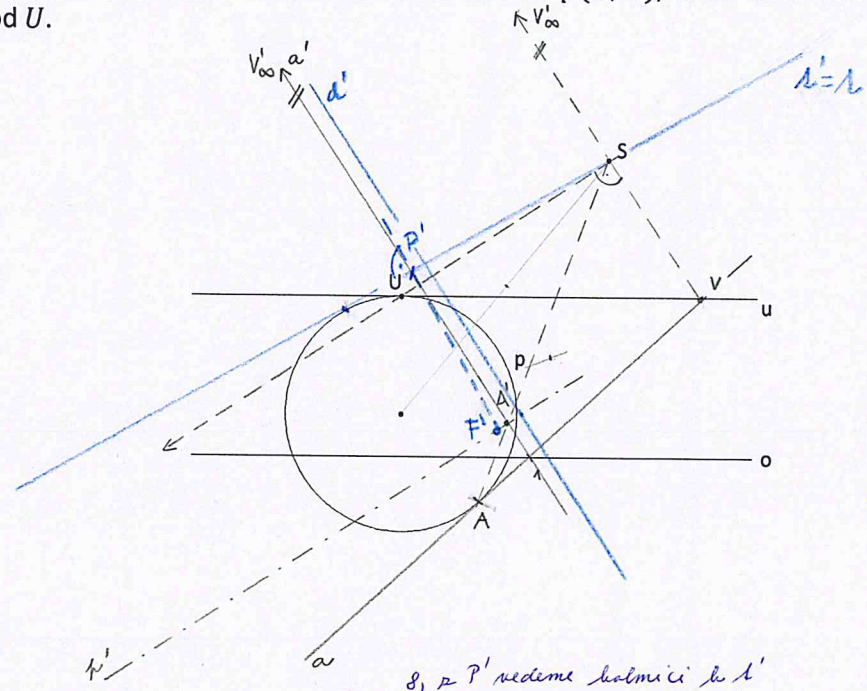
Geometrie 1

CVIČENÍ

Zobrazení kuželoseček pomocí kolineace

Úlohy k řešení:

1. V kolineaci $K(S, o, u)$ sestrojte kolineární obraz kružnice $p(O;\ r)$, která má s úběžnicí právě jeden společný bod U.



1, SU
2, kolmice k SV v S →
→ protne úběž. u v V

2, a = tečna k p z t. V
– obraz vrcholové tečny
– A (bod dotyku) – obraz vrcholu paraboly

3, $a \cap o = 1$

4, $a' \ni 1 \wedge a' \parallel SV(V'_\infty)$
... vrcholová tečna par.

5, $A' = SA \cap a'$ ... vrchol paraboly

6, tečna z S k p
→ $s = s'$ (splší samodr.)
→ tečna k parabole

7, $a' \cap s' = P'$ ... pata kolmice spuštěné z ohniska k tečně

8, z P' vedeme kolmici k s'
– protne osu paraboly p' v ohnisku F'

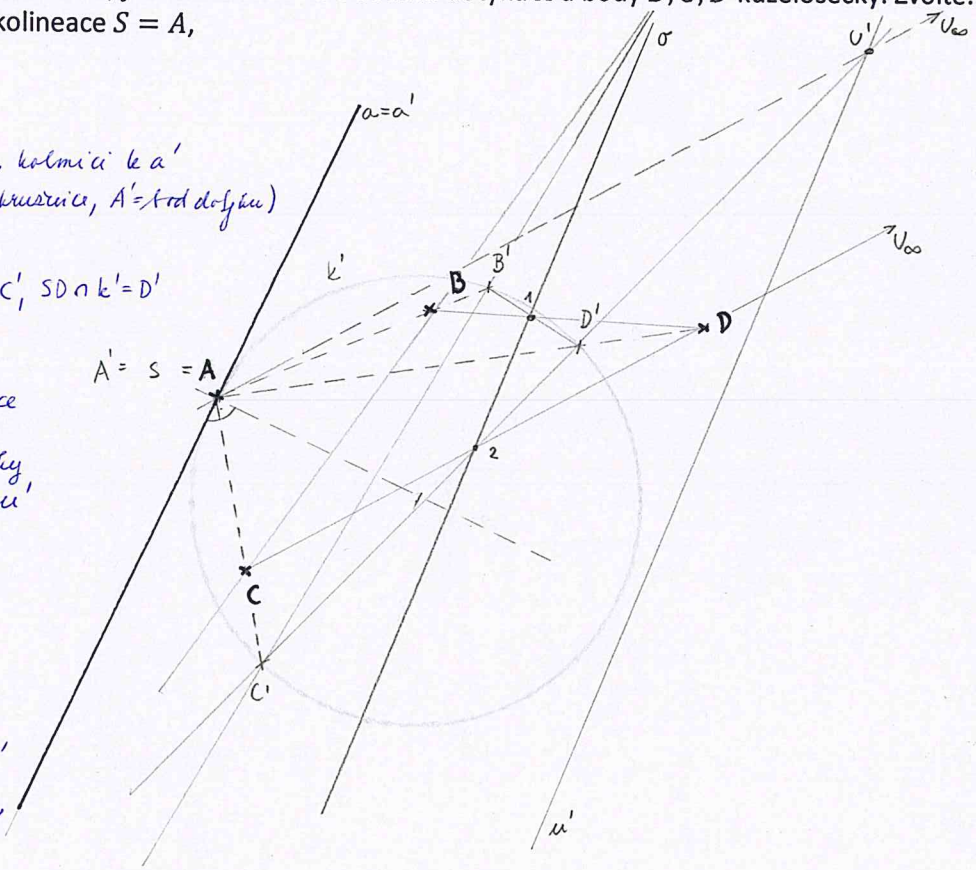
2. Sestrojte kuželosečku, je-li dána tečna a s bodem dotyku A a body B, C, D kuželosečky. Zvolte:
   a) střed kolineace $S = A$,

1, $S = A \Rightarrow A = A',\ a = a'$
2, kružnice k' má střed na kolmici k a'
v bodě A' (a' = tečna kružnice, A' = bod dotyku)
– poloměr libovolný
3, $SB \cap k' = B',\ SC \cap k' = C',\ SD \cap k' = D'$
4, $BD \cap B'D' = 1,\ CD \cap C'D' = 2$
5, $12 = o$ ... osa kolineace

k určení typu kuželosečky musí určit úběžnici u'
→ tedy hledáme U'

6, zvolíme $U_\infty \in CD$
7, $SU_\infty \cap C'D' = U'$
8, $u' \parallel o \wedge U' \in u'$

u' neprotne kružnici k'
⇒ výsledná kuželosečka je elipsa



b) osu kolineace $o = BC$.

1, $o = BC \Rightarrow B = B', C = C'$
(B', C' – body na kružnici k')

2, kružnice má střed na ose úsečky $B'C'$, poloměr libovolný

3, $a \cap o = 1$

4, a' – tečna ke kružnici z bodu 1
(A'... bod dotyku)

5, $AD \cap o = 2$

6, $2A' \cap k' = D$

7, $DD' \cap AA' = S$

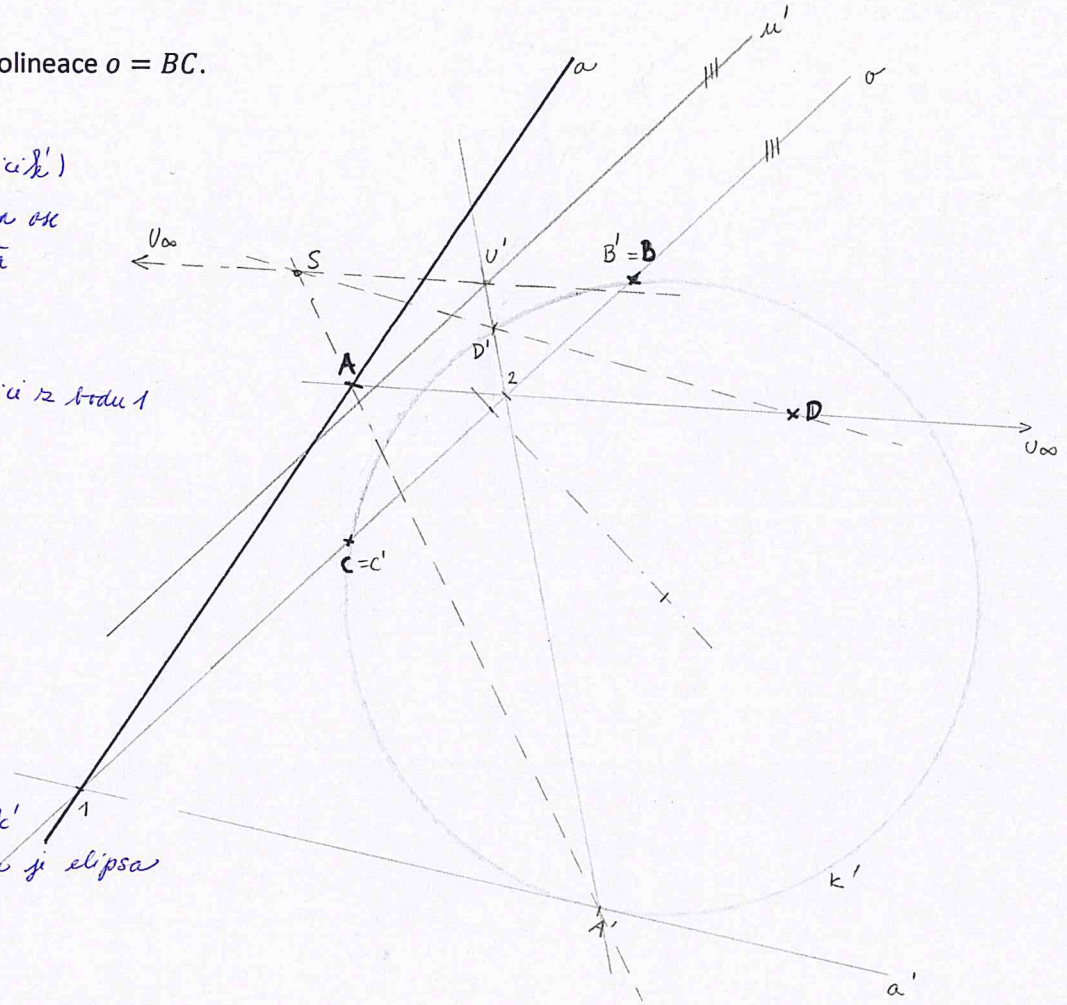
hledáme u' (U'):

8, $U_\infty \in AD$

9, $SU_\infty \cap A'D' = U'$

10, $u' \parallel o \wedge U' \in u'$

u' – neprotíná kružnici k'
$\Rightarrow$ výsledná kuželosečka je elipsa



3. Sestrojte parabolu, jsou-li dány dvě tečny s dotykovými body $U_\infty \in u_\infty$, $A \in a$ a bod C.

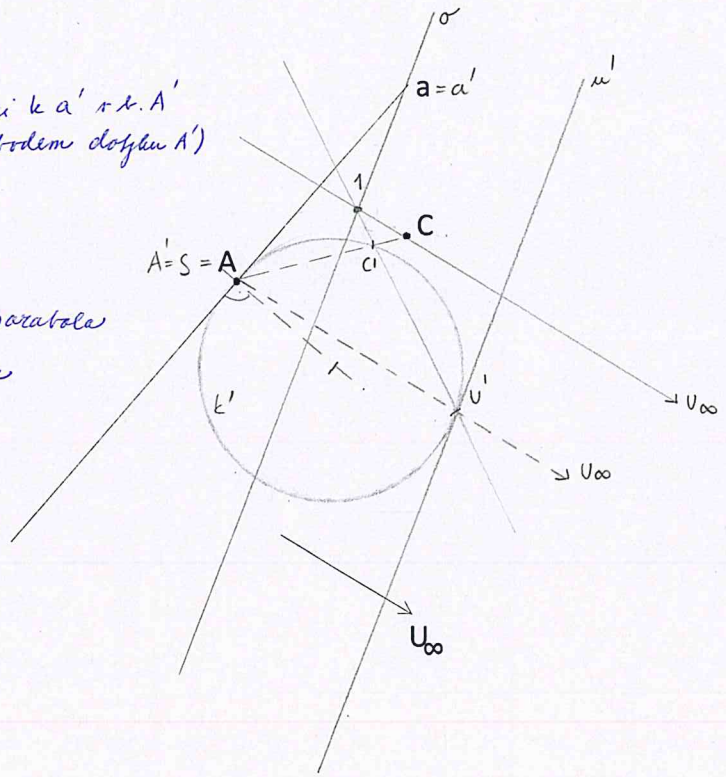
1, zvolíme střed nebo osu kolineace
např. $S = A \Rightarrow A = A', a = a'$

2, kružnice k' má střed na kolmici k a' v b. A'
(protože a' je tečna kružnice s bodem dotyku A')
– poloměr libovolný

3, $SC \cap k' = C'$
$SU_\infty \cap k' = U'$

4, výsledná kuželosečka má být parabola
$\Rightarrow$ úběžnice u' musí být tečnou kružnice v b. U'

5, hledáme osu kolineace o:
- $C'U' \cap CU_\infty = 1$ (samodr. bod)
- $o \parallel u' \wedge 1 \in o$



4. Sestrojte parabolu, jsou-li dány dvě tečny t, u_∞ (nevlastní přímka) a tři body A, B, C.

1, zvolíme si střed nebo osu kolineace
např. $o = AB$
$\Rightarrow A = A', B = B'$ (A', B'... body na kružnici)

2, kružnice k' má střed na ose $A'B'$
(poloměr libovolný)

3, $t \cap o = 1$

4, t' - tečna ke k' z bodu 1
(2 možnosti)

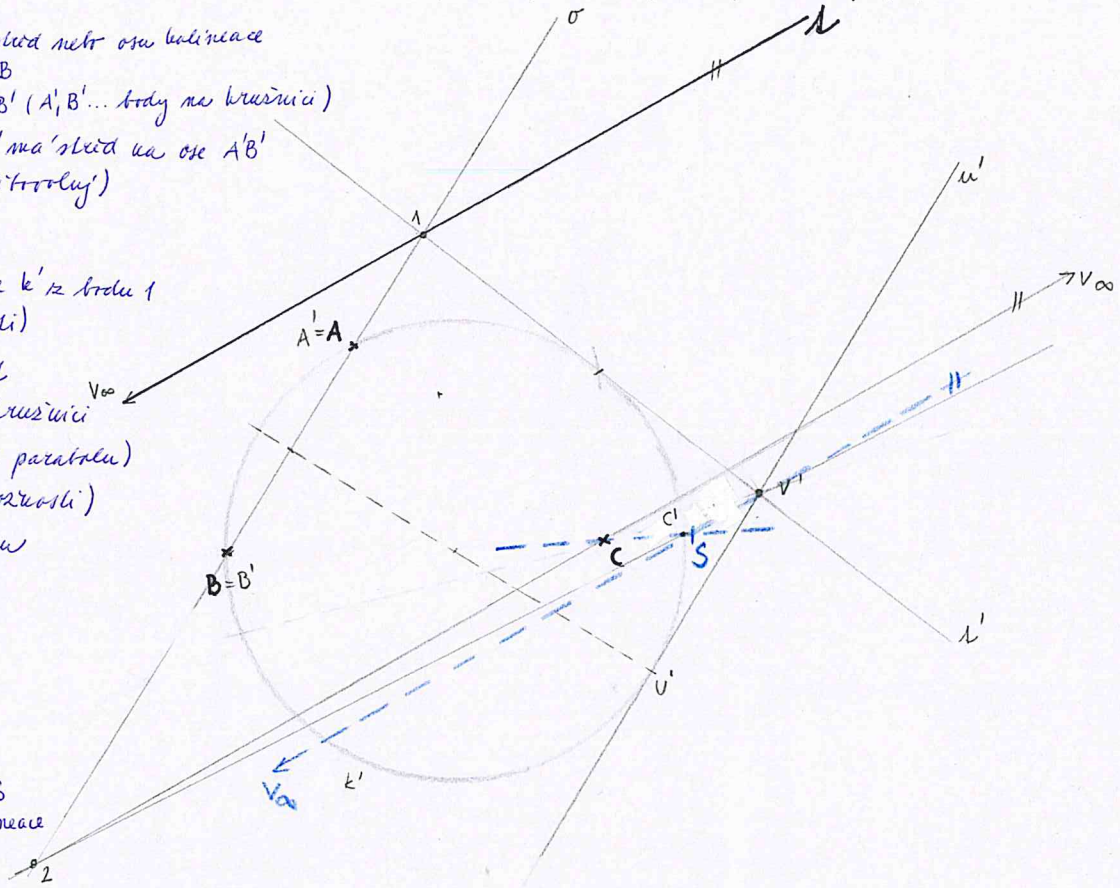
5, u' musí být tečnou ke kružnici
(- sestrojujeme parabolu)
$u' \parallel o$ (2 možnosti)
V'... bod dotyku

6, $V' = t' \cap u'$
$V_\infty = t \cap u_\infty$

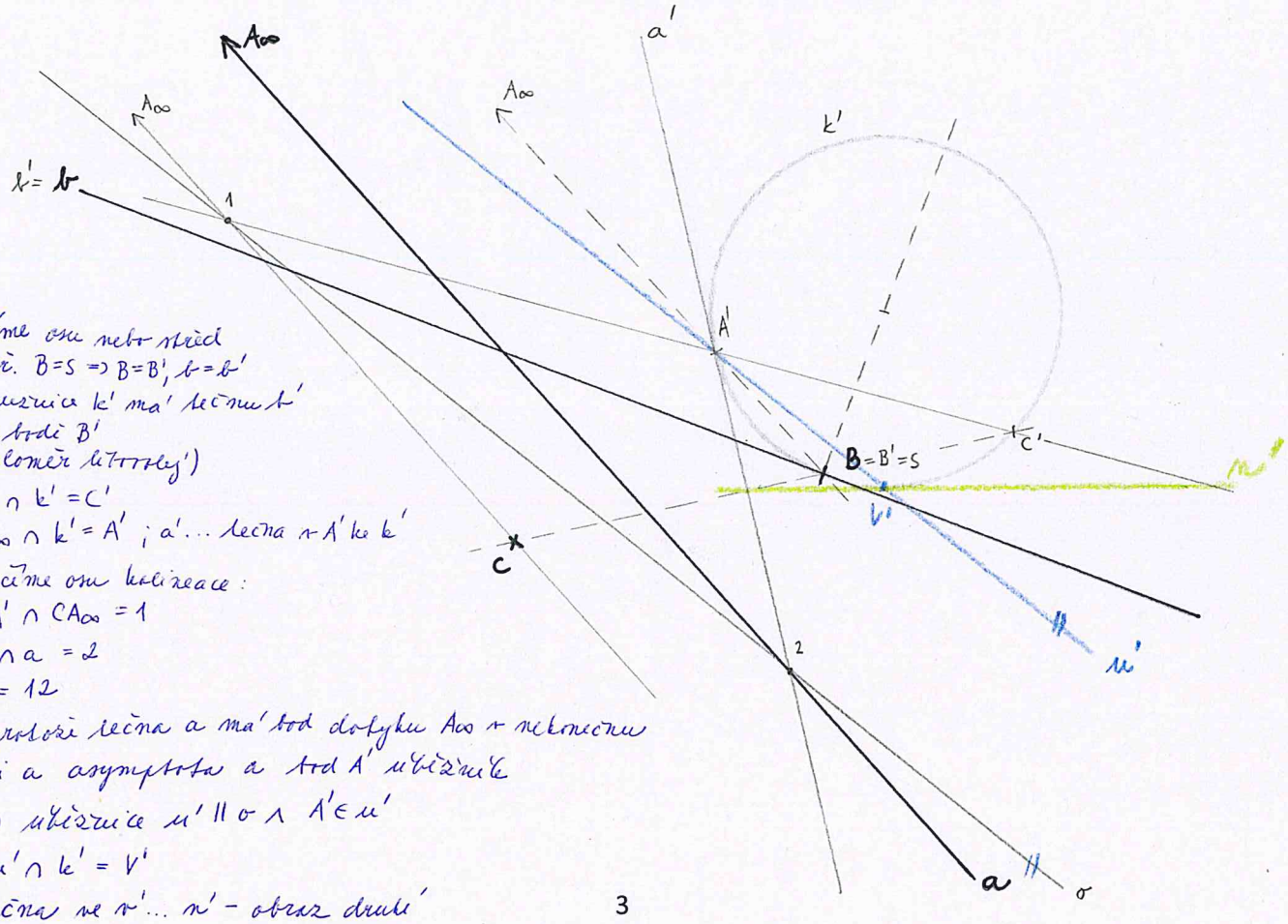
7, $CV_\infty \cap o = 2$

8, $2V' \cap k' = C'$
(2 možnosti)

9, $CC' \cap V'V_\infty = S$
... střed kolineace



5. Sestrojte hyperbolu, jsou-li dány dvě tečny s body dotyku $A_\infty \in a, B \in b$ a bod C.



1, zvolíme osu nebo střed
např. $B = S \Rightarrow B = B', b = b'$
$\rightarrow$ kružnice k' má tečnu b'
v bodě B'
(poloměr libovolný)

2, $SC \cap k' = C'$
$SA_\infty \cap k' = A'$; a'... tečna v A' ke k'

3, určíme osu kolineace:
$C'A' \cap CA_\infty = 1$
$a' \cap a = 2$
$o = 12$

4, protože tečna a má bod dotyku A_∞ v nekonečnu
je a asymptota a bod A' ubíhá
$\Rightarrow$ ubíhá $u' \parallel o \wedge A' \in u'$

5, $u' \cap k' = V'$

6, tečna ve V'... v' - obraz druhé asymptoty

6. Sestrojte parabolu, jsou-li dány dvě tečny a, b a tečna s bodem dotyku $C \in c$ (pozn. další tečnou je nevlastní přímka).

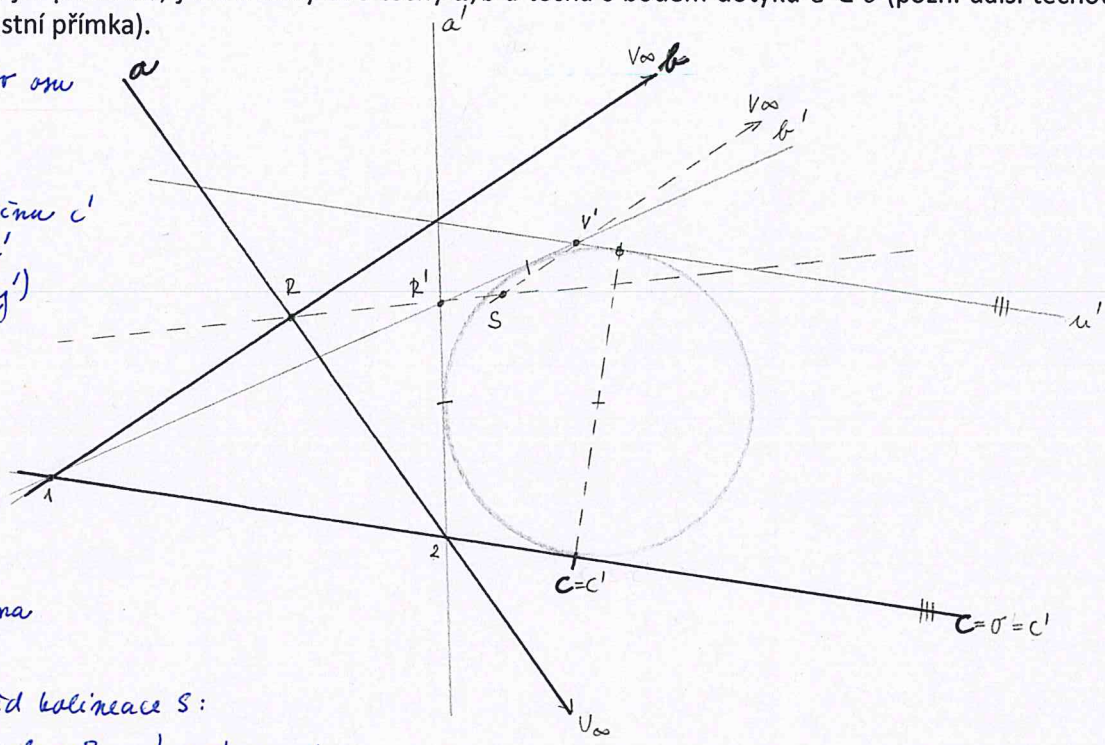
1, zvolíme střed nebo osu např $o = c \Rightarrow$
$\Rightarrow c = c', C = C' \rightarrow$
$\rightarrow$ kružnice má tečnu c' a bod dotyku C' (poloměr libovolný)

2) $o \cap a = 2$
$o \cap b = 1$

3, a' – tečna ke k' v bodě 2
b' – tečna ke k' v bodě 1

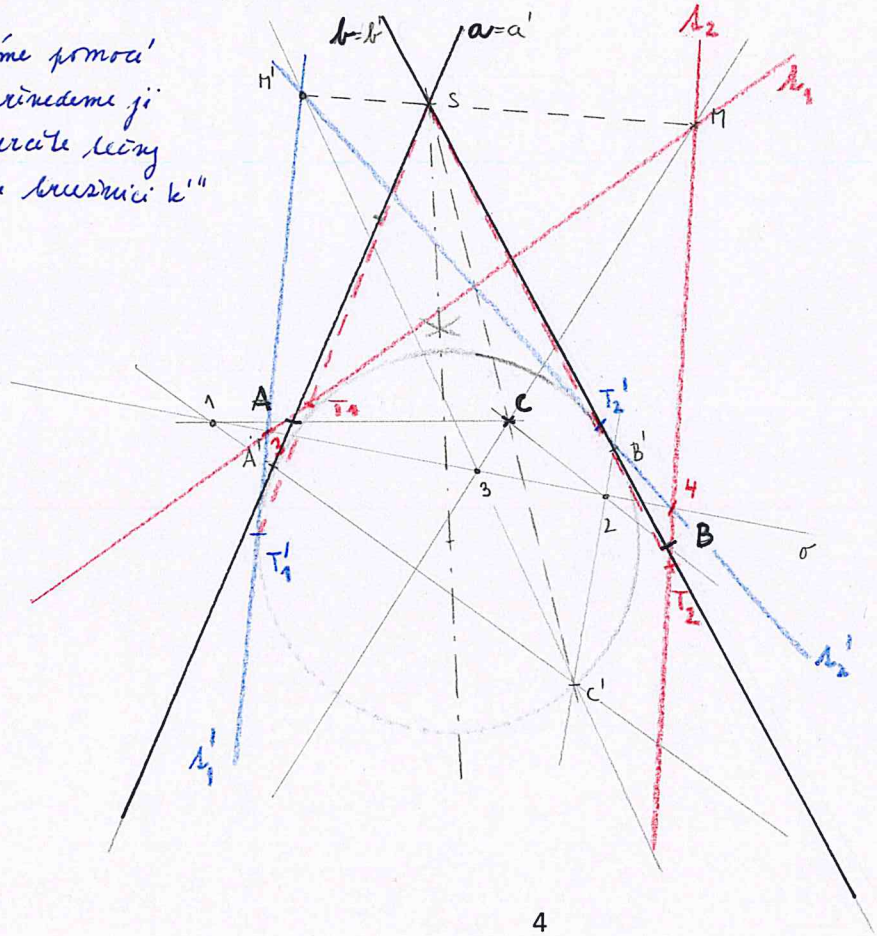
4, $u' \parallel o \wedge u'$ – tečna ke k'

5, určujeme střed kolineace S:
$a' \cap b = R'$, $a \cap b = R$
$b' \cap u' = V'$, $b \cap u_\infty = V_\infty$
$\Big\}\ RR' \cap V_\infty V' = S$



7. K dané nenarýsované kuželosečce k dané tečnou a s bodem dotyku A, tečnou b s bodem dotyku B a bodem C veďte daným bodem M tečny.

úlohu vyřešíme pomocí kolineace $\rightarrow$ převedeme ji na úlohu "určete tečny z bodu M' ke kružnici k'"



1, určíme kolineaci:
např $S = a \cap b \rightarrow$
$\rightarrow a = a', b = b'$
$\rightarrow$ střed kružnice k' na ose úhlu a', b' (poloměr libovolný)
$\rightarrow A', B'$ body dotyku na a', b'

2, $SC \cap k' = C'$ (– 2 možnosti)

3, $AC \cap A'C' = 1$, $BC \cap B'C' = 2$

4, $o = 12$

bod M převedeme v kolineaci na M':
– $MC \cap o = 3$
– $C'3 \cap SM = M'$

- sestrojíme z M' tečny ke k' $\rightarrow s_1', s_2'$ (body dotyku T_1', T_2')
- $s_1' \cap o = 3 \rightarrow 3M = s_1$
- $s_2' \cap o = 4 \rightarrow 4M = s_2$
- $ST_1' \cap s_1 = T_1$
- $ST_2' \cap s_2 = T_2$