Limita posloupnosti

Osnova přednášky

- **Limita posloupnosti.**
- **Věty o limitě posloupnosti.**
- **Eulerova konstanta.**

Klíčová slova: *ε-ové okolí bodu, limita posloupnosti vlastní a nevlastní, posloupnost konvergentní a divergentní, limitní neurčité výrazy, Eulerova konstanta.*

Stručný obsah přednášky, důležité pojmy a věty

Limita posloupnosti

Pojem *limita posloupnosti* slouží k charakterizování členů posloupnosti pro stále se zvyšující n, tj. pro $n \to +\infty$. Z limity se dozvíme, zda se hodnoty posloupnosti blíží k nějaké konstantě, zda rostou/klesají nade všechny meze, nebo zda nic takového o posloupnosti říci nelze.

Zavedeme ε-ové okolí bodu L jako otevřený interval:

$$U_\varepsilon(L) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Definice: *Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má*
a) vlastní limitu $L, L \in R$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in N\ \forall n > n_\varepsilon\ (a_n \in U_\varepsilon(L)),$$

b) nevlastní limitu $+\infty$, jestliže

$$\forall K > 0\ \exists n_K \in N\ \forall n > n_K\ (a_n > K),$$

c) nevlastní limitu $-\infty$, jestliže

$$\forall K < 0\ \exists n_K \in N\ \forall n > n_K\ (a_n < K).$$

Zápis limity posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L,\ \ L \in R^*.$$

Poznámka:
Podle definice vlastní limity jsou od jistého indexu hodnoty a_n vzdáleny od L o méně než ε, přičemž číslo ε může být libovolně malé. Definice tedy popisuje situaci, kdy se hodnoty a_n k hodnotě L "neustále přibližují", případně se jí rovnají.

Věty o limitě posloupnosti

Věta 1. *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Věta 2. *Má-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ limitu v R^*, pak každá její podposloupnost má limitu stejnou.*

Tato věta se používá k ověření "neexistence" limity zadané posloupnosti - když najdeme dvě její podposloupnosti s různými limitami, pak limita původní posloupnosti neexistuje.

Věta 3. *Každá posloupnost s vlastní limitou je ohraničená.*

Věta 4. *Každá monotónní posloupnost má limitu v R^*. Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí (příp. neklesající), pak je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = sup\,(a_n)$, je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající (příp. nerostoucí), pak je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = inf\,(a_n)$.*

Věta 5. *Mějme posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro které existuje $n_0 \in N$, že $\forall n > n_0\ (a_n \le b_n)$. Mají-li obě posloupnosti limitu, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.*

Poznámky:
a) Stačí, aby uvedená nerovnost platila až od určitého indexu, neboť konečný počet členů chování posloupnosti v $+\infty$ (tj. limitu) neovlivní.
b) I když nastává $\forall n > n_0\ (a_n < b_n)$, je mezi limitami obou posloupností zaručena pouze neostrá nerovnost.
c) Tato i následující věta se často využívají k odhadu limity posloupnosti.

Věta 6. (o sevřené posloupnosti) *Mějme posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro které existuje $n_0 \in N$, že $\forall n > n_0\ (a_n \le b_n \le c_n)$. Nechť je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L,\ L \in R^*$. Pak je také $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.*

Věta 7. (o limitě operací) *Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B,\ A, B \in R^*, c \in R$. Pak platí:*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) &= A + B, \\
\lim_{n\to\infty} (c\,a_n) &= c\,A, \\
\lim_{n\to\infty} (a_n\,b_n) &= A\,B, \\
\lim_{n\to\infty} (|a_n|) &= |A|, \\
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{A}{B} \quad (\text{pro } b_n \ne 0),
\end{aligned}$$

pokud výrazy na pravých stranách rovností existují.

Věta 8. (o nulové limitě) *Pro posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:*
a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$,
b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

Limity některých posloupností:

- konstantní posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a_n = c$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$,
- aritmetická posloupnost: pro $d > 0$ je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$,
  pro $d < 0$ je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$,
- geometrická posloupnost: pro $|q| < 1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,
  pro $q > 1 \wedge a_1 > 0$ je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$,
  pro $q > 1 \wedge a_1 < 0$ je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$,
  pro $q \leq -1$ limita neexistuje,
- pro $c > 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} n^c = +\infty, \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^c} = 0,$$

- pro $k \in N$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{n} = +\infty, \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1, \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Výpočty s limitami probíhají v množině $R^* = R \cup \{+\infty, -\infty\}$ - rozšíření reálných čísel. Pravidla pro počítání v R^* již byla uvedena, i to, že některé typy operací nejsou v R^* definovány. Pokud se takový výraz při výpočtu limity vyskytne, je potřeba provést vhodnou úpravu, abychom ho odstranili. Nedefinované výrazy, s kterými se můžeme setkat u limit, se nazývají *limitní neurčité výrazy* a lze je shrnout do sedmi typů (s některými se setkáme až u limity funkce). Zapisujeme je symbolickými zápisy:

$$"0 \cdot \infty", \ "\infty - \infty", \ "\frac{\infty}{\infty}", \ "\frac{0}{0}", \ "1^{\infty}", \ "0^0", \ "\infty^0".$$

Eulerova konstanta

Základní poznatky o čísle e:

- Eulerova konstanta je základ funkcí exponenciela a přirozený logaritmus.
- Eulerova konstanta má nekonečný desetinný rozvoj a je přibližně $e \doteq 2,71828$.
- Eulerova konstanta je číslo iracionální.
- Jeden ze způsobů, kterým číslo e můžeme zavést, je

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

- Eulerovu konstantu lze též vyjádřit jako limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = e, \quad \text{kde } c_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{1}{n!}$$

  Pomocí tohoto vztahu lze odhadnout chybu, které se dopustíme nahrazením čísla e členem c_n : $\quad e - c_n < \frac{1}{n.n!}$.
- Číslo e se často vyskytuje v různých ekonomických modelech.