Derivace funkce

Osnova přednášky

- **Definice a základní vztahy.**
- **Derivace složené funkce.**
- **Derivace vyšších řádů.**
- **Rovnice tečny ke grafu funkce.**

Klíčová slova: *Derivace v bodě a na intervalu, obor derivace, derivace vyšších řádů, směrnice tečny.*

Stručný obsah přednášky, důležité pojmy a věty

Definice a základní vztahy

Derivace funkce v bodě je speciální limita funkce v tomto bodě, k níž se v různých oborech dostáváme z typických úloh:
* v matematice z úlohy o nalezení rovnice tečny,
* ve fyzice z úlohy o zjištění okamžité rychlosti pohybujícího se bodu apod.

Definice: *Mějme funkci f definovanou na okolí bodu c a nechť existuje $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$. Tuto limitu nazveme derivací funkce f v bodě c a označíme ji $f'(c)$:*

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

Definice: *Mějme otevřený interval I, kde v každém jeho bodě x existuje vlastní limita $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Pak funkce, která všem bodům $x \in I$ přiřadí tuto limitu, se nazývá derivací funkce f na intervalu I a značí se f':*

Tedy:

$$f' : I \longrightarrow R$$
$$f' : x \longrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Poznámky:

a) Protože derivace v bodě je limita, může být vlastní i nevlastní.
b) Obor derivace (též obor diferencovatelnosti) určujeme jako množinu, kde jsou definovány funkce f a f', tj. v každém bodě existuje derivace vlastní.
c) Všimněte si, že v derivaci je v limitě poměr přírůstku funkčních hodnot a přírůstku proměnné na okolí bodu c. Derivace v bodě c tedy jistým způsobem popisuje chování funkce na okolí tohoto bodu.
d) V bodě c lze definovat i derivace jednostranné, pomocí jednostranných limit.
Značí se: pravostranná derivace: $f'_+(c)$,
levostranná derivace: $f'_-(c)$.

Vzorce pro derivování elementárních funkcí a příslušné obory derivace naleznete v Přehledu. Vzorce lze získat výpočtem podle definice, nebo pomocí vět o derivaci.

Věty o derivacích

Věta 1. *Existují-li na intervalu I derivace funkcí f, g a $c \in R$, pak $\forall x \in I$ platí:*

$$\begin{aligned} (f(x)+g(x))' &= f'(x)+g'(x) \\ (c\, f(x))' &= c\, f'(x) \\ (f(x)g(x))' &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \end{aligned}$$

Je-li navíc $g(x) \neq 0$ $\forall x \in I$, pak na I platí:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Věta 2. *Nechť je f^{-1} inverzní funkce k funkci f na intervalu I, $x_0 \in I$ a $y_0 = f(x_0)$. Nechť je dále $f'(x_0) \neq 0$ a vlastní. Pak existuje i derivace $(f^{-1})'(y_0)$ a platí:*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Derivace složené funkce

Věta 3. *Mějme složenou funkci $h = f[g]$. Nechť funkce g má derivaci v bodě c a funkce f má derivaci v bodě $d = g(c)$. Pak funkce h má derivaci v bodě c a platí:*

$$h'(c) = f(g(c))' = f'(g(c)) \cdot g'(c)\ .$$

Tento vztah můžeme zobecnit pro $x \in I$ a též pro funkce vícekrát složené. Platí tedy:

$$\begin{aligned} &f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &f(g(h(x)))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x) \end{aligned}$$

Další věty o derivacích:

Věta 4. *Má-li funkce f v bodě c vlastní derivaci, pak je v bodě c spojitá.*

Věta 5. (Rolleova)*Nechť je funkce f spojitá na $\langle a, b\rangle$, má derivaci $\forall x \in (a, b)$ a $f(a) = f(b)$. Pak existuje bod $c \in (a, b)$, že $f'(c) = 0$.*

Věta 6. (Lagrangeova o střední hodnotě)*Nechť je funkce f spojitá na $\langle a, b\rangle$ a má derivaci $\forall x \in (a, b)$. Pak existuje bod $c \in (a, b)$, že $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Derivace vyšších řádů

Derivace vyšších řádů vznikají opakovaným derivováním zadané funkce.
Značí se:

- $f''(x) = (f'(x))'$,
- $f'''(x) = ((f''(x))'$,

- $f^{(4)}$ a vyšší - obecně $f^{(n)}$.

Využívají se pro zjišťování vlastností funkce, u průběhu funkce, v Taylorovu polynomu a dalších aplikacích.

Rovnice tečny ke grafu funkce

Vlastní derivace v bodě c má geometrický význam *směrnice tečny*, sestrojené v bodě $T[c, f(c)]$ ke grafu funkce f.
Rovnice tečny pak je:

$$y = f(c) + f'(c)(x - c).$$

- Je-li derivace v bodě c nulová, pak je tečna ke grafu f v tomto bodě rovnoběžná s osou x.
- Jestliže derivace v bodě c neexistuje, a přitom je v tomto bodě funkce f spojitá, pak je na grafu funkce v bodě $P[c, f(c)]$ *hrot* a tečnu v něm sestrojit nelze.

- Rovnice normály:

$$y = f(c) - \frac{1}{f'(c)}(x - c).$$