Další funkce, posloupnost

Osnova přednášky

- **Některé neelementární funkce.**
- **Posloupnost a její vlastnosti.**
- **Důležité typy posloupností.**

Klíčová slova: *signum, Dirichletova funkce, celá část, posloupnost, geometrická, aritmetická, faktoriál, Fibonacciova posloupnost.*

Stručný obsah přednášky, důležité pojmy a věty

Některé neelementární funkce

Kromě elementárních funkcí existuje v praxi značné množství funkcí dalších, které nemají obecné vlastnosti funkcí elementárních, ale jsou také důležité (např. funkce dané po částech). Uvedeme alespoň některé z nich.

Funkce signum

Nazývá se také znaménková funkce - udává znaménko argumentu. Má funkční předpis $f(x) = \text{sgn } x$, je definována $\forall x \in R$ a lze ji rozepsat jako funkci danou po částech:

$$f(x) = \text{sgn } x = \begin{cases} -1 & \forall x \in (-\infty, 0), \\ 0 & x = 0, \\ 1 & \forall x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Obor hodnot $H(f) = \{-1, 0, 1\}$, její graf se skládá ze dvou polopřímek rovnoběžných s osou x a bodu $[0, 0]$. Z jejích vlastností uveďme:

- funkce je neklesající,
- je to funkce lichá,
- je ohraničená, její minimum je -1, maximum je 1, tyto extrémy nastávají v nekonečně mnoha bodech.

Dirichletova funkce

Funkce má předpis $f(x) = D(x)$, je definována $\forall x \in R$ a přiřazuje racionálním číslům hodnotu 1, iracionálním číslům hodnotu 0. Je tedy:

$$f(x) = D(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in Q, \\ 0 & \forall x \in R \setminus Q. \end{cases}$$

Obor hodnot $H(f) = \{0, 1\}$, graf Dirichletovy funkce nelze zakreslit. Z definice určíme její vlastnosti:

- funkce není monotónní,
- je to funkce sudá,
- je ohraničená, její minimum je 0, maximum je 1, oba extrémy nastávají v nekonečně mnoha bodech.

Je typickým příkladem funkce, která není spojitá v žádném bodě svého definičního oboru (o spojitosti viz dále). Nemá příliš praktický význam, využívá se spíše v teorii pro důkazy a ilustraci různých vlastností.

Funkce Celá část

Pro funkci se používá zápis $f(x) = \mathrm{E}(x)$ nebo $f(x) = [x]$. Definičním oborem je R a funkční hodnota pro proměnnou x je definována jako největší celé číslo, které je menší nebo rovno x. Je tedy např:

$$\mathrm{E}(3,27) = 3,\ \mathrm{E}(7) = 7,\ \mathrm{E}(-5,21) = -6.$$

Obor hodnot $H(f) = Z$ a její graf je tvořen soustavou úseček rovnoběžných s osou x. Ze základních vlastností má pouze vlastnost neklesající funkce.

V souvislosti s touto funkcí lze zavést i funkci *zlomková část*.

Posloupnost a její vlastnosti

Definice: *Posloupností nazveme funkci f, pro kterou $D(f) = N$.*

Tedy: $f: \quad N \longrightarrow R$

$f: \quad n \longrightarrow f(n) = a_n$

Posloupnost jsme zavedli jako speciální typ funkce. Značíme ji $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, příp. jen $\{a_n\}$. Obor hodnot $H(f) \subset R$, grafem posloupnosti je množina izolovaných bodů v 1. či 4. kvadrantu. Posloupnost je často definována i na množině N_0.

Posloupnost může být zadána *explicitně* (tj. a_n je dáno v závislosti na n), nebo *rekurentně* (a_n je zadáno pomocí předchozích členů, s uvedením odpovídajícího počtu prvních členů). Převedení jednoho způsobu na druhý nebývá jednoduché.

Zadání výčtem několika členů není jednoznačné.

Posloupnost je typem funkce, proto u ní zjišťujeme i funkční vlastnosti - ovšem ne všechny a některé jednodušším způsobem:

- $\{a_n\}$ je prostá, jestliže $\forall n_1, n_2 \in N \ (a_{n_1} = a_{n_2} \ \Rightarrow \ n_1 = n_2)$.
- $\{a_n\}$ je ohraničená, je-li ohraničená množina $H(f)$.
- Monotonie posloupnosti:
  $\{a_n\}$ je rostoucí, jestliže $\forall n \in N \ (a_n < a_{n+1})$,
  $\{a_n\}$ je klesající, jestliže $\forall n \in N \ (a_n > a_{n+1})$.
- Posloupnost nemůže být lichá, sudá a "na"R.

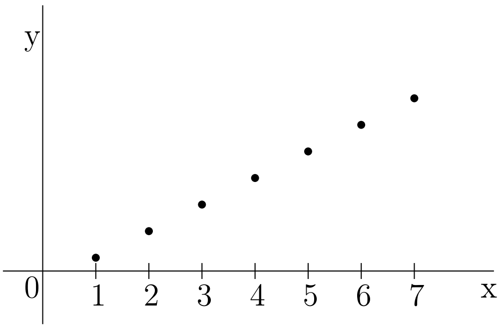
Z posloupnosti lze výběrem nekonečně mnoha členů při zachování jejich pořadí vytvořit tzv. *podposloupnost*, která si zachová vlastnosti původní posloupnosti, ale může mít i některé další.

Důležité typy posloupností

- konstantní posloupnost - speciální posloupnost, která má všechny členy stejné, tj. $a_n = c,\ \forall n \in N,\ c \in R$.

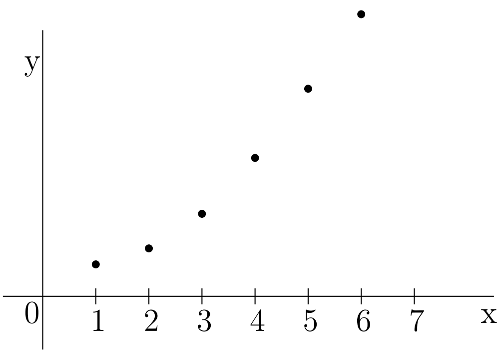
- aritmetická posloupnost - pro ni platí:
  - ∗ rozdíl sousedních členů je konstantní, tj. $(a_{n+1} - a_n) = d\ \forall n \in N$ (d nazýváme *diference*),
  - ∗ explicitní zadání: $a_n = a_1 + (n-1)d$,
  - ∗ rekurentní zadání: $a_n = a_{n-1} + d$ pro $n \geq 2$, se zadáním a_1,

* body grafu leží na přímce,
* součet prvních n členů: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.



Obrázek 1: Graf aritmetické posloupnosti.

- geometrická posloupnost - pro ni platí:
  * podíl sousedních členů je konstantní, tj. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \ \forall n \in N$ (q nazýváme *kvocient*),
  * explicitní zadání: $a_n = a_1 q^{n-1}$,
  * rekurentní zadání: $a_n = a_{n-1}\, q$ pro $n \geq 2$, se zadáním a_1,
  * body grafu leží na grafu exponenciální funkce,
  * součet prvních n členů: $s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ pro $q \neq 1$, $s_n = n a_1$ pro $q = 1$.



Obrázek 2: Graf geometrické posloupnosti.

- posloupnost daná pomocí faktoriálu, tj. $a_n = n!, n \in N_0$, přičemž $0! = 1$ a $n! = n.(n-1)(n-2)\cdots 1$ pro $n \geq 1$.

- Fibonacciova posloupnost - je podrobněji uvedena v Řešených příkladech.

Vzorce pro geometrickou posloupnost se často vyskytují v různých typech ekonomických úloh, např. složené úročení, odúročení, stanovení průměrné roční míry inflace, míru amortizace zařízení apod. Při *složeném úročení* se úročí nejen výchozí částka P, ale i připisované úroky. Pro výpočet splatné částky S_n po n obdobích použijeme vzorec

$$S_n = P(1+i)^n,$$

kde i je úroková míra pro jedno období.