vodorovná asymptota* s rovnicí $y = q$ existuje, jestliže limita funkce v $+\infty$, (příp. v $-\infty$) je rovna reálnému číslu q . Je speciálním případem šikmé asymptoty.
- *Šikmá asymptota* má rovnici $y = kx + q$. Existuje, jestliže v $+\infty$, (příp. v $-\infty$) existují vlastní limity:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = q.$$

Svislé a vodorovné asymptoty získáme ihned z výpočtu limit funkce v krajních bodech definičního oboru a v bodech nespojitosti. (Výpočet svislých asymptot se někdy vynechává.)

Diferenciál a Taylorův polynom

Definice: Mějme funkci f , která má vlastní derivaci pro $x \in (a, b)$. Diferenciálem funkce f v bodě x nazveme lineární funkci proměnné h

$$df(x) = f'(x)h, \quad h \in R.$$

Poznámky:

- a) Diferenciál funkce v pevném bodě c vyjadřuje přibližný přírůstek funkce na okolí bodu c . Při grafickém znázornění se vlastně jedná o přírůstek na tečně, sestrojené v bodu $T[c, f(c)]$ ke grafu funkce f , při „posunu“ z bodu c do bodu $c + h$.
- b) Protože pro $f(x) = x$ je $dx = h$, lze zápis zobecnit: $df(x) = f'(x) dx$. Zobecněný tvar diferenciálu využijeme při výpočtu integrálů substituční metodou.

Definice: Mějme funkci f a bod c , pro který existují všechny derivace do n -tého řádu, $n \in N$. Taylorovým polynomem n -tého stupně pro funkci f v bodě c nazveme:

$$T_{n,f}(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x - c)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n.$$

Věta 14. Mějme funkci f a bod c , pro který existují všechny derivace do řádu $(n + 1)$, $n \in N$, a jsou spojité na okolí bodu c . Pak platí:

$$f(x) = T_{n,f}(x) + R_{n+1}(x), \quad \text{kde} \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{R_{n+1}(x)}{x^{n+1}} = 0.$$

Poznámky:

- a) Taylorův polynom v bodě c slouží k přibližnému nahrazení funkce f na okolí tohoto bodu. Přesnost nahrazení závisí na stupni polynomu a velikosti okolí, pro odhad chyby nahrazení lze nalézt v literatuře různé vzorce.
- b) Limita v definici vyjadřuje, že tzv. *zbytek* R_{n+1} jde „velice rychle“ k nule.
- c) Taylorův polynom se často počítá v bodě $c = 0$ – ten se nazývá také MacLaurinův polynom. Tyto polynomy jsou uvedeny v literatuře.