Funkce a její vlastnosti

Osnova přednášky

- **Reálná funkce jedné reálné proměnné.**
- **Složená a inverzní funkce.**
- **Základní vlastnosti funkcí.**

Klíčová slova: *reálná funkce jedné reálné proměnné, definiční obor, obor hodnot, prostá, ohraničenost a monotonie funkce, sudá, lichá, periodická, složená, inverzní.*

Stručný obsah přednášky, důležité pojmy a věty

Reálná funkce jedné reálné proměnné

Definice: *Je-li f zobrazení množiny A do množiny B, kde množiny A, B jsou číselné množiny, pak se f nazývá funkce. Jsou-li obě množiny $A, B \subset R$, nazývá se $f : A \longrightarrow B$ reálná funkce jedné reálné proměnné.*

Úmluva: V látce tohoto semestru budou vždy $A, B \subset R$, proto budeme zkráceným názvem *funkce* rozumět právě reálnou funkci jedné reálné proměnné.

Opět značíme:

$f: \ A \longrightarrow B, \quad f: \ x \longrightarrow y, \quad y = f(x),$
$D(f)$ ... definiční obor funkce f, $D(f) = A$ ... množina vzorů
$H(f)$ ... obor hodnot funkce $f, H(f) \subseteq B, H(f)$ ... množina obrazů.

Není-li množina A uvedena, určujeme definiční obor funkce jako maximální množinu čísel x, pro která má předpis (vzorec) v zadání funkce smysl.

Definice: *Grafem funkce f nazveme množinu $G(f) = \{[x, y], x \in D(f) \ \wedge \ y = f(x)\}$, znázorněnou v rovině xy.*

Definice: *Každé číslo $c \in D(f)$, pro které je $f(c) = 0$, se nazývá kořen, neboli nulový bod funkce f.*

Je-li číslo c kořenem funkce f, pak bod $P = [c, f(c)]$ je průsečíkem grafu funkce f s osou x.

Způsoby zadání funkcí:

- předpisem, vzorcem tj. analyticky,
- tabulkou (často hospodářské výsledky: objem výroby za určitá období, náklady jednotlivých provozních středisek, ceny výrobku během roku atd.),
- graficky apod.

Analytická zadání jsou různých typů:

- *explicitní zadání* - ve tvaru $y = f(x)$,
- *implicitní zadání* - rovnicí $F(x, y) = 0$, která za určitých podmínek definuje funkci $y = y(x)$,

- *parametrické zadání* - obě proměnné jsou dány pomocí vedlejšího parametru, tj. $x = x(t), y = y(t),\ t \in I$ a přitom $y = f(x)$.

Operace s funkcemi:

Definice: *Mějme funkce f, g a množinu $D = D(f) \cap D(g)$. Pak definujeme součet, rozdíl a součin funkcí f a g s označením $f+g$, $f-g$, fg a absolutní hodnotu funkce f s označením $|f|$ předpisy:*

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x) && \forall x \in D,\\ (f-g)(x) &= f(x)-g(x) && \forall x \in D,\\ (fg)(x) &= f(x)g(x) && \forall x \in D,\\ |f|(x) &= |f(x)| && \forall x \in D(f).\end{aligned}$$

Dále definujeme podíl funkcí f a g s označením $\frac{f}{g}$ předpisem:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \forall x \in D \setminus \{x, g(x) = 0\}.$$

Složená a inverzní funkce

Definice: *Mějme funkci $g : A \longrightarrow B$ a funkci $f : B \longrightarrow C$. Funkci $h : A \longrightarrow C$ nazveme funkcí složenou z funkcí g a f, jestliže $\forall\, x \in A$ je $h(x) = f(g(x))$.*

Opět značíme $h = f[g]$ a lze analogicky skládat i větší počet funkcí. Při určování jejich definičního oboru stanovíme podmínky pro každou dílčí funkci a pak hledáme množinu, kde jsou všechny podmínky splněny současně.

Definice: *Mějme funkci $f, f : A \longrightarrow B$, $f(x) = y$, která je prostá a je na množinu B. Inverzní funkcí k f nazveme funkci f^{-1}, pro kterou je $f^{-1} : B \longrightarrow A$ a $\forall y \in B\ (f^{-1}(y) = x)$.*

Přehledně zapíšeme:

$$\forall x \in A\ \forall y \in B\ (y = f(x)\ \Leftrightarrow\ x = f^{-1}(y)).$$

Vlastnosti inverzních funkcí:

Věta: *Mějme funkci f, která je prostá a zobrazuje množinu A na množinu B a f^{-1} funkci inverzní k f. Pak platí:*
1. $D(f^{-1}) = H(f)\ \wedge\ H(f^{-1}) = D(f)$,
2. *f^{-1} je určena jednoznačně, je prostá a na množinu A,*
3. $(f^{-1})^{-1} = f$,
4. $f^{-1}[f] = I_A, f[f^{-1}] = I_B$,
5. *grafy funkcí f a f^{-1} jsou navzájem souměrné podle přímky $y = x$.*

Při výpočtu inverzní funkce nejprve ověříme, že je daná funkce prostá (z grafu, z definice), případně provedeme vhodnou restrikci. Potom ze zadaného funkčního předpisu $y = f(x)$ vyjádříme proměnnou $x = f^{-1}(y)$. V souladu se zvyklostmi zápisu funkce obvykle ještě přeznačíme proměnné: $y = f^{-1}(x)$.

Dvojice navzájem inverzních funkcí:

$$\begin{array}{lll} f(x) = 5x & f^{-1}(x) = \frac{x}{5}, & \\ f(x) = x^3 & f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}, & \\ f(x) = \sqrt{x} & f^{-1}(x) = x^2 & \text{(na vhodném intervalu)}, \\ f(x) = \log x & f^{-1}(x) = 10^x, & \\ f(x) = \frac{1}{x} & f^{-1}(x) = \frac{1}{x} & \text{apod.} \end{array}$$

Základní vlastnosti funkcí

Vlastnosti funkce určujeme buď na $D(f)$, nebo na dané množině $M \subset D(f)$. Pokud množina M není uvedena, vztahují se vlastnosti k definičnímu oboru funkce.

Přehled základních vlastností:

- f je *prostá* a *„na“* - viz zobrazení,
- f je *ohraničená* (tj. *omezená)* na M (příp. ohraničená shora, zdola), je-li obraz $f(M)$ ohraničená množina (příp. ohraničená shora, zdola). Maximem (minimem, suprémem, infimem) funkce f pak nazveme maximum (minimum, suprémum, infimum) množiny $f(M)$.
- *monotonie*:
  - f je rostoucí na M, jestliže $\forall x_1, x_2 \in M \ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$,
  - f je klesající na M, jestliže $\forall x_1, x_2 \in M \ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$,
  - f je nerostoucí na M, jestliže $\forall x_1, x_2 \in M \ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$,
  - f je neklesající na M, jestliže $\forall x_1, x_2 \in M \ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$.
- *symetričnost*:
  - f je sudá na M, jestliže $\forall x \in M \ ((-x) \in M \wedge f(-x) = f(x))$,
  - f je lichá na M, jestliže $\forall x \in M \ ((-x) \in M \wedge f(-x) = -f(x))$.
- f je *periodická* na M, jestliže $\exists p \neq 0$, že $\forall x \in M \ ((x+p) \in M \wedge f(x+p) = f(x))$.

Dále platí:

a) Je-li funkce f ryze monotónní na svém $D(f)$, pak je na něm také prostá.
b) Je-li funkce f rostoucí (příp. klesající), pak její inverzní funkce f^{-1} je také rostoucí (příp. klesající).
c) Graf sudé funkce je souměrný podle osy y, graf liché funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic.

Poznámka:
Později budeme u funkcí určovat i další vlastnosti, zvláště:
- spojitost,
- konvexnost/konkávnost (tj. „prohnutí“ grafu funkce).

Příklady funkcí, určování jejich definičních oborů a základních vlastností a výpočet inverzní funkce naleznete v souboru *Řešené příklady*.