Integrální počet - 3. část

Osnova přednášky

- **Určitý Riemannův integrál - základní věty.**
- **Výpočet určitých integrálů.**
- **Aplikace určitého integrálu.**
- **Nevlastní integrál.**

Klíčová slova: *primitivní funkce, integrály neurčitý, určitý, nevlastní, funkce Gama.*

Stručný obsah přednášky, důležité pojmy a věty

Určitý Riemannův integrál - základní věty

V celém dalším textu budeme označením *určitý integrál* vždy rozumět určitý integrál Riemannův.

Věta 1. (postačující podmínka existence) *Je-li funkce f spojitá nebo monotónní na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak má na intervalu $\langle a, b\rangle$ určitý integrál.*

Věta 2. (Newton – Leibnizova) *Nechť je funkce f spojitá na $\langle a, b\rangle$ a má na tomto intervalu primitivní funkci F. Pak platí:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Věta 3. (o linearitě) *Nechť existují $\int_a^b f(x)\,dx$ a $\int_a^b g(x)\,dx$. Pak platí:*

$$\int_a^b (cf(x) + dg(x))\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx + d\int_a^b g(x)\,dx, \quad c, d \in R.$$

Věta 4. (o aditivitě) *Nechť $c \in (a, b)$. Pak $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje, právě když existují integrály $\int_a^c f(x)\,dx$ a $\int_c^b f(x)\,dx$, a platí:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Věta 5. (o střední hodnotě integrálu) *Mějme f spojitou v $I = \langle a, b\rangle$. Pak existuje aspoň jeden bod $c \in (a, b)$, že platí:*

$$\int_a^b f(x)\;dx = (b - a)\,f(c).$$

(Střední hodnotou se nazývá hodnota $f(c)$.)

Důležité vlastnosti určitých integrálů

1. $\int_a^a f(x)\ dx = 0.$
2. Pro $b > a$ je: $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$, pokud integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje.
3. Existují-li čísla m a M, že $m \leq f(x) \leq M\ \forall x \in \langle a, b\rangle$, pak platí:
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$
Vztah se využívá pro odhad určitého integrálu.
4. Je-li $f(x) \leq g(x)$ na $\langle a, b\rangle$, pak $\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx.$
Důsledek: Je-li $f(x) \geq 0\ \forall x \in \langle a, b\rangle$, pak $\int_a^b f(x)\ dx \geq 0$,
Je-li $f(x) \leq 0\ \forall x \in \langle a, b\rangle$, pak $\int_a^b f(x)\ dx \leq 0$.
5. Jestliže je f spojitá na $\langle a, b\rangle$, pak lze zavést spojitou funkci
$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{pro } x \in \langle a, b\rangle\,,$$
která je primitivní funkcí k funkci f (nazývá se *integrál s proměnnou horní mezí*).

Výpočet určitých integrálů

Určité integrály počítáme podle Newton-Leibnizovy věty, která uvádí vztah mezi určitým a neurčitým integrálem. Lze tedy používat obvyklé vzorce a integrační metody, upravené pro určitý integrál:

Věta 6. (Metoda per partes) *Mají-li funkce f a g na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojité derivace, pak platí:*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Věta 7. (Substituční metoda) *Mějme složenou funkci $f[g]$. Nechť funkce f je spojitá na intervalu $J = \langle c, d\rangle$ a má na J primitivní funkci F. Nechť dále funkce g má spojitou derivaci na intervalu $I = \langle a, b\rangle$ a pro všechna $x \in I$ je $g(x) \in J$. Pak platí:*

$$\int_a^b f(g(x))\ g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Při výpočtu určitého integrálu substituční metodou obvykle provedeme tzv. přepočítání mezí pro novou proměnnou a k původní proměnné se již nevracíme.

Aplikace určitého integrálu

Určité integrály se vyskytují při řešení různorodých problémů, v mnoha matematických, technických i ekonomických úlohách.

a) Základní geometrické aplikace

- výpočet obsahu plochy, ohraničené:
  - grafem nezáporné funkce f, osou x a přímkami $x = a, x = b$:
$$P = \int_a^b f(x)\ dx,$$

* $*$ grafem libovolné funkce f, osou x a přímkami $x = a, x = b$:

$$P = \int_a^b |f(x)| \, dx,$$

* $*$ grafy dvou funkcí f a g, jestliže $f(x) \geq g(x) \ \forall x \in \langle x_1, x_2 \rangle$, kde hodnoty x_1 a x_2 jsou x-ové souřadnice průsečíků obou funkcí:

$$P = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) \, dx,$$

- výpočet délky křivky*,
- výpočet objemu rotačního tělesa*,
- výpočet pláště rotačního tělesa*.

*Příslušné vzorce lze najít ve vhodné literatuře.

b) Aplikace v ekonomii a statistice

- v různých statistických metodách,
- v teorii pravděpodobnosti (výpočet střední hodnoty, rozptylu, distribuční funkce atd.),
- v některých ekonomických úlohách,
- při technické analýze akcií,
- při testování hypotéz apod.

Příklady na výpočet určitých integrálů a jejich aplikace najdete v souboru *Řešené příklady a Cvičení s výsledky*.

Nevlastní integrál

Nevlastní integrál je zobecněním určitého integrálu. Zavádí se pro případy, kdy interval není uzavřený, nebo na něm není integrovaná funkce f spojitá. Definuje se pomocí primitivní funkce a jejích příslušných limit (pokud tyto limity existují) a dělí se na nevlastní integrály *vlivem meze* a nevlastní integrály *vlivem funkce*. Uvedeme zde jen vzorce pro některé z nich:

a) Integrály nevlastní vlivem meze

- funkce f je spojitá na $I = (a, b)$:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x),$$

- funkce f je spojitá na $I = (a, \infty)$:

$$\int_a^\infty f(x) \, dx = \lim_{x \to \infty} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x),$$

- funkce f je spojitá na $I = (-\infty, \infty)$:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) \, dx = \lim_{x \to \infty} F(x) - \lim_{x \to -\infty} F(x).$$

b) Integrály nevlastní vlivem funkce

- funkce f není spojitá ve vnitřním bodě c intervalu $I = \langle a, b\rangle$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{x\to c^-} F(x) - F(a) + F(b) - \lim_{x\to c^+} F(x).$$

Ve výpočtu tedy místo dosazení mezí do primitivní funkce spočteme příslušné limity, pokud existují. Pak je výsledkem buď reálné číslo a říkáme, že integrál konverguje, nebo je výsledkem ∞ a řekneme, že integrál diverguje.

Význam a některé vlastnosti nevlastního integrálu jsou analogické jako u určitého integrálu. Nevlastní integrály se používají např. u číselných řad, ve statistice apod.

Poznámka:
Ve statistice je důležitá tzv. *funkce Gama*, definováná pomocí nevlastního integrálu pro $y > 0$:

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx.$$

Některé vlastnosti funkce Γ:

- $\Gamma(1) = 1$,
- $\Gamma(y+1) = y\,\Gamma(y) \quad \forall y > 0$,
- Pro $n \in N$ je $\Gamma(n+1) = n!$