Integrální počet - 1. část

Osnova přednášky

- **Primitivní funkce a neurčitý integrál.**
- **Věty o neurčitém integrálu.**
- **Výpočet neurčitých integrálů.**
- **Integrační metody - per partes a metoda substituční.**

Klíčová slova: *primitivní funkce, neurčitý integrál, obor integrace, linearita integrálu, substituce.*

Stručný obsah přednášky, důležité pojmy a věty

Primitivní funkce a neurčitý integrál

Výchozí úloha: *Je dána funkce f, která je derivací jisté funkce F na vhodném intervalu. Nalezněte tuto „původní“ funkci F.*

Je zřejmé, že uvedená úloha je v jistém smyslu opačnou úlohou k derivování. Postup pro nalezení funkce F se nazývá *integrace, integrování* a situaci lze zjednodušeně popsat:

při derivování je dána funkce $\quad y = f(x), \quad y' = ?$
při integrování je dána funkce $\quad y' = f(x), \quad y = ?$

Definice: *Funkci F nazveme primitivní funkcí k f na intervalu $I = (a, b), a, b \in R^*$, jestliže*

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

Definice: *Souhrn všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I nazveme neurčitým integrálem funkce f na intervalu I.*

Zápis neurčitého integrálu:

$$\int f(x)\, dx \text{ nebo zkráceně } \int f,$$

kde f je integrovaná funkce (tzv. integrand) a člen dx uvádí označení integrační proměnné (není zde ve významu diferenciálu).

Věty o neurčitém integrálu

Věta 1. *Jestliže má funkce f na intervalu I primitivní funkci, pak má na I primitivních funkcí nekonečně mnoho a všechny se liší o konstantu $c \in R$.*

Výsledek proto obvykle zapisujeme ve tvaru $\int f(x)\, dx = F(x) + c$,
kde $c \in R$ je integrační konstanta.

Věta 2. (o existenci primitivní funkce) *Ke každé funkci f spojité na intervalu I existuje na I spojitá primitivní funkce F.*

Věta 3. (vztah derivace a integrálu) *Je-li funkce f spojitá na intervalu I, pak na I platí:*

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), \qquad \int (F(x)'\,dx = F(x) + c, \; c \in R.$$

Věta 4. (o linearitě neurčitého integrálu) *Jestliže na intervalu I existují neurčité integrály funkce f a funkce g a $c \in R$, pak na intervalu I platí:*

$$\begin{aligned} \int (f(x) + g(x))\,dx &= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\,, \\ \int (c\,f(x))\,dx &= c \int f(x)\,dx\,. \end{aligned}$$

Výpočet neurčitého integrálu

Základní vzorce

Vzorce v tabulce jsou odvozené ze vzorců pro derivace. Jako obory integrace jsou uvedeny maximální intervaly, kde je funkce integrovatelná, případně body, které nemohou být v intervalu obsažené.

Primitivní funkce	**Obor integrace**
$\int 1\ dx = x + c$	R
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad$ pro $n \neq -1,\ n \in R$	podle spojitosti f
$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln\|x\| + c$	$x \neq 0$
$\int e^x\,dx = e^x + c$	R
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad$ pro $a \neq 1,\ a > 0$	R
$\int \sin x\ dx = -\cos x + c$	R
$\int \cos x\ dx = \sin x + c$	R
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx = \operatorname{tg} x + c$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\ dx = -\operatorname{cotg} x + c$	$x \neq k\pi, k \in Z$
$\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arccotg} x + c$	R
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \arcsin x + c = -\arccos x + c$	$(-1, 1)$

Postupy výpočtu

Při výpočtu neurčitých integrálů používáme:

- základní vzorce,
- vhodné úpravy integrované funkce
  (úpravy výrazů s mocninami, vzorce pro dvojčleny a goniometrické funkce atd.),
- integrační metody:

1) metodu per partes,
2) metodu substituční,
3) integraci racionální funkce,

- kombinování různých postupů a integračních metod.

Připomeňme:
1) Obor integrace určujeme vždy podle spojitosti integrované funkce.
2) Zkoušku správnosti výpočtu lze provést vždy zpětným zderivováním.
3) Některé integrály lze počítat více způsoby - podle obtížnosti výpočtu je vhodné zvážit, kterou metodu použijeme.
4) Někdy lze při různých postupech integrace získat „opticky“ odlišné výsledky, které se však liší jen o „skrytou“ konstantu.
5) Některé integrály nelze integračními metodami vypočítat, přestože primitivní funkce existuje (neboť integrovaná funkce je spojitá na nějakém intervalu). Jsou to například integrály:

$$\int e^{x^2}\,dx,\ \int \frac{\sin x}{x}\,dx,\ \int \frac{e^x}{x}\,dx,\ \text{apod.}$$

Integrační metody

Metoda per partes

Věta 5. *Jestliže funkce f a g mají na intervalu $I = (a,b), a,b \in R^*$, spojité derivace, pak na I platí:*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Metoda per partes (tzv. integrace „po částech“) je odvozena z derivace součinu dvou funkcí. Při jejím užití volíme funkce f a g' tak, aby byl nový integrál jednodušší než integrál zadaný. Obvykle funkci f volíme tak, aby se derivací „zjednodušila“, a funkci g' tak, abychom z ní mohli snadno spočítat integrál.

Metoda per partes se používá nejčastěji:

- při integraci součinu (příp. podílu) jednodušších funkcí,
- opakovaně při integraci součinu funkcí,
- v integrálech, kde je vhodné součin vytvořit,
- vede-li integrál na výpočet z rovnice,
- vede-li výpočet na rekurentní vzorec.

Substituční metoda

Věta 6. (první věta o substituci) *Mějme složenou funkci $f[g]$. Nechť funkce f je spojitá na intervalu $J = (c,d)$ a má na J primitivní funkci F. Nechť funkce g má spojitou derivaci na intervalu $I = (a,b)$ a pro všechna $x \in I$ je $g(x) \in J$. Pak na intervalu I platí:*

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + c.$$

Věta 7. (druhá věta o substituci) *Nechť $\int f(g(t))g'(t)\,dt$ existuje v intervalu $J = (c,d)$. Nechť má funkce g na J spojitou nenulovou derivaci a zobrazuje interval J na interval $I = (a,b)$. Pak na I existuje $\int f(x)\,dx$ a platí*

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt = M(g^{-1}(x)) + c,$$

kde M je primitivní funkcí k $f[g]g'$.

Substituční metoda je založena na derivaci složené funkce. V konkrétních úlohách si obvykle substituci rozepisujeme, přitom za symbol dt lze formálně použít vzorec pro diferenciál:

$$\int f(g(x))\,g'(x)dx = \left\| \begin{array}{l} t = g(x) \\ dt = g'(x)dx \end{array} \right\| = \int f(t)dt = F(t) + c = F(g(x)) + c.$$

Po dokončení substituce nesmí v integrálu zůstat dvě integrační proměnné. V některých integrálech je nutno provést postupně více substitucí, k původní proměnné se pak vracíme až po získání primitivní funkce.

Substituční metodu obvykle používáme při integraci:

- složené funkce,
- součinu či podílu dvou funkcí,
- funkce vícekrát složené.

Časté typy integrálů, řešené substituční metodou:

a)
$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\,F(ax+b) + c,$$

b)
$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + c.$$

Příklady na výpočet neurčitých integrálů různými postupy naleznete v souborech *Řešené příklady a Cvičení s výsledky.*