Limita a spojitost funkce

Osnova přednášky

- **Limita funkce - zavedení a vlastnosti.**
- **Jednostranné limity a limity v nevlastních bodech.**
- **Spojitost funkce.**
- **Určení kořene funkce metodou půlení intervalu.**

Klíčová slova: *ε-ové okolí bodu, prstencové okolí bodu, limita funkce vlastní a nevlastní, limita zleva a zprava, spojitá funkce, body (ne)spojitosti, kořen funkce.*

Stručný obsah přednášky, důležité pojmy a věty

Limita funkce - zavedení a vlastnosti

Pojem *limity funkce v bodě c* patří k základním pojmům diferenciálního počtu a vlastně celé matematické analýzy. Limita funkce v konkrétním bodě charakterizuje "chování funkce" na okolí tohoto bodu. Limity významně pomáhají i k zakreslení grafu funkce.

Pro definici si nejprve zavedeme:

a) ε–ové okolí bodu L:

$$U_\varepsilon(L) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

b) prstencové δ–okolí bodu c:

$$P_\delta(c) = (c - \delta, c + \delta) \setminus \{c\} = (c - \delta, c) \cup (c, c + \delta).$$

Definice: *Mějme funkci f, definovanou na nějakém okolí bodu c. Řekneme, že*
a) funkce f má v bodě c vlastní limitu $L, L \in R$, jestliže

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0,\ \text{že}\ \forall\, x \in P_\delta(c)\ \text{je}\ \ |f(x) - L| < \varepsilon,$$

b) funkce f má v bodě c nevlastní limitu $+\infty$, jestliže

$$\forall\, K > 0 \quad \exists\, \delta > 0,\ \text{že}\ \forall\, x \in P_\delta(c)\ \text{je}\ f(x) > K,$$

c) funkce f má v bodě c nevlastní limitu $-\infty$, jestliže

$$\forall\, K < 0 \quad \exists\, \delta > 0,\ \text{že}\ \forall\, x \in P_\delta(c)\ \text{je}\ f(x) < K.$$

Zápis:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L, \quad L \in R^*.$$

Poznámky:

1. Na konkrétní hodnotě $f(c)$ limita f v bodě c nijak nezávisí, funkce f v bodě c ani nemusí být definována.
2. Limita je tzv. *lokální vlastnost* - týká se pouze okolí bodu, ne celého definičního oboru.
3. Limitu funkce lze zavést i pomocí limity posloupnosti (tzv. Heineho definice limity funkce).

Věty o limitě funkce

Věta 1. *Pokud existuje limita funkce f v bodě c, je tato limita dána jednoznačně.*

Věta 2. *Má-li funkce f vlastní limitu v bodě c, pak existuje nějaké okolí bodu c, na kterém je funkce f ohraničená.*

Věta 3. *Mějme funkce f a g, pro které existuje $P_\delta(c)$, že $\forall x \in P_\delta(c)\ (f(x) \le g(x))$. Mají-li obě funkce limitu v bodě c, pak $\lim_{x\to c} f(x) \le \lim_{x\to c} g(x)$.*

Poznámky:
a) I v případě, kdy $\forall x \in P_\delta(c)\ (f(x) < g(x))$, je mezi limitami obou funkcí v bodě c zaručena pouze neostrá nerovnost.
b) Tato i následující věta se využívají k odhadu limity funkce - složitější limitu se snažíme určit pomocí limit funkcí známých a jednodušších.

Věta 4. (o sevřené funkci) *Mějme funkce f, g a h, pro které existuje $P_\delta(c)$, že $\forall x \in P_\delta(c)\ (f(x) \le g(x) \le h(x))$. Nechť je $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L,\ L \in R^*$. Pak je také $\lim_{x\to c} g(x) = L$.*

Věta 5. (o limitě operací) *Nechť existují $\lim_{x\to c} f(x) = A, \lim_{x\to c} g(x) = B,\ A, B \in R^*$. Pak platí:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) &= A + B, \\
\lim_{x\to c} (k\, f(x)) &= k\, A \quad (\text{pro } k \in R), \\
\lim_{x\to c} (f(x)\, g(x)) &= A\, B, \\
\lim_{x\to c} |f(x)| &= |A|, \\
\lim_{x\to c} \tfrac{f(x)}{g(x)} &= \tfrac{A}{B} \quad (\text{pro } g(x) \ne 0),
\end{aligned}$$

pokud výrazy na pravých stranách rovností existují.

Věta 6. (o nulové limitě) *Pro funkci f platí:*
a) $\lim_{x\to c} f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to c} |f(x)| = 0,$
b) $\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to c} |f(x)| = +\infty.$

Při výpočtu limity funkce zkusíme nejprve do funkce dosadit limitní bod. Získáme tak buď výsledek limity (reálné číslo nebo $\pm\infty$), nebo *limitní neurčitý výraz*. U něj nelze určit výsledek přímo, ale je potřeba např. provést vhodnou úpravu funkčního předpisu.

Jednostranné limity a limity v nevlastních bodech.

Někdy potřebujeme určit tzv. jednostranné limity, a to zleva, nebo zprava. Jsou definovány analogicky jako limita funkce - uvedeme proto pouze definice jednostranných limit vlastních. Pro definici si nejprve zavedeme:

a) pravostranné prstencové δ–okolí bodu c: $P_\delta^+(c) = (c, c+\delta)$,
b) levostranné prstencové δ–okolí bodu c: $P_\delta^-(c) = (c-\delta, c)$.

Definice: *Mějme funkci f, definovanou na nějakém okolí bodu c. Řekneme, že*
a) funkce f má v bodě c vlastní limitu zprava $L, L \in R$, jestliže

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0, \text{ že } \forall\, x \in P_\delta^+(c) \text{ je } |f(x) - L| < \varepsilon,$$

b) funkce f má v bodě c vlastní limitu zleva $L, L \in R$, jestliže

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0, \text{ že } \forall\, x \in P_\delta^-(c) \text{ je } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Zápis:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L, \lim_{x \to c^-} f(x) = L, \quad L \in R^*.$$

Jednostranné limity používáme především:
- v krajních bodech $D(f) = (a, b)$,
- v bodech nespojitosti funkce, v nichž limita neexistuje,
- k ověření existence limity ve vnitřním bodě $D(f)$ - viz věta:

Věta 7. *Jestliže má funkce f v bodě c obě jednostranné limity, které jsou shodné, pak existuje i limita funkce f v daném bodě a je rovna hodnotě limit jednostranných.*

Limity funkce f můžeme počítat i v $+\infty$ a $-\infty$, je-li $D(f)$ neomezený - jsou to tzv. limity v nevlastních bodech. Mohou být opět vlastní i nevlastní, např.:

Definice: *Mějme funkci f, definovanou na R. Řekneme, že funkce f má*
a) v $+\infty$ vlastní limitu $L, L \in R$, jestliže

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x_\varepsilon, \text{ že } \forall\, x > x_\delta \text{ je } |f(x) - L| < \varepsilon,$$

b) v $+\infty$ nevlastní limitu $+\infty$, jestliže

$$\forall\, K > 0 \quad \exists\, x_K, \text{ že } \forall\, x > x_K \text{ je } f(x) > K.$$

Tyto limity počítáme podobně jako limity posloupnosti (s ohledem na znaménko ∞).

Spojitost funkce

Definice: *Funkce f se nazývá:*
a) spojitá v bodě c, je-li definována na nějakém okolí bodu c a přitom je

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

b) spojitá na otevřeném intervalu J, je-li spojitá v každém jeho bodě,
c) spojitá na uzavřeném intervalu J, je-li spojitá v každém jeho vnitřním bodě a v krajních bodech je jednostranně spojitá.

Poznámky:

1. Jednostranná spojitost se definuje analogicky pomocí jednostranných limit.
2. Jestliže funkce f v bodě c není definována, ale má v něm vlastní limitu, lze funkci f v tomto bodě hodnotou limity spojitě dodefinovat. Změní se přitom samozřejmě definiční obor.

Věty o spojitosti funkce

Věta 1. *Všechny základní elementární funkce jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.*

Věta 2. *Při operacích s funkcemi a při skládání funkcí se na definičním oboru výsledné funkce spojitost zachovává.*

Věta 3. *Mějme složenou funkci $h = f[g]$, kde $\lim_{x \to c} g(x) = d$ a f je spojitá v bodě d. Pak $\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(d)$.*

Věta 4. (Weierstrassova) *Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu J, pak je na tomto intervalu ohraničená a nabývá na něm svého maxima a minima.*

Věta 5. (Bolzanova) *Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu J a hodnoty f mají v krajních bodech J opačná znaménka, pak má f uvnitř intervalu J alespoň jeden kořen (nulový bod).*

Určení kořene funkce metodou půlení intervalu

Nelze-li kořen funkce vypočítat přesně, používají se numerické metody - obvykle metody iterační. Výpočet probíhá v opakujících se krocích podle určitého algoritmu, dokud nezískáme řešení vyhovující zadání s požadovanou přesností ϵ. U *metody půlení intervalu* postupně zmenšujeme interval, v němž se hledaný kořen nachází.

Základní úloha: *Určete s přesností ϵ kořen funkce f (tj. nalezněte řešení rovnice $f(x) = 0$) na intervalu $\langle a, b \rangle$.*

Jsou-li splněny podmínky Bolzanovy věty, hledáme kořen funkce takto:
1. krok: Za základní interval $\langle a_1, b_1 \rangle$ volíme zadaný interval $\langle a, b \rangle$.
2. krok: Určíme střed s_1 intervalu $\langle a_1, b_1 \rangle$ a v něm spočteme funkční hodnotu $f(s_1)$.

- Je-li $f(s_1) = 0$, našli jsme kořen funkce a výpočet ukončíme.
- Je-li znaménko $f(s_1)$ stejné jako $f(a_1)$, volíme další interval $\langle a_2, b_2 \rangle = \langle s_1, b_1 \rangle$.
- Je-li znaménko $f(s_1)$ stejné jako $f(b_1)$, volíme další interval $\langle a_2, b_2 \rangle = \langle a_1, s_1 \rangle$.

Interval $\langle a_2, b_2 \rangle$ splňuje podmínky Bolzanovy věty, takže v něm kořen funkce existuje. Ověříme, zda vyhovuje požadované přesnosti, tj. zda $(b_2 - a_2) < 2\epsilon$. Pokud ano, je přibližným řešením střed tohoto intervalu a výpočet ukončíme.
3. a další kroky: opakujeme postup z kroku 2. Až bude $(b_n - a_n) < 2\epsilon$, za výsledné řešení označíme střed posledního intervalu, tj. $\bar{x} = s_n$.

Kromě nalezeného kořene mohou v zadaném intervalu existovat i kořeny další.