Integrální počet - 2. část

Osnova přednášky

- **Integrace racionální funkce.**
- **Určitý Riemannův integrál - zavedení a definice.**

Klíčová slova: *racionální lomená funkce, parciální zlomky, určitý Riemannův integrál, supremum, infimum.*

Stručný obsah přednášky, důležité pojmy a věty

Integrace racionální funkce

Funkce typu $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *pro st* $Q = 2$

Výpočet $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, tedy integrace (lomené) racionální funkce, spočívá v rozkladu integrované funkce na součet jednodušších, tzv. *parciálních* zlomků, které lze snadno integrovat. Tento rozklad lze uplatnit pouze na podíly polynomů, v nichž je stupeň polynomu P menší než stupeň Q. Není-li tato podmínka splněna, musíme nejprve provést dělení polynomů, tj.:

$$P(x) \,:\, Q(x) = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}\,,$$

kde podíl $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ již uvedené podmínce vyhovuje.
Je-li tedy st $Q = 2$ a st $P < 2$, budeme integrovat funkci ve tvaru

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{ax+b}{x^2+px+q}.$$

Pravidla pro rozklad na parciální zlomky (s obecnými koeficienty A, B):

a) má-li Q dva reálné kořeny x_1 a x_2, je $Q(x) = (x-x_1)(x-x_2)$ a

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}\,, \tag{2.1}$$

b) má-li Q jeden (dvojnásobný) reálný kořen x_1, je $Q(x) = (x-x_1)^2$ a

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2}\,, \tag{2.2}$$

c) má-li Q jen komplexní kořeny, podíl $\frac{P(x)}{Q(x)}$ na jednodušší parciální zlomky rozložit nelze. Upravíme ho do tvaru

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{a}{2}\,\frac{2x+p}{x^2+px+q} + \frac{b-\frac{a}{2}p}{x^2+px+q} \tag{2.3}$$

a dále řešíme s použitím substituční metody. Obor integrace je v tomto případě R.

Máme-li funkci rozloženou na součet parciálních zlomků, určíme koeficienty A, B dosazovací nebo porovnávací metodou. V obou případech rovnici (2.1), příp. (2.2) násobíme společným jmenovatelem $(x^2 + px + q)$, tím získáme rovnost dvou polynomů.

• dosazovací metoda: Oba polynomy musí být shodné $\forall x \in R$, proto do obou dosadíme vhodná čísla (obvykle kořeny Q).

• porovnávací metoda: Při rovnosti dvou polynomů mají oba stejné koeficienty u shodných mocnin proměnné, proto tyto koeficienty porovnáme a získáme tak rovnice pro hledané koeficienty A a B.

Po určení hodnot A a B integrujeme oba zlomky s použitím jednoduché substituce. Oborem integrace je pak každý interval, ve kterém neleží žádný kořen polynomu Q.

Integrace funkcí typu $\frac{P(x)}{Q(x)}$ pro st $Q > 2$

Počet a tvar parciálních zlomků obecně závisí na kořenech polynomu Q, které mohou být reálné i komplexní, jednonásobné i vícenásobné. Je-li stupeň polynomu Q větší než 2, vždy existuje rozklad $Q(x)$ ve tvaru:

$$Q(x) = a(x-x_1)^{n_1}(x-x_1)^{n_1-1}...(x-x_1)(x-x_2)^{n_2}(x-x_2)^{n_2-1}...(x-x_2)...(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}$$

$$(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1-1}...(x^2 + p_1x + q_1)...,$$

kde kořeny x_i jsou reálné s násobností n_i a uvedené trojčleny jsou již nerozložitelné (tj. mají komplexní kořeny s násobností s_i). Pak $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (pro st $P <$ st Q) rozložíme na součet parciálních zlomků následujícím způsobem:

a) každému reálnému kořenu x_i s násobností n_i bude v součtu odpovídat n_i parciálních zlomků typu

$$\frac{A_k}{(x - x_i)^k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n_i \tag{2.4}$$

b) každému trojčlenu $(x^2 + p_jx + q_j)$ s komplexními kořeny s násobností s_j bude v součtu odpovídá s_j zlomků typu

$$\frac{B_kx + C_k}{(x^2 + p_jx + q_j)^k}, \quad k = 1, 2, \ldots, s_j. \tag{2.5}$$

Jsou-li v rozkladu pouze zlomky typu (2.4), je další postup analogický jako u funkcí s polynomem Q druhého stupně. Pokud se v rozkladu vyskytnou i zlomky typu (2.5), je další výpočet obtížnější.

Integraci racionální funkce pro st $Q > 2$ se podrobněji věnovat nebudeme. Ještě připomeňme, že k integraci racionální funkce často vede předchozí použití substituční metody.

Určitý Riemannův integrál - zavedení a definice

K zavedení určitého integrálu nám poslouží tato geometrická úloha:

Na uzavřeném intervalu $I = \langle a, b\rangle$ je dána spojitá nezáporná funkce f. Spočtěte plošný obsah obrazce, ohraničeného grafem této funkce, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$.

Stručně naznačíme postup pro odvození výsledku:

• Interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme na podintervaly body $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ (tzv. dělení D).
• Na libovolném intervalu $J_i = \langle x_{i-1}, x_i\rangle\,, i = 1, \ldots, n$ existují podle Weierstrassovy věty extrémy funkce f. Označme je

$$m_i = \min f(x) \text{ na } J_i\,,\ M_i = \max f(x) \text{ na } J_i.$$

• Nad intervalem J_i sestrojíme dva obdélníky: obdélník A_i s výškou m_i, obdélník B_i s výškou M_i. Pro jejich obsahy dostáváme:

$$P(A_i) = m_i d_i,\ P(B_i) = M_i d_i,\ d_i = x_i - x_{i-1},$$

$$P(A_i) \le P(B_i).$$

• Na každém podintervalu $J_i, i = 1, \ldots, n$ provedeme stejný postup a označíme

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i), \quad \text{... dolní součty},$$

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i), \quad \text{... horní součty}.$$

• Získali jsme dolní a horní odhad pro obsah plochy P, neboť pro každé dělení D platí:

$$s(f, D) \le P \le S(f, D).$$

Přidáváním dalších dělících bodů (tzv. zjemňováním dělení D) se budou oba odhady zpřesňovat a k sobě přibližovat.
• Nastane-li pro všechna možná dělení D rovnost

$$\sup\{s(f, D)\} = \inf\{S(f, D)\},$$

bude tato hodnota též obsahem plochy P.

Definici určitého integrálu vyslovíme obecněji pro funkci f omezenou (konstrukci lze provést i pro některé nespojité funkce), proto místo minima a maxima funkce f na intervalu J_i použijeme její infimum a supremum. Funkce může nabývat kladných i záporných hodnot.

Definice: *Mějme funkci f omezenou na $\langle a, b\rangle$. Označme D libovolné dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, tj. $D = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$, kde $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, podintervaly $J_i = \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ a jejich délky d_i, $i = 1, \ldots, n$. Označme*

$$m_i = \inf\{f(x), x \in J_i\},\ M_i = \sup\{f(x), x \in J_i\}$$

a dále

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i\, d_i\,,\ S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i\, d_i.$$

Jestliže platí:

$$\sup\{s(f, D)\} = \inf\{S(f, D)\},$$

pak tuto společnou hodnotu nazýváme určitým Riemannovým integrálem funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Zápis určitého integrálu:

$$\int_a^b f(x)\,dx\,, \text{ případně } \int_a^b f\,.$$

Poznámka:

Číslo $\sup\{s(f,D)\}$ se nazývá dolní Riemannův integrál, číslo $\inf\{S(f,D)\}$ pak horní Riemannův integrál na intervalu $\langle a,b\rangle$. Má-li funkce f na intervalu $I=\langle a,b\rangle$ určitý integrál, říkáme, že f je na I riemannovsky integrovatelná.