Číselné řady

Osnova přednášky

- **Číselná řada a její součet.**
- **Kritéria konvergence a divergence.**
- **Absolutní konvergence.**

Klíčová slova: *číselná řada, součet řady, geometrická a aritmetická řada, konvergence řady, divergence řady, alternující řada, absolutní konvergence.*

Stručný obsah přednášky, důležité pojmy a věty

Číselná řada a její součet

Výchozím pojmem pro číselné řady je pojem posloupnosti. Tu jsme definovali jako funkci $f : N \to R$ s hodnotami $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Vytvořme nyní pomocí členů posloupnosti „nekonečný součet“:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Tento výraz může obecně představovat reálné číslo, nekonečno, nebo jeho hodnota nemusí vůbec existovat.

Definice: *Mějme posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Číselnou řadou nazveme výraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

N-tým částečným součtem této řady nazveme číslo $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Definice: *Mějme řadu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Existuje-li vlastní* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, *pak číslo* $s \in R$ *nazveme součtem této řady a řada se nazývá konvergentní. Pokud je* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ *nevlastní, nebo neexistuje, pak se řada nazývá divergentní.*

Pro konvergentní řadu zapíšeme: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Poznámky:

a) Je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konstantní (nenulová) posloupnost, pak řada vzniklá z této posloupnosti je divergentní.

b) Je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ aritmetická posloupnost (s diferencí $d \neq 0$), pak řada vzniklá z této posloupnosti se nazývá řada aritmetická a je vždy divergentní.

c) Je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ geometrická posloupnost (s členem $a_1 \neq 0$), pak řada vzniklá z této posloupnosti se nazývá geometrická řada. Ta je konvergentní pro $|q| < 1$ a divergentní pro $|q| \geq 1$.

d) Součet geometrické řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ s kvocientem q, $|q| < 1$, je

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Věty o číselných řadách

Věta 1. *Mějme řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *a* $k \in R$. *Pak platí:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(k a_n) = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

pokud výrazy na pravých stranách mají smysl.

Součet řady (kromě řad geometrických) se obecně určuje poměrně obtížně, proto se v praxi většinou omezujeme na zjišťování, zda je daná řada konvergentní, nebo divergentní. Je-li nějaká řada konvergentní, pak lze sečtením dostatečně velkého počtu členů nahradit její součet s požadovanou přesností a odhadnout chybu, jaké jsme se přitom dopustili. Divergentní řadu ale žádným přibližným součtem nahradit nelze.

Kritéria konvergence a divergence

Ke zjišťování konvergence či divergence řad nám slouží tzv. kritéria.

Věta 2. (kritérium divergence) *Mějme řadu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Jestliže je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *pak je daná řada divergentní.*

Opačná implikace neplatí: Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, pak může být řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní i divergentní.

Kritéria pro řady s kladnými (nezápornými) členy

Definice: *Řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *se nazývá řada s kladnými členy, jestliže* $\forall n \in N$ *je* $a_n > 0$, *a nazývá se řada s nezápornými členy, je-li* $a_n \geq 0$ $\forall n \in N$.

Máme-li řadu s kladnými či nezápornými členy, je posloupnost jejích částečných součtů vždy neklesající. Mohou tedy nastat pouze následující situace:
- $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, $s \in R$ a řada je konvergentní,
- $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ a řada je divergentní.

Každou řadu s nezápornými členy lze zapsat jako řadu s kladnými členy (nulové členy lze vynechat a součet ani konvergence řady se tím nezmění), proto další kritéria uvedeme pro řady s kladnými členy. Tři nejpoužívanější kritéria jsou:

Věta 3. (D´Alembertovo limitní kritérium) *Mějme řadu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *s kladnými členy. Nechť existuje* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L, L \in R^*$. *Pak platí:*

a) Je-li $L < 1$, *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentní.*

b) Je-li $L > 1$, *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentní.*

Věta 4. (Cauchyovo limitní kritérium) *Mějme řadu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *s kladnými členy. Nechť existuje* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L, L \in R^*$. *Pak platí:*

a) Je-li $L < 1$, *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentní.*

b) Je-li $L > 1$, *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentní.*

Věta 5. (integrální kritérium) *Mějme řadu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *s kladnými členy, kde posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je nerostoucí. Definujme funkci* $f : \langle 1, \infty) \to R$, *která je spojitá, nerostoucí a kladná a* $f(n) = a_n \; \forall n \in N$. *Pak platí:*

a) Je-li $\int_1^{\infty} f(x)\,dx = c, c \in R$, *pak je řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

b) Je-li $\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \infty$, *pak je řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

Poznámky:

a) Kritéria D´Alembertovo a Cauchyovo jsou tzv. slabá, protože nám nedávají odpověď pro všechny řady. Je-li totiž $L = 1$, pak pomocí těchto kritérií nelze o konvergenci či divergenci řady rozhodnout. Výsledná hodnota limity L neudává u žádného kritéria součet řady.

b) Integrální kritérium je tzv. silné, protože za daných předpokladů řeší situaci obecně, pro všechny řady. Jeho nevýhodou je ovšem nutnost výpočtu nevlastního integrálu, který může být pro mnohé řady příliš obtížný, často i obvyklými metodami neřešitelný. Výsledná hodnota integrálu c není součtem řady.

c) Je-li příslušná řada definována pouze na množině N_r, pak se v integrálním kritériu použije nevlastní integrál $\int_r^{\infty} f(x)\,dx$.

d) Pro rozhodování o konvergenci či divergenci řad existují i další kritéria, těmi se však v rámci této přednášky zabývat nebudeme.

Další typy řad

- Je-li $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada se zápornými (příp. nekladnými) členy, pak úpravou

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

převedeme zjišťování její konvergence či divergence na vyšetřování řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, která má kladné (příp. nezáporné) členy.

- Jestliže je zadaná řada ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, a_n, \quad \text{nebo} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\, a_n$$

tj. pravidelně střídá znaménka, pak se tato řada nazývá řada *alternující*. Pro ni se nejčastěji používá následující kritérium konvergence (ne ovšem divergence):

Věta 6. (Leibnizovo kritérium) *Mějme alternující řadu* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, a_n$*, kde posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je nerostoucí a s nezápornými členy. Je-li* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*, pak je řada* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, a_n$ *konvergentní.*

Absolutní konvergence

Pro další typy řad výše neuvedené se zjišťuje tzv. absolutní konvergence. Pomocí ní lze dokázat konvergenci řad, v nichž se střídají znaménka nepravidelně (ale ne jejich divergenci).

Definice: *Číselná řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se nazývá*

a) absolutně konvergentní, jestliže je konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$,

b) neabsolutně konvergentní, je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní, ale* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *je divergentní.*

Věta 7. *Každá absolutně konvergentní řada je také konvergentní.*

Opačná implikace neplatí. Pro řady s kladnými či nezápornými členy oba pojmy splývají, neboť pro ně $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Pro výpočty s absolutně konvergentními řadami platí mnohá důležitá pravidla, např. komutativní zákon (tj. libovolným přerovnáním členů řady se její součet nezmění, což obecně pro „nekonečné součty“ neplatí).