# Aplikace derivací - 1. část

## Osnova přednášky

- **L´Hospitalovo pravidlo.**
- **Určení intervalů monotonie.**
- **Lokální a globální extrémy funkce.**

***Klíčová slova:*** *L´Hospitalovo pravidlo, neurčité výrazy, stacionární bod, lokální extrém, globální (absolutní) extrém.*

## Stručný obsah přednášky, důležité pojmy a věty

### L´Hospitalovo pravidlo

L´Hospitalovým pravidlem řešíme limity funkce s limitními neurčitými výrazy podílového typu.

**Věta 7.** *Nechť pro $c \in R^*$ je $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ typu "$\frac{0}{0}$" nebo "$\frac{\infty}{\infty}$". Nechť dále existuje $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak existuje také $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ a platí:*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

*Poznámky:*
a) L´Hospitalovo pravidlo využíváme v případech, kdy je výpočet limity $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ jednodušší než výpočet zadané limity. Lze ho použít i opakovaně (tj. počítat limitu podílu druhých derivací, třetích atd.)
b) Pokud L´Hospitalovo pravidlo nevede k výsledku, neznamená to, že zadaná limita neexistuje. Je třeba zkusit jiný způsob výpočtu – úpravou apod.
c) Typ limity je potřeba důsledně ověřovat - pro jiné typy výrazů, než jsou uvedeny v předpokladech věty, by aplikace pravidla nevedla ke správnému výsledku.

Ostatní neurčité výrazy
U nich nelze L´Hospitalovo pravidlo použít přímo, ale je potřeba je nejprve vhodným způsobem převést na podíl:
• součinový typ "$0\cdot\infty$"vyjádříme jako složený zlomek a získáme typ "$\frac{0}{0}$" nebo "$\frac{\infty}{\infty}$",
• součet/rozdíl "$\infty-\infty$" se nejčastěji vyskytuje jako rozdíl zlomků - ty převedeme na společného jmenovatele,
• exponenciální typy upravíme pomocí dvojice inverzních funkcí exponenciely a logaritmu a přejdeme k součinovému typu.

### Určení intervalů monotonie

První derivaci funkce používáme pro zjišťování intervalů, na kterých funkce roste nebo klesá - viz následující věta, která vyplývá z věty o střední hodnotě.

**Věta 8.** *Mějme funkci $f$ spojitou na intervalu $I$. Je-li v každém vnitřním bodě intervalu $I$:*
*a) $f'(x) > 0$, pak je $f$ na $I$ rostoucí,*
*b) $f'(x) < 0$, pak je $f$ na $I$ klesající,*
*c) $f'(x) = 0$, pak je $f$ na $I$ konstantní.*

Zjišťování monotonie bude důležitou součástí vyšetřování průběhu funkce.

## Lokální a globální extrémy funkce

U funkcí rozlišujeme extrémy lokální, které se vztahují pouze k okolí bodu $c$, a globální, což jsou extrémy na celém definičním oboru, případně na zadané množině.

### *Lokální extrémy*

**Definice:** *Řekneme, že funkce $f$ má v bodě $c$:*
*a) lokální maximum (příp. lokální minimum), jestliže existuje takové $P_\delta(c)$, že $\forall x \in P_\delta(c))$ je $f(c) \geq f(x)$ (příp. $f(c) \leq f(x)$),*
*b) ostré lokální maximum (příp. ostré lokální minimum), jestliže existuje $P_\delta(c)$, že $\forall x \in P_\delta(c))$ je $f(c) > f(x)$ (příp. $f(c) < f(x)$).*

**Věta 9.** *Má-li funkce $f$ v bodě $c$ lokální extrém, pak je buď $f'(c) = 0$, nebo derivace v bodě $c$ neexistuje.*

Lokální extrémy tedy mohou nastat pouze v bodech, v nichž je $f'$ nulová (takové body se nazývají *stacionární*), nebo v bodech, kde $f'$ vůbec neexistuje. Všechny tyto body nazýváme *body podezřelé z extrému.* O existenci a typu lokálních extrémů pak rozhodneme na základě intervalů monotonie a spojitosti funkce f nebo podle $f''(c)$:

**Věta 10.** *Nechť je funkce $f$ spojitá v bodě $c \in (a, b)$. Pak platí:*
*a) Je-li v intervalu $(a, c)$ $f'(x) > 0$ a v intervalu $(c, b)$ $f'(x) < 0$, pak má $f$ v bodě $c$ ostré lokální maximum,*
*b) Je-li v intervalu $(a, c)$ $f'(x) < 0$ a v intervalu $(c, b)$ $f'(x) > 0$, pak má $f$ v bodě $c$ ostré lokální minimum.*

**Věta 11.** *Nechť na okolí bodu $c$ existuje $f'$ a $f'(c) = 0$. Pak platí:*
*a) Je-li $f''(c) > 0$, pak má funkce $f$ v bodě $c$ ostré lokální minimum,*
*b) Je-li $f''(c) < 0$, pak má funkce $f$ v bodě $c$ ostré lokální maximum.*

### *Globální (absolutní) extrémy*

Jejich existence na intervalu $J$ je zajištěna, pokud je interval $J$ uzavřený a funkce $f$ je na něm spojitá (viz Weierstrassova věta). Tyto extrémy pak hledáme buď v bodech lokálních extrémů nebo v krajních bodech intervalu $J$ - nikde jinde nastat nemohou.
Není-li existence extrémů zajištěna (tj. $f$ není na $J$ spojitá nebo $J$ není uzavřený), pak absolutní extrémy mohou, ale nemusí existovat - to se zjišťuje např. pomocí limit či vlastností funkce.