MNOHOÚHELNÍKY

ZAVEDENÍ POJMU MNOHOÚHELNÍK

Mnohoúhelník (též *n*-úhelník) je část roviny vymezená úsečkami, které spojují určitý počet bodů (nejméně tři), z nichž žádné tři neleží na jedné přímce.

Definice 1:

Mnohoúhelník je omezená část roviny ohraničená uzavřenou lomenou čárou.

Základní pojmy

- **vrcholy** mnohoúhelníku – body, které určují mnohoúhelník
- **strany** mnohoúhelníku – úsečky spojující sousední vrcholy
- **úhlopříčky** mnohoúhelníku – úsečky spojující nesousední vrcholy
- **vnitřní úhly** mnohoúhelníku – úhly, které svírají sousední strany

Poznámka: *Počet vrcholů, stran a vnitřních úhlů je v jednom mnohoúhelníku stejný. Tento počet určuje název mnohoúhelníku, např. trojúhelník, čtyřúhelník, pětiúhelník, … .*

Znázornění a zápis

Mnohoúhelník se znázorňuje pomocí jeho vrcholů a stran, označuje se výčtem vrcholů v jejich přesném pořadí. U speciálních mnohoúhelníků (trojúhelník, čtverec, obdélník, …) se v zápise před výčet vrcholů umísťuje příslušný symbol (Δ, □, …). Vrcholy, strany a úhly mnohoúhelníku se zapisují stejným způsobem jako body, úsečky a úhly.

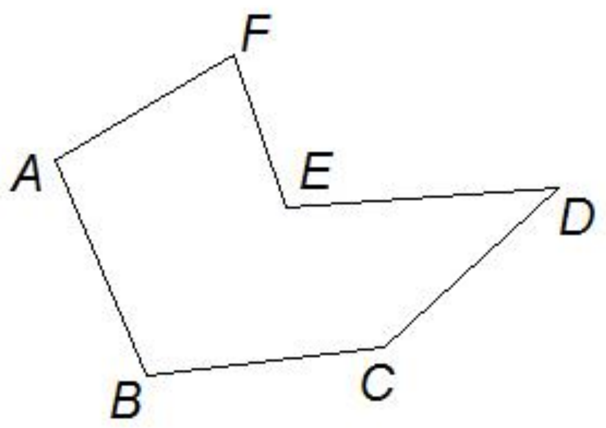
Mnohoúhelník … $ABCDEF$

Vrcholy … A, B, C, D, E, F

Strany … AB, BC, CD, DE, EF, FA

Úhlopříčky … $AC, AD, AE, BD, BE, BF, CE, CF, DF$

Vnitřní úhly … $\measuredangle FAB, \measuredangle ABC, \measuredangle BCD, \measuredangle CDE, \measuredangle DEF, \measuredangle EFA$



Druhy mnohoúhelníků

Kromě mnohoúhelníků, lišících se počtem vrcholů, se mnohoúhelníky dělí na:

a) **pravidelné** (všechny strany i vnitřní úhly jsou shodné)
   nepravidelné

b) **konvexní** (všechny vnitřní úhly jsou menší než 180°)
   nekonvexní (alespoň jeden vnitřní úhel je větší než 180°)

c) **pravoúhelníky** (všechny vnitřní úhly jsou pravé, případně 270°)
   nepravoúhelníky (alespoň jeden vnitřní úhel se nerovná pravému úhlu)

d) **tětivové mnohoúhelníky** (takové mnohoúhelníky, jimž lze opsat kružnici; jinými slovy řečeno, existuje taková kružnice, na níž leží všechny vrcholy daného mnohoúhelníku. Pak říkáme, že je tato kružnice mnohoúhelníku opsaná. Strany tětivového mnohoúhelníku jsou tětivami kružnice opsané)

   tečnové mnohoúhelníky (takové mnohoúhelníky, jimž lze vepsat kružnici; jinými slovy řečeno, existuje kružnice taková, kterou lze mnohoúhelníku vepsat, tj. všechny strany mnohoúhelníku se kružnice dotýkají a jsou zároveň tečnami kružnice vepsané)

Vlastnosti mnohoúhelníků

- **Obvod mnohoúhelníku**

  Obvod mnohoúhelníku o se vypočte jako součet všech jeho stran $o = a + b + c + \cdots,$ kde $a, b, c, \ldots$ jsou jednotlivé strany mnohoúhelníku.

- **Obsah obecného mnohoúhelníku**

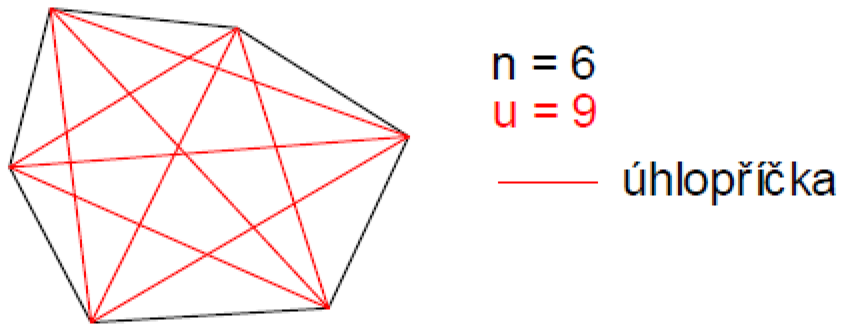
  Obsah obecného mnohoúhelníku se vypočte pomocí rozložení mnohoúhelníku na vhodné, vzájemně se nepřekrývající trojúhelníky, obdélníky nebo čtverce, jejichž obsahy $S_1, S_2, S_3, \ldots$ se vypočítají podle známých vzorců a následně se sečtou, tj. $S = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots$.

- **Součet vnitřních úhlů mnohoúhelníku**

  Součet vnitřních úhlů mnohoúhelníku $\alpha + \beta + \gamma + \cdots = \pi\,(n - 2)\,rad$.

- **Počet úhlopříček obecného mnohoúhelníku**

  Počet úhlopříček obecného mnohoúhelníku určíme ze vztahu $p = \frac{1}{2}n(n - 3)$.



Vlastnosti pravidelného mnohoúhelníku

- **Délka strany pravidelného mnohoúhelníku**
  Délka strany pravidelného mnohoúhelníku je rovna $a = 2r_n \sin\frac{\alpha_n}{2}$, kde r_n je poloměr kružnice opsané mnohoúhelníku a α_n je velikost vnitřního úhlu.
- **Počet úhlopříček pravidelného mnohoúhelníku**
  Počet úhlopříček pravidelného mnohoúhelníku určíme ze vztahu $p = \frac{1}{2}n(n-3)$.
- **Velikost vnitřního a vnějšího úhlu pravidelného mnohoúhelníku**
  Velikost vnitřního úhlu pravidelného mnohoúhelníku určíme ze vztahu $\alpha_n = (n-2)\pi$.
  velikost vnějšího úhlu pravidelného mnohoúhelníku je rovna $\alpha'_n = (1 - \frac{2}{n})\pi$.
- **Součet vnějších úhlů pravidelného mnohoúhelníku**
  Součet vnějších úhlů pravidelného mnohoúhelníku určíme ze vztahu $\sum \alpha'_n = (n-2) \cdot 180°$
- **Velikost středového úhlu pravidelného mnohoúhelníku**
  Velikost středového úhlu pravidelného mnohoúhelníku je rovna $\omega_n = \frac{2\pi}{n}$.

- **Obvod pravidelného mnohoúhelníku**

  Obvod pravidelného mnohoúhelníku je roven $o = na$

- **Kružnice pravidelnému mnohoúhelníku opsaná, vepsaná**

  Pravidelnému mnohoúhelníku lze **opsat** i **vepsat** kružnici. Středy obou kružnic leží ve stejném bodě, který je totožný s těžištěm mnohoúhelníku.

- **Poloměr kružnice vepsané**

  Poloměr ρ_n kružnice vepsané je roven

$$\rho_n = \frac{1}{2}\sqrt{4r_n^2 - a_n^2},$$

$$\rho_n = r_n \cdot \cos\frac{a_n}{2},$$

  kde a_n je délka strany pravidelného mnohoúhelníku a r_n je poloměr kružnice opsané.

- **Obsah pravidelného mnohoúhelníku**

  Obsah pravidelného mnohoúhelníku je roven

$$S_n = \frac{n \cdot a_n \cdot \rho_n}{2} = n \cdot \rho_n^2 \cdot tg\,\frac{\pi}{n} = \frac{n \cdot a_n^2}{4\,tg\frac{\pi}{n}} = n \cdot r_n^2 \cdot \sin\frac{\pi}{n} \cdot \cos\frac{\pi}{n} = \frac{o \cdot \rho_n}{2}.$$

Základní konstrukce mnohoúhelníků

Každá **euklidovská konstrukce** se skládá z opakování pěti základních konstrukcí s pomocí bodů, úseček a kružnic, které byly již vytvořeny v předchozích krocích.

Mezi základní konstrukce patří:

- sestrojení úsečky protínající dva body
- sestrojení kružnice se středem v jednom bodě tak, aby protínala druhý bod
- sestrojení bodu, který leží v průsečíku dvou protínajících se úseček
- sestrojení jednoho nebo dvou bodů ležících v průsečíku kružnice a úsečky (pokud se protínají)
- vytvoření jednoho nebo dvou bodů ležících v průsečíku dvou kružnic (pokud se protínají)

Příklad:

Rovnostranný trojúhelník ABC lze vytvořit ze dvou daných bodů A, B následujícím postupem:

1) vytvoříme úsečku protínající body A a B;
2) vytvoříme dvě kružnice, jednu se středem v bodě A protínající bod B, druhou se středem v bodě B protínající bod A;
3) vytvoříme dva body (C, D) v průsečíku obou kružnic;
4) vytvoříme dvě úsečky, jednu protínající body A a C, druhou protínající body B a C;
5) výsledkem je rovnostranný trojúhelník s vrcholy A, B, C.

Zkonstruovatelné pravidelné mnohoúhelníky

Některé pravidelné mnohoúhelníky lze euklidovskou konstrukcí (tj. pomocí pravítka a kružítka) vytvořit jednoduše, jiné ne. To vedlo k otázce, zda je možné euklidovskou konstrukcí sestrojit všechny pravidelné mnohoúhelníky.

Pomocí pravítka a kružítka lze sestrojit stranu pravidelného mnohoúhelníku pro:

1) $2^k, k \in \mathbb{Z}, k \geq 2$

2) $2^{2^k} + 1, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$ … ***K. F. Gauss*** dokázal pro 3, 5, 17, 257, …

3) $2^i \left(2^{2^k} + 1\right), k \in \mathbb{Z}, k \geq 0, i \geq 1$

Díky možnosti půlit úhly můžeme sestrojit **$2n$-úhelník** právě tehdy, když můžeme sestrojit n-úhelník. Je však dokázáno, že pro sedmi- a devítiúhelník přesná euklidovská konstrukce neexistuje.

Pro $n > 5$ lze n-úhelník sestrojit jen výjimečně a to netriviálními způsoby. Pro ostatní *n* existují **přibližné** konstrukce.

1. Pravidelný pětiúhelník

Definice 2:

Pravidelný pětiúhelník (pentagon) je rovinný geometrický útvar (mnohoúhelník) s pěti vrcholy a pěti stranami. Součet velikostí vnitřních úhlů pětiúhelníku je roven přesně 540°, nebo-li 3π.

Střípky z historie

Konstrukce pravidelného pětiúhelníku byla známa již ve starověkém Řecku.

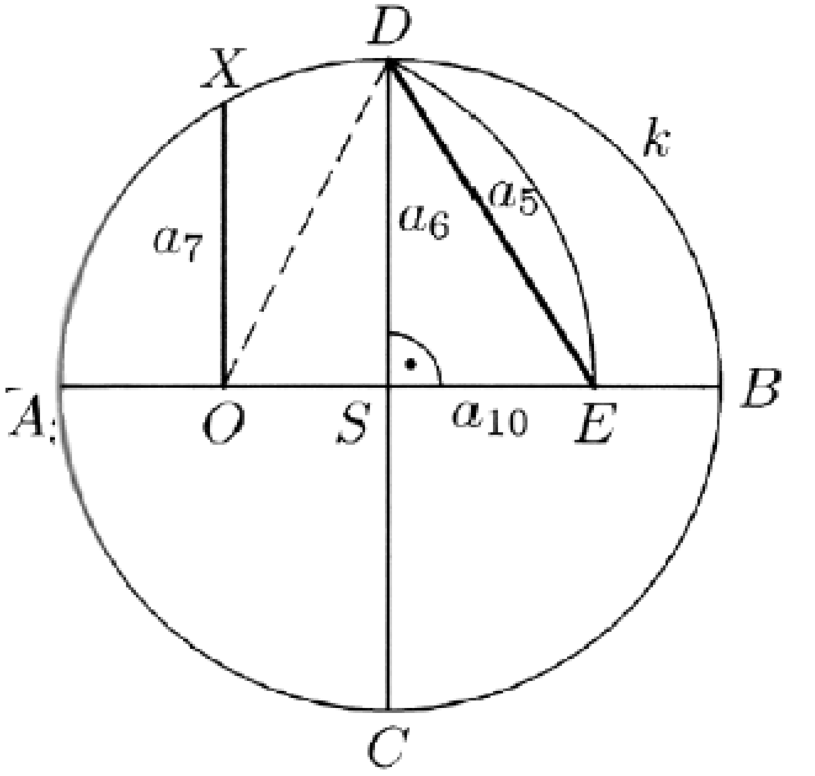
Pravidelný pětiúhelník hrál významnou úlohu v mystice a symbolice Pythagorejců. Od pravidelného pětiúhelníku je také odvozen symbol pentagramu, využívaný v pythagorejské sektě jako poznávací znamení.

Jedním z důvodů, proč byl pravidelný pětiúhelník takto uctíván, bylo zřejmě to, že se v něm hned na několika místech ukazuje nejdokonalejší ze všech poměrů – poměr zlatého řezu.

Konstrukce pravidelného pětiúhelníku (desetiúhelníku)

Pro vyrýsování pravidelného pětiúhelníku (desetiúhelníku) sestrojme

1) úsečku AB se středem S;
2) kružnici $k(S, r = |AS|)$;
3) střed O úsečky AS, tj. platí $|AO| = |OS|$;
4) kolmici p na úsečku AB vedenou bodem S;
5) body C, D jako průsečíky přímky p a kružnice k;
6) kružnici $l(O, r = |OD|)$;
7) bod E jako průsečík kružnice l a úsečky SB;
8) úsečka DE je strana pětiúhelníku;
   úsečka SE je strana desetiúhelníku



Vlastnosti pravidelného pětiúhelníku

- **Obsah pravidelného pětiúhelníku**

  Obsah pravidelného pětiúhelníku o délce strany a je roven $S = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2$

- **Poloměr kružnice pravidelnému pětiúhelníku opsané**

  Poloměr kružnice pravidelnému pětiúhelníku opsané je roven $r_n = \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}a$

  kde a je délka strany pravidelného pětiúhelníku.

- **Poloměr kružnice pravidelnému pětiúhelníku vepsané**

  Poloměr kružnice pravidelnému pětiúhelníku vepsané je roven $\rho_n = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a$, kde a je délka strany pravidelného pětiúhelníku.

- **Velikost úhlu u vrcholu pravidelného pětiúhelníku**

  Velikost vnitřního úhlu u vrcholu pravidelného pětiúhelníku je 108°.

- **Délka nejdelší úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku**

  Délka nejdelší úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku je rovna $I_u = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (zlatý řez).

Zlatý řez *vznikne rozdělením úsečky na dvě části tak, že poměr větší části k menší je stejný jako poměr celé úsečky k větší části. Hodnota tohoto poměru je rovna iracionálnímu číslu*

$$I_u = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618\,033\,988\,749\,894\,848\ \ldots$$

- **Vnitřní a vnější pravidelný pětiúhelník**

  Úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku vymezují uvnitř něj oblast, která má rovněž tvar pravidelného pětiúhelníku.

  Vnitřní a vnější pětiúhelník mají stejný střed, jsou opačně orientovány a délky jejich stran jsou v poměru

$$1:1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Vztah pravidelného pětiúhelníku k zlatému řezu

K zajímavým vlastnostem pravidelného pětiúhelníku patří jeho vztah k zlatému řezu:

- poměr délek úhlopříčky a strany je roven zlatému řezu;
- jedna úhlopříčka protíná druhou tak, že délky vzniklých částí jsou opět v poměru zlatého řezu

2. Pravidelný šestiúhelník

<u>Definice 3:</u>

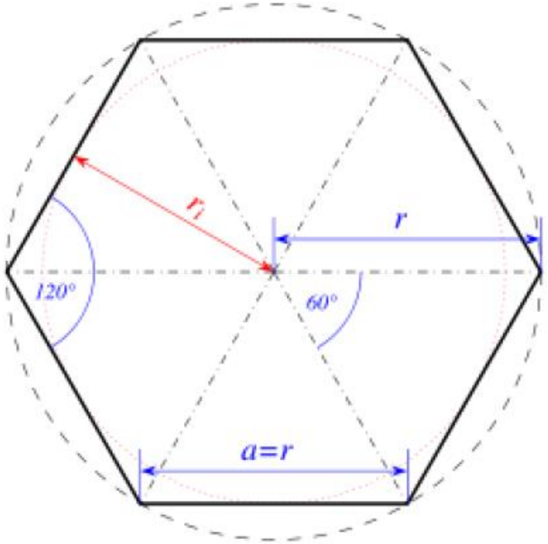
Pravidelný šestiúhelník (hexagon) je rovinný geometrický útvar (mnohoúhelník) se šesti vrcholy a se šesti stranami. Součet velikostí vnitřních úhlů pravidelného šestiúhelníku je přesně 720°, nebo-li 4π.

Vnitřní úhly pravidelného šestiúhelníku (všechny strany a úhly jsou si rovné) mají velikost 120°.
Stejně jako čtverce a rovnostranné trojúhelníky, lze i šestiúhelníky poskládat vedle sebe bez mezer tak, že zcela zaplní rovinu. Tímto způsobem jsou vytvářeny např. včelí plástve.

Konstrukce pravidelného šestiúhelníku

Pravidelný šestiúhelník sestrojíme euklidovskou konstrukcí následovně, tj. sestrojíme:

1. kružnici $k(S,r)$;
2. úsečku délky r naneseme 6x za sebou jako tětivu kružnice *k* s daným poloměrem r;
3. krajní body tětiv jsou vrcholy pravidelného šestiúhelníku.



Základní vlastnosti pravidelného šestiúhelníku

- **Obvod pravidelného šestiúhelníku**

  Obvod o pravidelného šestiúhelníku je roven $o = 6r = 6a$.

- **Obsah pravidelného šestiúhelníku**

  Obsah S pravidelného šestiúhelníku je roven $S = \frac{3}{2}a^2 cotg\,\frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \cong 2{,}59808a^2$.

- **Poloměr kružnice pravidelnému šestiúhelníku vepsané**

  Poloměr kružnice pravidelnému šestiúhelníku vepsané je $\rho_n = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

3. Pravidelný sedmiúhelník

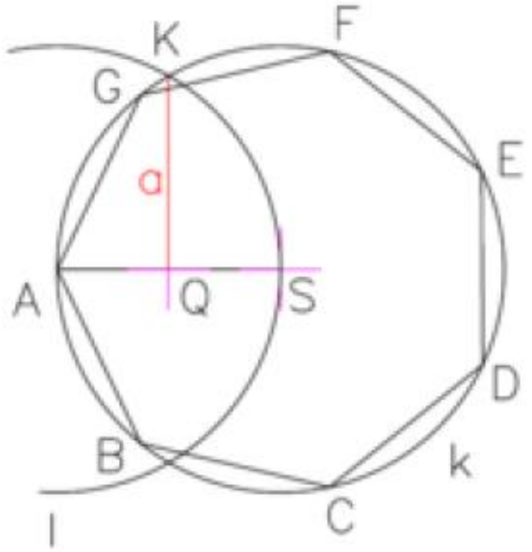
Definice 4:
Pravidelný sedmiúhelník je rovinný geometrický útvar (mnohoúhelník) se sedmi vrcholy a se sedmi stranami. Jeho vrcholy leží na obvodu opsané kružnice a strany jsou tečnami (tangentami) kružnice vepsané.

Součet velikostí vnitřních úhlů pravidelného konvexního sedmiúhelníku je přesně 900°, nebo-li 5π.

Pravidelný sedmiúhelník je složen ze sedmi shodných rovnoramenných trojúhelníků, jejichž úhly při základně mají velikost $\frac{5\pi}{17}$ a při vrcholu $\frac{2\pi}{7}$.

Konstrukce pravidelného sedmiúhelníku:
Konstrukce pravidelného sedmiúhelníku za použití kružítka a pravítka je pouze **přibližná**.

1. způsob:
Pravidelný sedmiúhelník sestrojíme euklidovskou konstrukcí přibližně a to následovně.
Sestrojíme:
1) kružnici $k(S, r = |SA|)$;
2) bod Q, který je středem úsečky AS;
3) kružnici $l(A, r = |SA|)$;
4) bod K jako jeden z průsečíků kružnic k a l;
5) velikost úsečky $a = |KQ|$ je délka strany pravidelného sedmiúhelníku



2. způsob:

Chceme-li **vepsat pravidelný sedmiúhelník** do kružnice *k* (*S*, *r*), můžeme jako délku jeho strany považovat výšku *v* rovnostranného trojúhelníku o straně *r*. Na dané kružnici *k* zvolíme jeden bod jako bod *A* a zbylé vrcholy pravidelného sedmiúhelníku získáme postupným nanášením tětiv délky *v* na kružnici *k*.
Pro zvýšení přesnosti naneseme délku *v* tětivy na kružnici 3x ve směru a 3x proti směru hodinových ručiček od bodu *A*. Straně pravidelného sedmiúhelníku odpovídá středový úhel $\frac{360°}{7} = 51{,}42°$, získaný sedmiúhelník má 7 stran délky $v = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Základní vlastnosti pravidelného sedmiúhelníku

- **Obvod pravidelného sedmiúhelníku**
  Obvod o pravidelného sedmiúhelníku je roven $o \ = \ 7a$, kde a je délka strany pravidelného sedmiúhelníku.
- **Obsah pravidelného sedmiúhelníku**
  Obsah S pravidelného sedmiúhelníku je roven $S = \frac{7}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{7}$, kde r je poloměr kružnice opsané pravidelnému sedmiúhelníku a a je délka jeho strany.
- **Minimální průměr**
  Minimální průměr kružnice pravidelnému sedmiúhelníku opsané je $d = 2\sqrt{r^2 - a^2}$, kde r je poloměr kružnice opsané pravidelnému sedmiúhelníku a a je délka jeho strany.

4. Pravidelný osmiúhelník

Definice 5:

Pravidelný osmiúhelník je rovinný geometrický útvar (mnohoúhelník) s osmi vrcholy a s osmi stranami. Součet velikostí vnitřních úhlů pravidelného konvexního osmiúhelníku je přesně 1080°, v obloukové míře 6π.

Pravidelný osmiúhelník je složen z osmi shodných rovnoramenných trojúhelníků, jejichž úhly při základně mají velikost $3\pi/8$ a při vrcholu $\frac{\pi}{4}$.

Konstrukce pravidelného osmiúhelníku

Konstrukci pravidelného osmiúhelníku pomocí kružítka a pravítka lze provést v 18 krocích.

Základní vlastnosti pravidelného osmiúhelníku:

- **Obvod pravidelného osmiúhelníku**
  Obvod o pravidelného osmiúhelníku je $o = 8a$, kde a je délka strany pravidelného osmiúhelníku.
- **Obsah pravidelného osmiúhelníku**
  Obsah S pravidelného osmiúhelníku je $S = 2r^2\sqrt{2}$, kde r je poloměr kružnice opsané pravidelnému osmiúhelníku a a je délka jeho strany.
- **Minimální průměr**
  Minimální průměr kružnice pravidelnému osmiúhelníku opsané je $d = 2\sqrt{r^2 - a^2}$, kde r je poloměr kružnice opsané pravidelnému osmiúhelníku a a je délka jeho strany.

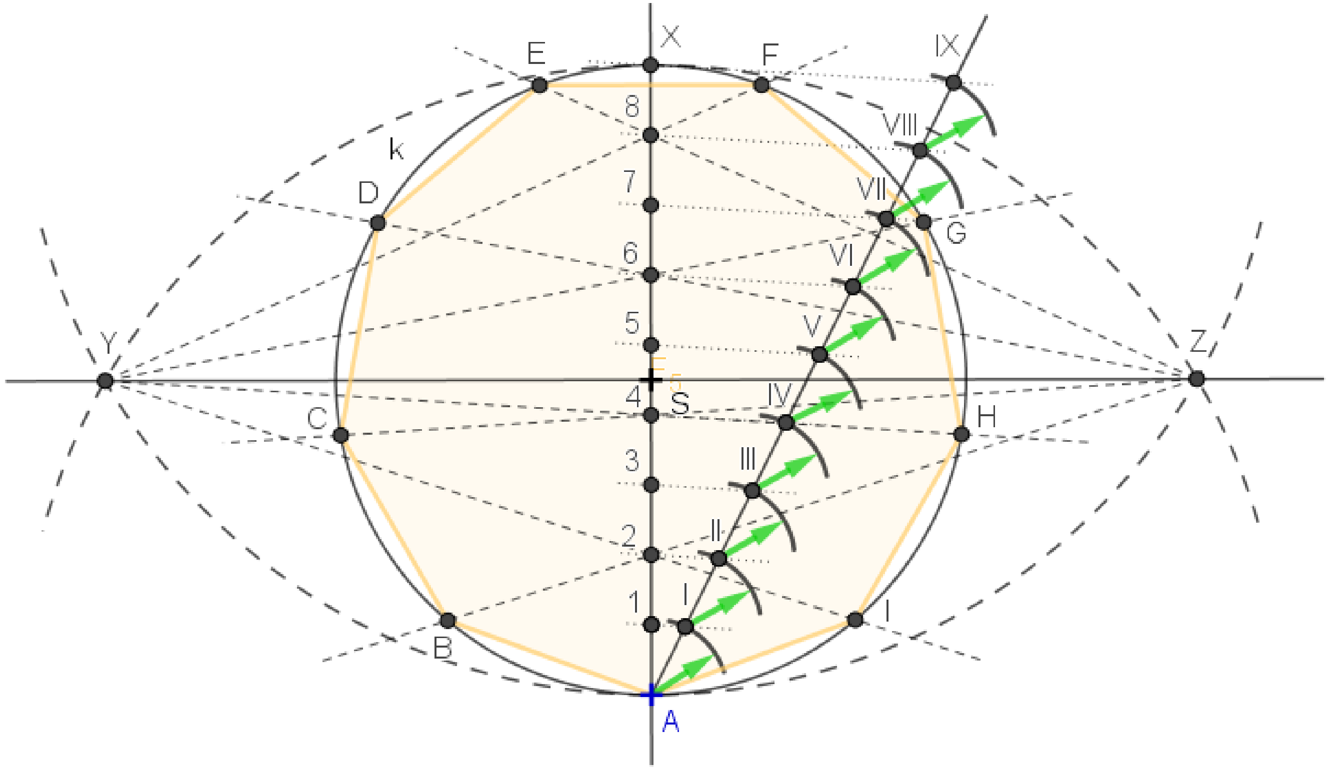
5. Pravidelný devítiúhelník

Pravidelný devítiúhelník je rovinný geometrický útvar (mnohoúhelník) s devíti vrcholy, devíti stranami a 27 úhlopříčkami.

Součet velikostí vnitřních úhlů pravidelného konvexního devítiúhelníku je 1260° ($7\pi\ rad$).

Pravidelný devítiúhelník je složen z devíti shodných rovnoramenných trojúhelníků, jejichž úhly při základně mají velikost $\frac{7\pi}{9}$ a při vrcholu $\frac{2\pi}{9}$.

Konstrukce pravidelného devítiúhelníku:



6. Pravidelný desetiúhelník

Definice 6:

Pravidelný desetiúhelník je rovinný geometrický útvar (mnohoúhelník) s deseti vrcholy, s deseti stranami a s 35 úhlopříčkami. Součet velikostí vnitřních úhlů pravidelného konvexního desetiúhelníku je přesně 1440°, v obloukové míře 8π. Pravidelný desetiúhelník je složen z deseti shodných rovnoramenných trojúhelníků, jejichž úhly při základně mají velikost $\frac{2\pi}{5}$ a při vrcholu $\frac{\pi}{5}$.

Konstrukce pravidelného desetiúhelníku

Vrcholy pravidelného desetiúhelníku vzniknou jako průsečíky os stran pravidelného pětiúhelníku s kružnicí pravidelnému pětiúhelníku opsanou. Ty pak spolu s vrcholy pravidelného pětiúhelníku tvoří vrcholy pravidelného desetiúhelníku.

Základní vlastnosti pravidelného desetiúhelníku

- **Obvod pravidelného desetiúhelníku**
  Obvod *o* pravidelného desetiúhelníku je $o = 10a$, kde *a* je délka strany pravidelného desetiúhelníku.
- **Obsah pravidelného desetiúhelníku**
  Obsah S pravidelného desetiúhelníku je $S = 5r^2 \sin\frac{\pi}{5}$, kde *r* je poloměr kružnice opsané pravidelnému desetiúhelníku a a je délka jeho strany.
- **Minimální průměr**
  Minimální průměr kružnice pravidelnému desetiúhelníku opsané je $d = 2\sqrt{r^2 - a^2}$, kde r je poloměr kružnice opsané pravidelnému desetiúhelníku a a je délka jeho strany.

7. Pravidelný dvanáctiúhelník

Definice 7:

Pravidelný dvanáctiúhelník je rovinný geometrický útvar (mnohoúhelník) s dvanácti vrcholy a s dvanácti stranami.

Součet velikostí vnitřních úhlů pravidelného konvexního dvanáctiúhelníku je přesně 1800°, v obloukové míře 10π.

Pravidelný dvanáctiúhelník je složen z dvanácti shodných rovnoramenných trojúhelníků, jejichž úhly při základně mají velikost $\frac{5\pi}{12}$ a při vrcholu $\frac{\pi}{6}$.

Konstrukce pravidelného dvanáctiúhelníku

Konstrukci pravidelného dvanáctiúhelníku lze pomocí pravítka a kružítka provést ve 23 krocích.

Základní vlastnosti pravidelného dvanáctiúhelníku

- **Obvod pravidelného dvanáctiúhelníku**
  Obvod o pravidelného dvanáctiúhelníku je $o = 12a$, kde a je délka strany pravidelného dvanáctiúhelníku.
- **Obsah pravidelného dvanáctiúhelníku**
  Obsah S pravidelného dvanáctiúhelníku je $S = 3a^2 cotg\frac{\pi}{12} = 3(2+\sqrt{3})a^2 \cong 11{,}19615242a^2$, kde a je délka strany pravidelného dvanáctiúhelníku.

8. Pravidelný patnáctiúhelník

Definice 8:

Pravidelný patnáctiúhelník je rovinný geometrický útvar (mnohoúhelník) s patnácti vrcholy a s patnácti stranami.

Součet velikostí vnitřních úhlů pravidelného konvexního patnáctiúhelníku je přesně 2340°, v obloukové míře 13π.

Konstrukce pravidelného patnáctiúhelníku

Konstrukci pravidelného patnáctiúhelníku lze pomocí pravítka a kružítka provést ve 36 krocích.

Základní vlastnosti pravidelného patnáctiúhelníku

- **Obvod pravidelného patnáctiúhelníku**

  Obvod o pravidelného patnáctiúhelníku je $o = 15a$, kde a je délka strany pravidelného patnáctiúhelníku.

- **Obsah pravidelného patnáctiúhelníku**

  Obsah S pravidelného patnáctiúhelníku je

$$S = \frac{15}{4}a^2 cotg\frac{\pi}{15} = \frac{15}{8}a^2\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}\right) \cong 17{,}642a^2,$$

  kde a je délka strany pravidelného patnáctiúhelníku.

9. Pravidelný šestnáctiúhelník

Definice 9:

Pravidelný šestnáctiúhelník je rovinný geometrický útvar (mnohoúhelník) s šestnácti vrcholy a s šestnácti stranami.

Součet velikostí vnitřních úhlů pravidelného konvexního šestnáctiúhelníku je přesně 2520°, v obloukové míře 14π.

Konstrukce pravidelného šestnáctiúhelníku

Pravidelný šestnáctiúhelník lze sestrojit pomocí pravítka a kružítka.

Základní vlastnosti pravidelného šestnáctiúhelníku

- **Obvod pravidelného šestnáctiúhelníku**
  Obvod o pravidelného šestnáctiúhelníku je $o = 16a$, kde a je délka strany pravidelného šestnáctiúhelníku.
- **Obsah pravidelného šestnáctiúhelníku**
  Obsah S pravidelného šestnáctiúhelníku je
  $$S = 4a^2 cotg\frac{\pi}{16} = 4a^2(\sqrt{2}+1)\left(\sqrt{4-2\sqrt{2}}+1\right),$$
  kde a je délka strany pravidelného šestnáctiúhelníku.

10. Pravidelný sedmnáctiúhelník

Definice 10:

Pravidelný sedmnáctiúhelník je rovinný geometrický útvar (mnohoúhelník) se sedmnácti vrcholy a se sedmnácti stranami.

Konstrukce pravidelného sedmnáctiúhelníku

K. F. Gauss dokázal, že lze pravidelný sedmnáctiúhelník sestrojit eukleidovsky, tedy pouze kružítkem a pravítkem. Délka jeho strany je kořenem rovnice 17. stupně, kterou lze odvodit pomocí součtových vzorců.

Konstrukce pravidelného sedmnáctiúhelníku byla provedena britským učitelem **Herbertem Williamem Richmondem** na univerzitě v Cambridge roku 1893.

Popis konstrukce pravidelného sedmnáctiúhelníku

Sestrojíme

1. kružnici $k(O, r)$,
2. libovolný průměr kružnice k,
3. průsečík P_1 daného průměru a kružnice k,
4. kolmici na OP_1 vedenou bodem O,
5. bod B jako průsečík kolmice vedené bodem O na OP_1 a kružnice k,
6. bod J na úsečce OB tak, že $|OJ| = \frac{1}{4}|OB|$,
7. úsečka JP_1,
8. bod E na úsečce OP_1 tak, aby $|\measuredangle OJE| = \frac{1}{4}|\measuredangle OJP_1|$,
9. na přímce OP_1 bod F tak, aby $|\measuredangle EJF| = 45°$,
10. půlkružnici nad průměrem FP_1,
11. průsečík K půlkružnice a úsečky OB,
12. půlkružnici se středem E a poloměrem EK,
13. průsečík N_4 půlkružnice se středem E a poloměrem $|EK|$ a úsečky OP_1,
14. kolmici na úsečku OP_1 procházející bodem N_4,
15. průsečík P_4 kolmice na úsečku OP_1 procházející bodem N_4 a kružnice k,
16. pravidelný sedmnáctiúhelník pomocí vrcholů P_1, P_4.