Přehled základních funkcí

Osnova přednášky

- **Elementární funkce.**
- **Přehled důležitých funkcí.**
- **Cyklometrické funkce.**

Klíčová slova: *(základní) elementární funkce, exponenciela, přirozený logaritmus, cyklometrické funkce, arkussinus, arkuskosinus, arkustangens, arkuskotangens.*

Stručný obsah přednášky, důležité pojmy a věty

Elementární funkce

Za *základní elementární funkce* se obvykle označuje skupina funkcí:

- konstantní,
- mocninné,
- exponenciální,
- logaritmické,
- goniometrické,
- cyklometrické.

Pojem „základní“ je používán spíše z historického hlediska a různé učebnice se v přesném ustanovení této skupiny občas liší.

Elementárními funkcemi pak nazýváme všechny funkce, které vznikly ze základních elementárních funkcí konečným počtem operací s funkcemi a skládáním.

Ve stručném přehledu uvedeme elementární funkce známé ze středoškolské matematiky, jejich definiční obory a základní vlastnosti a k nim přidáme ještě skupinu cyklometrických funkcí. Grafy všech těchto funkcí najdete v doporučené literatuře.

Přehled důležitých funkcí

Konstantní funkce

Předpis:	$f(x) = c,\ c \in R$.
Obory:	$D(f) = R$, $H(f) = \{c\}$.
Graf:	přímka rovnoběžná s osou x.
Vlastnosti:	ohraničená, sudá, zároveň neklesající i nerostoucí.
Poznámka:	speciální případ funkce nulová, $f(x) = 0$, její graf je osa x.

Lineární funkce

Předpis:	$f(x) = ax + b$, $a \neq 0$.
Obory:	$D(f) = R$, $H(f) = R$.
Graf:	přímka se směrnicí a.
Vlastnosti:	prostá, rostoucí pro $a > 0$, klesající pro $a < 0$, pro $b = 0$ lichá.
Poznámka:	existují k nim funkce inverzní, které jsou také lineární.

Kvadratická funkce

Předpis: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
Obory: $D(f) = R$, $H(f)$ podle zadání.
Graf: parabola s osou rovnoběžnou s osou y.
Vlastnosti: ohraničená zdola pro $a > 0$, shora pro $a < 0$, pro $b = 0$ sudá.
Poznámka: vrchol paraboly $V[m, n]$ lze určit úpravou na tvar $y - n = a(x - m)^2$.

Polynomická funkce (polynom stupně n)

Předpis: $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$, $a_0 \neq 0$.
Obory: $D(f) = R$, $H(f)$ podle zadání.
Graf: podle zadání.
Vlastnosti: podle zadání.
Poznámka: kvadratická, lineární i konstantní funkce jsou speciální případy polynomické funkce pro $n = 2, 1, 0$.

Racionální lomená funkce

Předpis: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P, Q jsou polynomické funkce.
Obory: $D(f) = R \setminus \{x, Q(x) = 0\}, H(f)$ podle zadání.
Graf: podle zadání.
Vlastnosti: podle zadání.
Poznámka: speciální případ je $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, její graf je rovnoosá hyperbola se středem $S = [-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}]$.

Mocninná funkce

Předpis: $f(x) = x^b$, $b \in R$.
Obory: $D(f), H(f)$ podle zadání.
Graf: podle zadání.
Vlastnosti: podle zadání.
Poznámka: rozdělují se podle $n, n \in N$. Např.:
a) s přirozeným mocnitelem: $b = n$, $f(x) = x^n$, $D(f) = R$,
b) se záporným mocnitelem: $b = -n$, $f(x) = \frac{1}{x^n}$, $D(f) = R \setminus \{0\}$,
c) odmocniny: $b = \frac{1}{n}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, pro n liché je $D(f) = R$, pro n sudé je $D(f) = \langle 0, \infty)$.

Exponenciální funkce

Předpis: $f(x) = a^x$, $a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$.
Obory: $D(f) = R, H(f) = (0, \infty)$.
Graf: exponenciální křivka.
Vlastnosti: prostá, zdola ohraničená, pro $a > 1$ rostoucí, pro $a < 1$ klesající.
Poznámky: a) průsečík grafu s osou y je bod $P[0, 1]$,
b) jsou inverzní k funkcím logaritmickým o stejném základu,
c) důležitá je $f(x) = \mathrm{e}^x$ – *exponenciela*,
d) e je tzv. Eulerova konstanta, $\mathrm{e} \doteq 2{,}71828$.

Logaritmická funkce

Předpis: $f(x) = \log_a x$, $a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$.
Obory: $D(f) = (0, \infty), H(f) = R$.
Graf: logaritmická křivka.
Vlastnosti: prostá, pro $a > 1$ rostoucí, pro $a < 1$ klesající.
Poznámky: a) průsečík grafu s osou x je bod $P[1, 0]$,
b) jsou inverzní k funkcím exponenciálním o stejném základu,
c) důležité jsou $f(x) = \ln x$ pro $a = e$ – tzv. *přirozený logarimus* a
d) $f(x) = \log x$ pro $a = 10$ – tzv. *dekadický logarimus*.

Goniometrické funkce

a) *sinus*

Předpis: $f(x) = \sin x$.
Obory: $D(f) = R, H(f) = \langle -1, 1 \rangle$.
Graf: sinusoida.
Vlastnosti: ohraničená, lichá, periodická s hlavní periodou $p = 2\pi$.

b) *kosinus*

Předpis: $f(x) = \cos x$.
Obory: $D(f) = R, H(f) = \langle -1, 1 \rangle$.
Graf: kosinusoida.
Vlastnosti: ohraničená, sudá, periodická s hlavní periodou $p = 2\pi$.

c) *tangens*

Předpis: $f(x) = \mathrm{tg}\ x$, $\mathrm{tg}\ x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
Obory: $D(f) = R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}, H(f) = R$.
Graf: skládá se z mnoha větví.
Vlastnosti: lichá, periodická s hlavní periodou $p = \pi$.

d) *kotangens*

Předpis: $f(x) = \mathrm{cotg}\ x$, $\mathrm{cotg}\ x = \frac{\cos x}{\sin x}$.
Obory: $D(f) = R \setminus \{k\pi, k \in Z\}, H(f) = R$.
Graf: skládá se z mnoha větví.
Vlastnosti: lichá, periodická s hlavní periodou $p = \pi$.

Absolutní hodnota

Předpis: $f(x) = |x|, |x| = \sqrt{x^2}$, tj. $|x| = x$ pro $x \geq 0, |x| = -x$, pro $x < 0$.
Obory: $D(f) = R, H(f) = \langle 0, \infty)$.
Graf: ze dvou polopřímek.
Vlastnosti: zdola ohraničená, sudá.

Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce jsou čtyři a jsou definovány jako funkce inverzní ke goniometrickým na vhodném intervalu. Restrikce původní funkce je nutná, neboť žádná goniometrická funkce není prostá na svém $D(f)$.

a) *arkussinus*

Předpis: $f(x) = \arcsin x$.
Obory: $D(f) = \langle -1, 1\rangle, H(f) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$.
Graf: souměrný k části sinu podle přímky $y = x$.
Vlastnosti: prostá, ohraničená, rostoucí, lichá.
Poznámka: Pro výpočet hodnot na def. oborech: $\sin x = y \;\Leftrightarrow\; \arcsin y = x$.

b) *arkuskosinus*

Předpis: $f(x) = \arccos x$.
Obory: $D(f) = \langle -1, 1\rangle, H(f) = \langle 0, \pi\rangle$.
Graf: souměrný k části kosinu podle přímky $y = x$.
Vlastnosti: prostá, ohraničená, klesající.
Poznámka: Pro výpočet hodnot na def. oborech: $\cos x = y \;\Leftrightarrow\; \arccos y = x$.

c) *arkustangens*

Předpis: $f(x) = \mathrm{arctg}\ x$.
Obory: $D(f) = R, H(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
Graf: souměrný k základní větvi tangens podle přímky $y = x$.
Vlastnosti: prostá, ohraničená, rostoucí, lichá.
Poznámka: Pro výpočet hodnot na def. oborech: $\mathrm{tg}\ x = y \;\Leftrightarrow\; \mathrm{arctg}\ y = x$.

d) *arkuskotangens*

Předpis: $f(x) = \mathrm{arccotg}\ x$.
Obory: $D(f) = R, H(f) = (0, \pi)$.
Graf: souměrný k základní větvi kotangens podle přímky $y = x$.
Vlastnosti: prostá, ohraničená, klesající.
Poznámka: Pro výpočet hodnot na def. oborech: $\mathrm{cotg}\ x = y \;\Leftrightarrow\; \mathrm{arccotg}\ y = x$.

Nejdůležitější z cyklometrických funkcí jsou funkce arkussinus a arkustangens.