Zobrazení

Osnova přednášky

- **Definice a základní pojmy.**
- **Typy zobrazení.**
- **Zobrazení složené a inverzní.**

Klíčová slova: *zobrazení, definiční obor, obor hodnot, prosté, „na“, bijekce, složené, inverzní.*

Stručný obsah přednášky, důležité pojmy a věty

Definice a základní pojmy

Zobrazení je výchozím pojmem k pojmu funkce. Používají se pro něj různé definice - zde uvedeme dvě nejčastější (druhá není zcela korektní, neboť používá nematematický pojem „předpis“):

Definice: *Mějme libovolné množiny A, B. Zobrazením f množiny A do množiny B nazveme podmnožinu kartézského součinu AxB, pro kterou platí:*

$$\forall x \in A \; \exists ! y \in B \; ([x,y] \in f).$$

Definice: *Mějme libovolné množiny A, B. Zobrazením f množiny A do množiny B nazveme předpis (pravidlo), které každému prvku x z množiny A přiřadí právě jedno y z množiny B.*

Zápis zobrazení: $f: \; A \longrightarrow B,$
$f: \; x \longrightarrow y, \; y = f(x).$

Dále nazýváme:
x ... vzor, nezávisle proměnná, argument,
y ... obraz, závisle proměnná,
A ... množina vzorů,
B ... množina obrazů,
$f(M)$ ... obraz množiny M při zobrazení f, tj. $f(M) = \{f(x), x \in M\}$,
I_A ... identické zobrazení na množině A, tj. $I_A: \; A \longrightarrow A, \;\; f: \; x \longrightarrow x.$

Základními pojmy pro zobrazení jsou definiční obor a obor hodnot:

Definice: *Mějme zobrazení $f: A \longrightarrow B$. Definičním oborem zobrazení f nazveme množinu*

$$D(f) = \{x, \, x \in A \wedge \exists \, y \in B \; (f(x) = y)\}.$$

Oborem hodnot zobrazení f nazýváme množinu

$$H(f) = \{y, \, y \in B \wedge \exists \, x \in A, \; (f(x) = y)\}.$$

Je tedy $D(f) = A$, $H(f) \subset B$ - zde může a nemusí nastat rovnost.

Poznámky:
a) Rovnost dvou zobrazení nastává, mají-li stejný předpis a stejný definiční obor, tj.

$$f = g \Leftrightarrow D(f) = D(g) \wedge \forall x \in D(f)(f(x) = g(x)).$$

b) Někdy, např. má-li $D(f)$ nepřehledný zápis, se zavádí i zobrazení z množiny A do množiny B - pak může být pouze $D(f) \subset A$.

Zobrazení může být zadáno různými způsoby:

- - předpisem,
- - tabulkou,
- - graficky,
- - slovním popisem apod.

Typy zobrazení

Definujeme důležité typy zobrazení:

Definice: *Zobrazení $f: A \longrightarrow B$ se nazývá*
a) prosté, jestliže platí: $\forall x_1, x_2 \in A \; (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$,
b) na množinu B, jestliže $H(f) = B$,
c) vzájemně jednoznačné (bijektivní), je-li zároveň prosté a na množinu B.

U prostého zobrazení mají vždy dva navzájem různé vzory různé obrazy. Tuto vlastnost ověřujeme buď podle formulace z definice, nebo často výhodněji implikací:

$$\forall x_1, x_2 \in A \; (f(x_1) = f(x_2) \;\; \Rightarrow \;\; x_1 = x_2).$$

Vlastnost, že f je *na* množinu B (f je „na“), zjistíme určením oboru hodnot, nebo ze vztahu:

$$H(f) = B \;\; \Leftrightarrow \;\; \forall y \in B \; \exists x \in A \; (y = f(x)).$$

Nemá-li zadané zobrazení f některou z uvedených vlastností, lze obvykle provést úpravu výchozích množin tak, aby ji nové zobrazení f_1 (dané stejným předpisem) získalo:
- chceme-li zajistit, aby bylo zobrazení f_1 „na“, volíme $B = H(f)$,
- chceme-li zajistit, aby bylo zobrazení f_1 prosté, provedeme tzv. restrikci (zúžení) zobrazení na vhodnou množinu $M, M \subset A$.

Definice: *Mějme zobrazení $f: A \longrightarrow B$ a $M \subset A, M \neq A$. Restrikcí f na množinu M nazveme zobrazení f_1, pro které platí:*

$$f_1 : M \longrightarrow B \;\wedge\; \forall x \in M \; (f_1(x) = f(x)).$$

Např. zobrazení $f: \; (-5, 5) \longrightarrow R, \; f(x) = x^2$ není prosté ani „na“. Jestliže však definujeme nové zobrazení $f_1: \; (0, 5) \longrightarrow (0, 25), \; f_1(x) = x^2$, pak f_1 je prosté i „na“, tedy je bijektivní.

Zobrazení složené a inverzní

Definice: *Mějme dvě zobrazení f a g, g zobrazuje množinu A do množiny B a f zobrazuje množinu B do množiny C. Složeným zobrazením nazveme zobrazení h, které zobrazuje A do C a $h(x) = f(g(x))\ \forall x \in A$.*

Zápis: $h = f[g]$.
Zobrazení g je vnitřním a f vnějším zobrazením, v tomto pořadí se provádí i výpočet hodnot h. Skládání lze zobecnit i pro více zobrazení.

Symbolicky lze znázornit:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\mathrm{A}} \arrow[r, "g"] & \boxed{\mathrm{B}} \arrow[r, "f"] & \boxed{\mathrm{C}} \\
\boxed{\mathrm{A}} \arrow[rr, "h"] & & \boxed{\mathrm{C}}
\end{tikzcd}$$

Definice: *Mějme zobrazení $f, f : A \longrightarrow B$, $f(x) = y$, které je prosté a je na množinu B. Inverzním zobrazením k f nazveme zobrazení f^{-1}, pro které platí, že $f^{-1} : B \longrightarrow A$ a $f^{-1}(y) = x\ \ \forall y \in B$.*

Tedy:

$$\begin{array}{llcll}
f: & A \longrightarrow B & \qquad\qquad & f^{-1}: & B \longrightarrow A \\
f: & x \longrightarrow y & & f^{-1}: & y \longrightarrow x
\end{array}$$

a platí

$$\forall x \in A\ \forall y \in B\ (\, y = f(x) \ \Leftrightarrow\ x = f^{-1}(y)\,).$$

Vlastnosti inverzního zobrazení shrnuje následující věta:

Věta: *Mějme prosté zobrazení f množiny A na množinu B a f^{-1} zobrazení k f inverzní. Pak platí:*

1. $D(f^{-1}) = H(f)\ \wedge\ H(f^{-1}) = D(f)$,
2. f^{-1} *je určeno jednoznačně, je prosté a je na množinu* A,
3. $(f^{-1})^{-1} = f$,
4. *pro složená zobrazení:* $f^{-1}[f] = I_A$, *tj.* $f^{-1}(f(x)) = x$,
   $f[f^{-1}] = I_B$, *tj.* $f(f^{-1}(y)) = y$.

Příklady zobrazení, určování jejich vlastností a složená a inverzní zobrazení naleznete v souboru *Řešené příklady*.