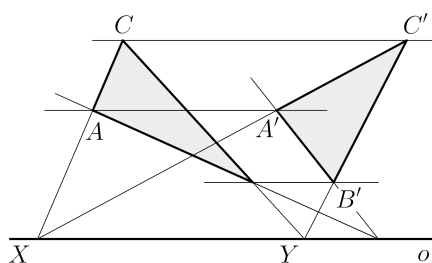
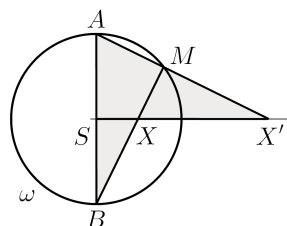
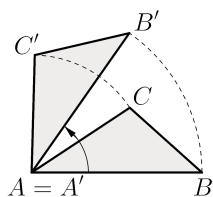


Vlasta Moravcová & Jana Hromadová

ZÁKLADY PLANIMETRIE

PRO UČITELSKÉ STUDIUM



Vydání publikace bylo podpořeno vzdělávacím projektem MŠMT Příspěvek P na podporu pedagogických studijních programů s deficitními aprobacemi, 2021.

Recenzovali: doc. RNDr. Leo Boček, CSc.

Prof. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D.

Základy planimetrie pro učitelské studium

Vlasta Moravcová, Jana Hromadová

Vydal MatfyzPress,

nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy,

Sokolovská 83, 186 75 Praha 8,

jako svou 650. publikaci (tištěná verze), 651. publikaci (e-kniha – PDF verze).

Sazba v systému L^AT_EX (Vlasta Moravcová)

Tisk Repro středisko MFF UK

Publikace byla vydána pro potřeby Katedry didaktiky matematiky MFF UK.

Nakladatelství MatfyzPress neodpovídá za kvalitu a obsah textu.

Publikace není určena k prodeji.

Praha 2021

© V. Moravcová, J. Hromadová, 2021

© MatfyzPress, nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy, 2021

ISBN 978-80-7378-456-0 (tištěná verze)

ISBN 978-80-7378-457-7 (e-kniha – PDF verze)

Obsah

Předmluva	7
1 Základní pojmy	9
1.1 Primitivní pojmy	9
1.2 Části přímky a roviny	11
1.3 Metrické pojmy	19
1.4 Úlohy	24
2 Trojúhelník	25
2.1 Základní pojmy a vlastnosti	25
2.2 Věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků	29
2.3 Klasifikace trojúhelníků	31
2.4 Významné objekty trojúhelníku	33
2.5 Kružnice ve vztahu k trojúhelníku	41
2.6 Úlohy	44
3 Kružnice, kruh	45
3.1 Základní pojmy a vlastnosti	45
3.2 Kružnice a přímka	48
3.3 Kružnicový oblouk	53
3.4 Vzájemná poloha dvou kružnic	57
3.5 Mocnost bodu ke kružnici	60
3.6 Apollóniovy úlohy	64
3.7 Úlohy	65

4	Čtyřúhelník	67
4.1	Základní pojmy a vlastnosti	67
4.2	Klasifikace čtyřúhelníků	69
4.3	Úlohy	80
5	Mnohoúhelník	81
5.1	Základní pojmy a vlastnosti	81
5.2	Pravidelný mnohoúhelník	84
5.3	Úlohy	86
6	Obvod, obsah	87
6.1	Definice obvodu a obsahu	87
6.2	Obvod mnohoúhelníku	88
6.3	Obvod kruhu a jeho částí	88
6.4	Obsah mnohoúhelníku	91
6.5	Obsah kruhu a jeho částí	99
6.6	Pýthagorova věta, Eukleidovy věty	100
6.7	Úlohy	109
7	Množiny bodů dané vlastnosti	111
7.1	Základní pojmy a množiny	111
7.2	Množina bodů, z nichž vidíme úsečku pod daným úhlem	115
7.3	Kuželosečky	119
7.4	Apollóniova kružnice	121
7.5	Úlohy	124
8	Konstrukční úlohy	125
8.1	Elementární eukleidovské konstrukce	125
8.2	Přibližné konstrukce neřešitelných úloh	131
8.3	Užití algebraické metody	133
8.4	Zlatý řez	136
8.5	Klasifikace konstrukcí geometrických obrazců	140
8.6	Geometrické obrazce zadané bez parametru	142

8.7	Geometrické obrazce zadané s parametrem/ y	149
8.8	Úlohy	151
9	Shodnosti	153
9.1	Základní pojmy a vlastnosti	153
9.2	Osová souměrnost	154
9.3	Středová souměrnost	157
9.4	Posunutí	158
9.5	Otočení	160
9.6	Identita	163
9.7	Přímá a nepřímá shodnost	163
9.8	Skládání shodností	164
9.9	Úlohy	172
10	Podobnosti	175
10.1	Základní pojmy a vlastnosti	175
10.2	Stejnolehlost	176
10.3	Stejnolehlost kružnic	180
10.4	Aplikace stejnolehlosti v důkazech planimetrických vět	182
10.5	Úlohy	187
11	Osová afinita	189
11.1	Základní pojmy a vlastnosti	189
11.2	Typy osových afinit	192
11.3	Úlohy	196
12	Kruhová inverze	197
12.1	Základní pojmy a vlastnosti	197
12.2	Kruhové křivky	201
12.3	Aplikace kruhové inverze	208
12.4	Úlohy	210
13	Axiomatika planimetrie	211
13.1	Axiomatický systém	211
13.2	Hilbertův axiomatický systém	212

13.3	Axiomy incidence	213
13.4	Axiomy uspořádaní	215
13.5	Axiomy shodnosti	222
13.6	Axiomy spojitosti	229
13.7	Axiom rovnoběžnosti	230
13.8	Absolutní geometrie	232
13.9	Úlohy	233
Závěr		235
Použité značení		237
Seznam zkratk		239
Citovaná literatura		240
Další literatura		241
Rejstřík		242

Předmluva

Tento učební text vznikl jako podpůrný materiál k předmětu *Základy planimetrie* vyučovanému v prvním ročníku učitelského studia na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy. Předlohou k němu byly provizorně sepsané přednášky z akademického roku 2019/2020 z doby prvního lockdownu kvůli pandemii covid-19. Jak název předmětu napovídá, v práci se věnujeme planimetrii, tedy části matematiky studující geometrické útvary v rovině.

První zkušenosti s geometrií lidé získávali na základě zkušeností. První krok od empirických poznatků k deduktivně budované teorii učinili matematici antického Řecka. Mnohá antická díla dnes však známe jen díky arabským překladům sepsaným v období středověku. V novověku postupně vznikaly a dále se rozvíjely jednotlivé oblasti geometrie jako geometrie analytická, projektivní, deskriptivní či neeuclidovská. Až na přelomu 19. a 20. století byla vybudována přesná axiomatika geometrie, v téže době také začaly být geometrické transformace vnímány z pohledu teorie grup.¹

Cílem předmětu *Základy planimetrie* je zopakovat, doplnit a rozšířit středoškolské znalosti v oblasti planimetrie. Na základě několikaletých zkušeností s výukou tohoto předmětu nezačínáme výkladem axiomatického systému, neboť to řadu studentů od předmětu odrazovalo, nýbrž budujeme jednotlivá témata v duchu střední školy. Přesto se snažíme najít kompromis mezi naivním školským a precizním axiomatickým přístupem. V práci je proto kladen důraz na logickou výstavbu, co nejpřesnější definování nových pojmů a co možná nejexaktnější provedení důkazů matematických vět tak, aby byly stále pokud možno srozumitelné a přehledné.

V první kapitole jsou zavedeny vybrané elementární planimetrické pojmy a dále v první a částečně ve druhé kapitole jsou bez důkazu zformulována tvrzení, jejichž platnost je na jednu stranu evidentní, na stranu druhou důkaz lze jen těžko provést právě bez zavedení axiomatického systému. V kapitolách 2 až 5 se podrobně věnujeme vlastnostem rovinných geometrických útvarů, konkrétně trojúhelníku, kružnici a kruhu, čtyřúhelníku a dalším mnohoúhelníkům. Kapitola 6 je věnována obvodům a obsahům geometrických obrazců. V kapitole 7 jsou představeny množiny bodů daných vlastností, kapitola 8 je věnována různým konstrukčním úlohám. Kapitoly 9 až 12 jsou zaměřeny na geometrické transformace v rovině, konkrétně shodnosti, podobnosti, osovou afinitu a kruhovou inverzi. Konečně poslední, 13. kapitola nastiňuje pohled na geometrii skrze

¹O historii geometrie více viz např. (Bečvář, 1993; Čížmár, 2020; Nový a kol., 1961; Schreiber & Scriba, 2001) aj.

axiomatický systém a naznačuje, jak budovat planimetrii precizněji z pohledu vysokoškolské matematiky.

Každá kapitola je zakončena zadáními několika úloh, na nichž lze dané téma procvičit. Úlohy byly, stejně jako výkladová část, čerpány především z vlastních, za léta sestřádaných zdrojů a ve většině případů je obtížné až nemožné určit a citovat původní zdroj. Přímo v textu proto literaturu necitujeme, vyjma situací, kde chceme čtenáře odkázat na další informace k nějakému konkrétnímu problému. Za veškerou literaturu použitou k přípravám přednášek a sepsání této práce zmiňme publikace, jimiž bylo listováno nejčastěji: (Lávička, 2007; Pomykalová, 2001; Švrček & Vanžura, 1988; Blažek, 1997; Boček & Zhouf, 2009). Seznam literatury sestává pak ze dvou částí – ze seznamu citované literatury a ze seznamu další doporučené literatury.

Pro základní orientaci v textu poznamenejme, že *definice* či zavedení významných pojmů uvádíme v rámečcích, *obrázky*, *věty*, *číslované vztahy*, *vzorové příklady* i *úlohy* číslujeme číslem kapitoly a pořadovým číslem v rámci každé kapitoly a *důkazy* vět ukončujeme symbolem \square . Doplnující, často však zásadní informace uvádíme průběžně jako *poznámky*.

Použitá symbolika vychází z v době vydání práce aktuální normy ČSN EN ISO 80000-2 s ohledem na obvyklé značení užívané na středních školách. Text byl připraven systémem L^AT_EX, obrázky byly vytvořeny a upraveny v různých verzích programů GeoGebra a Gimp.

Děkujeme našim rodinám za pochopení a morální podporu při přípravě této práce, dále studentům za zpětnou vazbu na první verzi sepsaných přednášek a v neposlední řadě recenzentům za pečlivé pročtení a cenné rady.

Autorky

Kapitola 1

Základní pojmy

V této kapitole zavedeme nejzákladnější pojmy syntetické rovinné geometrie a pomocí nich nadefinujeme další geometrické objekty, kterým se budeme podrobněji věnovat v dalších kapitolách. Těž vyslovíme několik elementárních tvrzení, která však nelze triviálně na základě školských znalostí dokázat, jejich platnost je však ze zkušenosti evidentní. Taková tvrzení značíme jako ZT (základní tvrzení). Důkazům alespoň některých z nich se budeme věnovat v poslední kapitole.

1.1 Primitivní pojmy

Pojmy *bod*, *přímka* a *rovina* nelze v syntetické geometrii exaktně definovat. Patří mezi tzv. *primitivní pojmy*. Představu o nich si tvoříme na základě zkušeností, na základě modelů těchto objektů a jejich vlastností. Jednotlivé body značíme v této práci velkými písmeny, přímky malými písmeny latinské abecedy a symbolem \longleftrightarrow .¹

Vztahy mezi geometrickými objekty popisujeme za užití dalších primitivních pojmů – *incidence*, *uspořádání*, *shodnosti* a *spojitosti*. Incidence je jen jiný, univerzálnější výraz pro vztahy náležet, být částí, obsahovat.² S uspořádáním pra-

¹V tomto textu v zájmu přehlednosti symbol \longleftrightarrow ve spojení s malým písmenem pro označení přímky používáme jen tam, kde by jinak mohlo dojít k nedorozumění.

²Řekneme-li, že „bod je incidentní s přímkou“, znamená to, že na ní leží. V téže situaci lze také říci, že „přímka je incidentní s bodem“ (ve smyslu „přímka prochází bodem“; nikoliv však, že „přímka leží v bodě“). Analogicky lze říci, že „přímka je incidentní s rovinou“ atd.

ujeme intuitivně například ve chvíli, kdy řekneme, že nějaký „bod leží mezi jinými dvěma body“, přičemž všechny tři body uvažujeme na jedné přímce. Shodnost dvou útvarů si můžeme představit tak, že shodné útvary lze přemístit takovým způsobem, že se překrývají. Představa spojitosti například zajistí, že přímka „nemá díry“, neboli nemůže nastat situace, že by se dvě přímky různého směru neprotknuly.

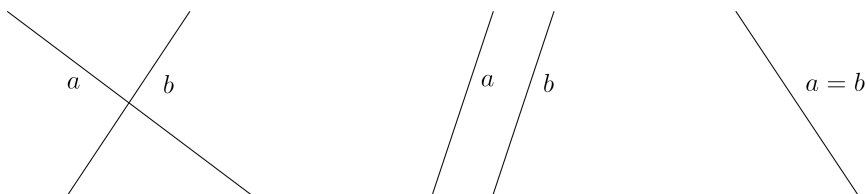
Vzájemná poloha dvou a tří bodů

O dvou bodech A, B lze říci, že jsou *různé* ($A \neq B$), nebo *totožné* ($A = B$), tj. mají stejné umístění. Tři navzájem různé body mohou být *kolinéární*, tj. ležící na jedné přímce, nebo *nekolinéární*, tj. neležící na jedné přímce.

Vzájemná poloha dvou přímek (obr. 1.1)

O dvou přímkách a, b lze říci, že jsou *různoběžné* ($a \times b$), nebo *rovnoběžné* ($a \parallel b$), přičemž u rovnoběžných přímek dále rozlišujeme, zda jsou *různé* ($a \neq b$), nebo *totožné* ($a = b$).

Z hlediska počtu společných bodů mají různoběžné přímky společný právě jeden bod, tzv. *průsečík*. Různé rovnoběžné přímky nemají společný žádný bod. Totožné přímky mají společných nekonečně mnoho bodů.



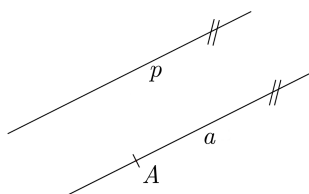
Obrázek 1.1: Vzájemná poloha dvou přímek

Poznámky:

- ▶ Dvěma různými body je jednoznačně určena přímka.
- ▶ Přímku lze pojmenovat také pomocí dvou různých bodů, které na ní leží. Pokud na přímce p leží dva různé body A, B nazveme ji přímkou AB ($\longleftrightarrow AB$).

- ▶ Přesněji o společných bodech dvou totožných přímek řekneme, že každý bod jedné přímky je zároveň bodem druhé přímky.
- ▶ Rovnoběžné přímky nazýváme jednoduše též rovnoběžky, různoběžné přímky nazýváme též různoběžky. V obrázcích můžeme rovnoběžnost přímek zdůraznit „dvojčárkou“ (viz obr. 1.2).

ZT 1: Je dána přímka p a bod A , který na ní neleží. Bodem A lze vést právě jednu rovnoběžku a s přímkou p (obr. 1.2).



Obrázek 1.2: Rovnoběžka s danou přímkou vedená daným bodem

Mějme dvě různé přímky a, b . Každou přímku, která je různoběžná zároveň s přímkou a i s přímkou b , nazveme *příčkou přímek a, b* .

Množinu všech přímek procházejících daným bodem P nazveme *svazkem přímek*. Bod P se nazývá *střed svazku*.

ZT 2: Dvě různé přímky téhož svazku jsou různoběžné.

Množinu všech navzájem rovnoběžných přímek nazveme *směr*. O navzájem rovnoběžných přímkách říkáme, že jsou *přímkami téhož směru*, zatímco navzájem různoběžné přímky jsou *přímkami různého směru*.

1.2 Části přímky a roviny

Podobně jako primitivní pojmy přímka a rovina i další elementární geometrické objekty – úsečka, polopřímka, polorovina, rovinný pás či úhel – bývají ve školské matematice zaváděny značně intuitivně. Zde se je a další s nimi související pojmy pokusíme definovat pomocí primitivních pojmů, stále však zjednodušeně. Exaktnější definice jsou uvedeny v kapitole 13.

Mějme na přímce p dva různé body A, B .

Úsečkou AB (\overline{AB}) rozumíme množinu bodů přímky p , které leží mezi body A a B , sjednocenou s body A, B . Body A, B nazýváme *krajními body* úsečky AB , ostatní body úsečky AB jsou jejími *vnitřními body*.

Bod A rozdělí přímku p na dvě *polopřímky s počátečním bodem* A . Polopřímkou AB ($\rightarrow AB$) rozumíme tu část přímky p , na níž leží bod B . Druhou část přímky p nazveme *opačnou polopřímku* k polopřímce AB .

Poznámky:

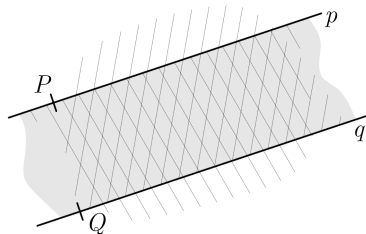
- ▶ Počáteční bod polopřímky je bodem této polopřímky, stejně tak krajní body úsečky jsou body této úsečky.
- ▶ V názvu úsečky či přímky na pořadí bodů nezáleží, úsečka AB je totožná s úsečkou BA , přímka AB je totožná s přímkou BA . V názvu polopřímky však na pořadí bodů záleží, první bod je bodem počátečním.
- ▶ Polopřímka BA není opačnou polopřímku k polopřímce AB .
- ▶ Průnikem polopřímky AB a polopřímky BA je úsečka AB .
- ▶ Chceme-li symbolicky zapsat, že bod A leží na přímce p (či jiném objektu), použijeme symbol \in , tedy $A \in p$. Čteme též „bod A je bodem přímky p “ nebo „bod A je elementem přímky p “ nebo „bod A je incidentní s přímku p “ apod. Chceme-li však zapsat, že objekt tvořený více body (například úsečka AB) leží na jiném objektu (například na přímce p), použijeme symbol \subset , tedy $AB \subset p$. Můžeme též číst „úsečka AB je částí přímky p “ nebo „úsečka AB je podmnožinou přímky p “ nebo „úsečka AB inciduje s přímku p “.

Mějme přímku p a bod A , který na ní neleží. Přímka p rozdělí rovinu na dvě *poloroviny s hraniční přímku* p . Polorovinou pA (\overrightarrow{pA}) rozumíme tu část roviny, v níž leží bod A . Druhou část roviny nazveme *opačnou polorovinu* k polorovině pA .

Poznámka:

- ▶ V označení poloroviny uvádíme vždy nejdříve hraniční přímku. Je-li hraniční přímka p poloroviny pA pojmenována pomocí dvojice bodů (například $\longleftrightarrow KL$), potom $\overrightarrow{pA} = \overrightarrow{KLA} = \overrightarrow{LKA}$.

Mějme dvě různé rovnoběžky p, q a dále libovolný bod P ležící na přímce p a libovolný bod Q ležící na přímce q . Potom průnikem polorovin pQ a qP je tzv. *rovinný pás* určený rovnoběžkami p, q (obr. 1.3).



Obrázek 1.3: Rovinný pás

Úhel bývá na základní škole zaveden jako část roviny ohraničená dvěma polopřímkami se společným počátkem. V zájmu přesnější definice však musíme rozlišit pět různých úhlů.

Mějme tři nekolineární body A, V, B . Potom průnikem polorovin AVB a BVA je tzv. *dutý úhel* AVB (obr. 1.4a), sjednocením polorovin opačných k polorovinám AVB a BVA je tzv. *vypuklý úhel* AVB (obr. 1.4b).

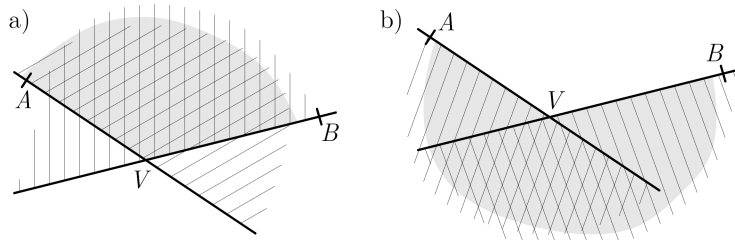
Mějme tři navzájem různé kolineární body A, V, B , kde bod V je bodem úsečky AB . Potom každou z polorovin s hraniční přímkou AB nazýváme *přímým úhlem* AVB .

Mějme tři navzájem různé kolineární body A, V, B , kde bod V není bodem úsečky AB . Potom celou rovinu nazýváme *plným úhlem* AVB , polopřímku VA (resp. $\rightarrow VB$) nazýváme *nulovým úhlem* AVB .

Polopřímek VA, VB říkáme *ramena úhlu*, bod V nazýváme *vrcholem úhlu*. Libovolný bod úhlu, který neleží na jeho rameni, je *vnitřním bodem* tohoto úhlu. Libovolný bod, který není bodem daného úhlu, nazýváme *vnějším bodem* tohoto úhlu.

Poznámka:

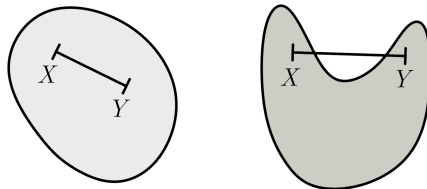
- Úhly též značíme malými písmeny řecké abecedy.



Obrázek 1.4: Dutý a vypuklý úhel

Můžeme se setkat s jednodušší klasifikací úhlů na konvexní a nekonvexní. Nejprve však objasníme obecnější pojmy konvexní a nekonvexní množina bodů.

Konvexní množinou bodů rozumíme takový geometrický objekt, pro jehož každé dva body X, Y platí, že úsečka XY je podmnožinou tohoto objektu. Pokud však existuje taková dvojice bodů X, Y daného geometrického objektu, že úsečka XY není podmnožinou tohoto objektu, nazveme jej *nekonvexní množinou bodů* (obr. 1.5).



Obrázek 1.5: Konvexní a nekonvexní množina bodů

Poznámka:

- Z výše uvedených pojmů jsou konvexními množinami bodů přímka, polopřímka, úsečka, rovina, polorovina a rovinný pás. Konvexní množinou bodů je také prázdná množina a bod.

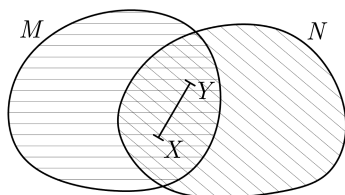
Věta 1.1

Průnikem konvexních množin je konvexní množina.

Důkaz:

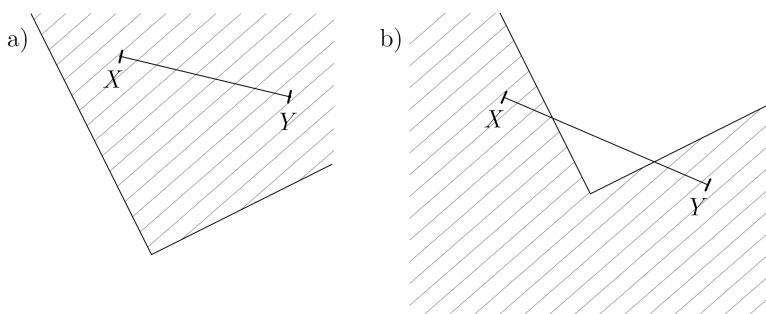
Mějme konvexní množiny M a N (obr. 1.6). Jejich průnik je buď prázdný (a prázdná množina je konvexní), nebo jednobodový (jeden bod je také konvexní množinou), nebo obsahuje více bodů. Pokud různé body X a Y leží v průniku množin M a N , potom tyto body leží jak v množině M , tak v množině N . Jelikož jsou množina M i N konvexní, leží v obou také úsečka XY , a tedy úsečka XY leží i v průniku množin M a N .

□



Obrázek 1.6: Průnik konvexních množin bodů

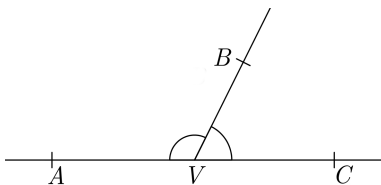
Konvexním úhlem tedy rozumíme takový úhel, pro jehož libovolné dva body A, B platí, že \overline{AB} je podmnožinou tohoto úhlu. *Nekonvexní úhel* je takový, který není konvexní. Konvexním úhlem je úhel nulový, přímý a plný. Dále z věty 1.1 plyne, že konvexním úhlem je také úhel dutý (obr. 1.7a), zatímco vypuklý úhel je úhlem nekonvexním (obr. 1.7b).



Obrázek 1.7: Konvexní a nekonvexní úhel

V planimetrii často pracujeme se specifickými dvojicemi úhlů, které jsou za určitých okolností shodné nebo jejich sjednocením získáme úhel přímý.

Dvojici dutých úhlů AVB a BVC , jejichž ramena VA , VC jsou opačnými polopřímkami, nazýváme *úhly vedlejší* (obr. 1.8).

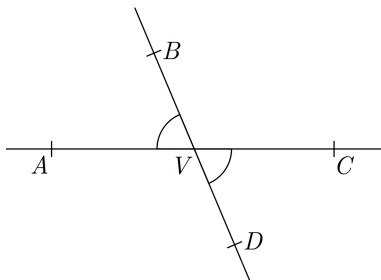


Obrázek 1.8: Vedlejší úhly

Poznámka:

- Sjednocením dvou navzájem vedlejších úhlů získáme úhel přímý (resp. polorovinu).

Dvojici dutých úhlů AVB a CVD , jejichž ramena VA , VC a VB , VD jsou opačnými polopřímkami, nazýváme *úhly vrcholové* (obr. 1.9).



Obrázek 1.9: Vrcholové úhly

ZT 3: Vrcholové úhly jsou shodné.

Mějme dvě různé přímky a, b prořezané příčkou c a označme A průsečík přímek a, c a B průsečík přímek b, c . Dále zvolme libovolný bod C takový, že $C \in c \wedge C \notin \overline{AB}$, a libovolný bod $K \notin c$ (obr. 1.10). Uvažujme úhly

$$\alpha = \overrightarrow{aC} \cap \overrightarrow{cK},$$

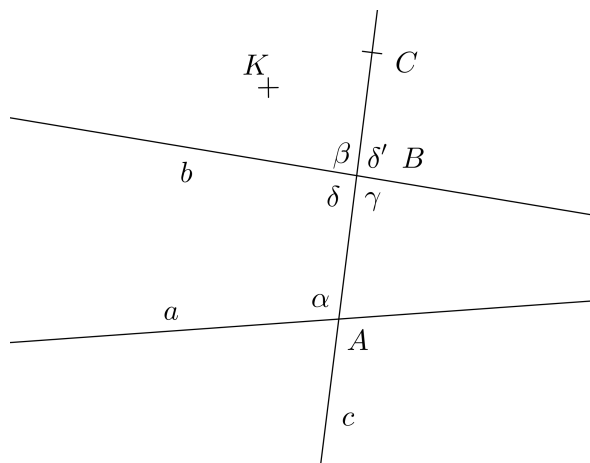
$$\beta = \overrightarrow{bC} \cap \overrightarrow{cK},$$

$$\gamma = \text{polorovina opačná k } \overrightarrow{bC} \cap \text{polorovina opačná k } \overrightarrow{cK},$$

$$\delta = \text{polorovina opačná k } \overrightarrow{bC} \cap \overrightarrow{cK},$$

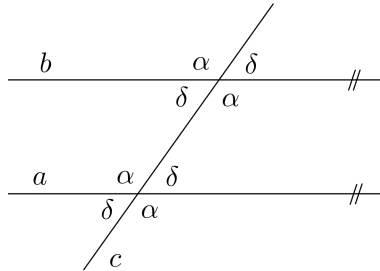
$$\delta' = \overrightarrow{bC} \cap \text{polorovina opačná k } \overrightarrow{cK}.$$

Potom dvojici úhlů α, β nazveme *úhly souhlasné*, dvojici úhlů α, γ nazveme *úhly střídavé* a dvojici úhlů α, δ , resp. α, δ' , nazveme *úhly přilehlé*.



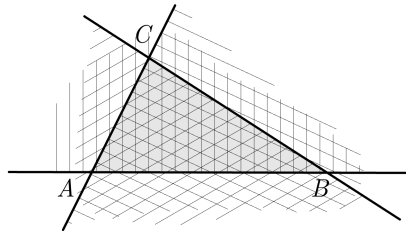
Obrázek 1.10: Souhlasné, střídavé a přilehlé úhly

ZT 4: Přímky a, b v předchozí definici jsou rovnoběžné právě tehdy, když souhlasné a střídavé úhly vymezené těmito přímkami a jejich příčkou jsou shodné (obr. 1.11).



Obrázek 1.11: Shodnost souhlasných a střídavých úhlů

Mějme tři nekolineární body A, B, C . *Trojúhelníkem* ABC ($\triangle ABC$) rozumíme průnik polorovin ABC, BCA, ACB (obr. 1.12).



Obrázek 1.12: Trojúhelník

Poznámka:

- Body A, B, C nazýváme *vrcholy trojúhelníku* ABC , úsečky AB, BC, AC nazýváme *strany trojúhelníku* ABC . Stranu trojúhelníku obvykle značíme malým písmenem, které odpovídá protilehlému vrcholu (tj. vrcholu, který s touto stranou není incidentní).

Věta 1.2

Trojúhelník je konvexní množinou bodů.

Důkaz:

Přímo vyplývá z definice trojúhelníku a věty 1.1.

□

1.3 Metrické pojmy

Jelikož se pohybujeme v eukleidovské rovině, pracujeme též s eukleidovskou metrikou. *Vzdálenost* dvou bodů A, B měříme „vzdušnou čarou“, chápeme ji tedy jako délku úsečky AB , píšeme $|AB|$. *Vzdálenost* totožných bodů A, B je nulová. Pro libovolné dva body A, B tedy platí, že $|AB| \geq 0$. Potřebujeme-li (například při výpočtech nebo konstrukcích) konkrétní jednotky délky, pracujeme se základní jednotkou délky *metr* (m) a jejími násobky.

Poznámka:

- ▶ Neurčité délky úseček zpravidla označujeme malými písmeny latinské abecedy (např. úsečka AB délky a). Přeneseně se pak můžeme setkat s tím, že malým písmenem je označena úsečka jako geometrický objekt (viz poznámka k značení stran trojúhelníku, str. 18). Z kontextu však musí být vždy zřejmé, zda máme na mysli úsečku, nebo její délku.

Vzdálenosti jiných, složitějších objektů budeme definovat pomocí vzdálenosti dvou bodů.

Vzdálenost bodu A od přímky p definujeme jako nejmenší ze vzdáleností $|AP|$, kde bod P probíhá přímkou p .

Poznámky:

- ▶ Vzdálenost bodu $A \in p$ od přímky p je nulová.
- ▶ Analogicky definujeme *vzdálenost bodu od libovolného útvaru*.

Vzdálenost dvou útvarů definujeme jako nejmenší možnou vzdálenost bodů A, B , kde bod A je bodem jednoho a bod B je bodem druhého z daných útvarů.

Poznámky:

- ▶ Z předchozí definice vyplývá, že vzdálenost totožných přímek je nulová, stejně tak je nulová vzdálenost různoběžných přímek.
- ▶ Máme-li dvě rovnoběžky, lze ukázat, že každý bod jedné z nich je ve stejné vzdálenosti od druhé. Proto *vzdálenost dvou rovnoběžných přímek* je rovna vzdálenosti libovolného bodu jedné z daných přímek od druhé přímky.

ZT 5: Mějme přímku p a bod M takový, že $|Mp| = m$. Potom pro každé reálné číslo $n > m$ existují právě dva různé body X, Y ležící na přímce p takové, že $|XM| = |YM| = n$.

Poznámka:

- Ze ZT 5 mimo jiné vyplývá, že přímka je spojitá a nekonečná.

Pomocí vzdálenosti lze definovat objekty jako střed a osu úsečky, osu úhlu či kružnici. V dalších kapitolách pak vzdálenost využijeme k definici dalších objektů, například kruhu, elipsy aj.

Střed úsečky je takový bod úsečky, který je stejně vzdálen od obou jejích krajních bodů.

Osu úsečky rozumíme množinu všech bodů dané roviny, které jsou stejně vzdálené od krajních bodů dané úsečky.

Poznámka:

- Není-li řečeno jinak, střed úsečky AB dále značíme S_{AB} a osu úsečky AB dále značíme o_{AB} .

Pomocí poměru vzdáleností bodů lze udat polohu bodu na přímce vzhledem ke dvěma daným různým bodům této přímky.

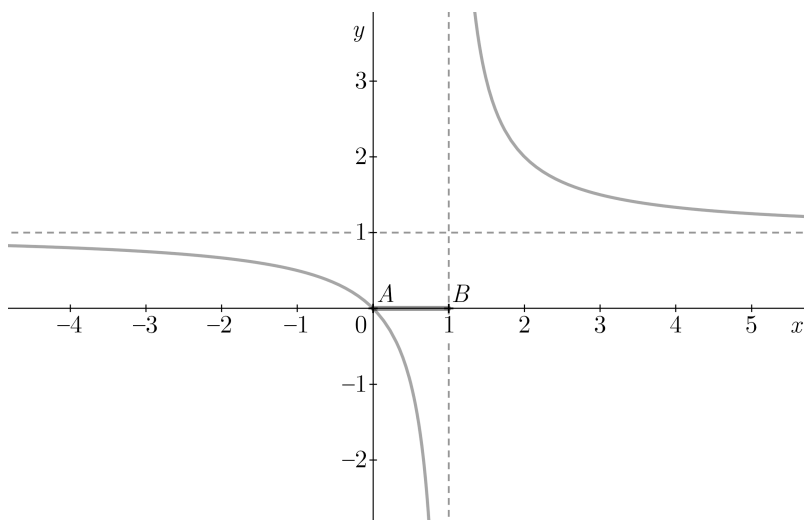
Mějme přímku AB a libovolný bod $C \in \leftrightarrow AB$, kde $B \neq C$. *Dělicím poměrem* bodu C vzhledem k bodům A, B (v tomto pořadí) je číslo $k \cdot \frac{|AC|}{|BC|}$, kde $k = 1$ pro C ležící vně úsečky AB a $k = -1$ pro C ležící na úsečce AB .

Poznámka:

- Dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B značíme (ABC) . Hodnota (ABC) jednoznačně udává polohu bodu C na přímce AB .

Je užitečné si uvědomit hodnoty dělicích poměrů pro některé konkrétní polohy bodu C vzhledem k daným bodům A, B . Například je-li bod C středem \overline{AB} , potom z definice vyplývá, že $(ABC) = -1$. Je-li B středem \overline{AC} , je $(ABC) = 2$, pro $A = C$ je $(ABC) = 0$ atd. Dělicí poměr nikdy nenabývá hodnoty 1, neboť pro $C \notin \overline{AB}$ je vždy $|AC| \neq |BC|$.

Hodnoty dělicího poměru lze znázornit graficky (obr. 1.13). Mějme danou přímku AB . Zvolme soustavu souřadnic tak, že počátek splývá s bodem A , jednotka odpovídá délce úsečky AB a kladná poloosa x je totožná s polopřímku AB . Dále uvažujme bod C pohybující se po přímce AB (tedy po ose x). Jednotlivé polohy bodu C udávají hodnotu nezávisle proměnné x . Ke každé poloze bodu C vypočítáme dělicí poměr (ABC) , jeho hodnota představuje hodnotu závisle proměnné y . Pokud bychom vyjádřili předpis příslušné funkce, získali bychom lineární lomenou funkci, jejímž grafem je hyperbola. Z grafu je patrné, že pro body polopřímky opačné k polopřímce AB leží hodnota dělicího poměru mezi 0 a 1, pro body polopřímky opačné k polopřímce BA je dělicí poměr větší než jedna a pro vnitřní body úsečky AB je dělicí poměr záporný.



Obrázek 1.13: grafické znázornění dělicího poměru tří kolineárních bodů

Mějme dutý nebo přímý úhel AVB . *Osou úhlu AVB* rozumíme množinu všech bodů, které náležejí úhlu AVB a zároveň jsou stejně vzdálené od jeho ramen VA , VB .

Mějme vypuklý úhel AVB . *Osou úhlu AVB* rozumíme množinu všech bodů, které náležejí úhlu AVB a zároveň jsou stejně vzdálené od polopřímek opačných k jeho ramenům VA , VB .

V rovině je dán bod S a úsečka délky r . Množinu všech bodů dané roviny, jejichž vzdálenost od bodu S je rovna r , nazveme *kružnicí se středem S a poloměrem r* .

Poznámka:

- ▶ Kružnice, podobně jako přímky, značíme malými písmeny latinské abecedy. Do závorky přepisujeme označení středu a poloměru, popřípadě přímo velikost poloměru. Například kružnici k se středem S a poloměrem r zapíšeme symbolicky $k(S, r)$, kružnici h se středem H a poloměrem 5 cm zapíšeme symbolicky $h(H, 5 \text{ cm})$ apod.

Často potřebujeme pracovat nejen s délkou úsečky, ale také s *velikostí úhlu*. Úhly ve školské geometrii měříme nejčastěji ve stupních ($^\circ$). Velikost plného úhlu je 360° , z čehož plyne, že velikost přímého úhlu je 180° . Velikost nulového úhlu je 0° . Velikost dutého úhlu je tedy z intervalu $(0^\circ, 180^\circ)$ a velikost vypuklého úhlu je z intervalu $(180^\circ, 360^\circ)$. Podle velikosti můžeme rozlišit tři typy dutých úhlů.

Úhel o velikosti 90° nazýváme *pravý*, úhel o velikosti z intervalu $(0^\circ, 90^\circ)$ nazýváme *ostrý* a úhel o velikosti z intervalu $(90^\circ, 180^\circ)$ nazýváme *tupý*.

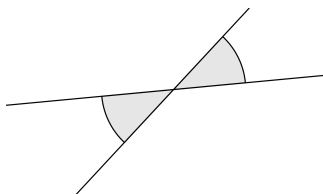
Poznámka:

- ▶ Velikost úhlu AVB značíme $|\sphericalangle AVB|$. Neurčité velikosti úhlů se obvykle značí malými písmeny řecké abecedy. Přeneseně se pak toto označení používá i pro úhel jako takový, z kontextu však musí být zřejmé, zda máme na mysli úhel, nebo jeho velikost.
- ▶ Stupeň není základní ani odvozenou jednotkou soustavy SI. Odvozenou jednotkou pro měření úhlů je *radian* (rad), přičemž velikost plného úhlu je 2π rad. V geodézii se můžeme setkat s jednotkou úhlu *grad* (g), velikost plného úhlu je 400 g.

Velikost úhlu, který svírají dva objekty, nazýváme též *odchylkou* těchto objektů.

Odchylka dvou rovnoběžných přímek je 0° .

Odchylka dvou různoběžných přímek je rovna velikosti libovolného z menších úhlů, který dané přímky svírají (obr. 1.14).



Obrázek 1.14: Odchylka různoběžných přímek

O přímkách, jejichž odchylka je 90° , řekneme, že jsou navzájem *kolmé*.

Poznámka:

- ▶ Navzájem kolmé přímky též nazýváme jednoduše *kolmice*. Jsou-li přímky a, b navzájem kolmé, symbolicky píšeme $a \perp b$.

Věta 1.3

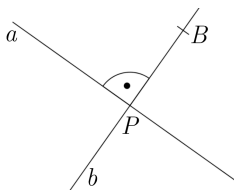
Osou úsečky je přímka kolmá k dané úsečce procházející jejím středem.

Důkaz viz podkapitola 2.2 (str. 30).

ZT 6: Necht' je dána přímka a a libovolný bod B . Bodem B lze vést právě jednu kolmici k přímce a .

Poznámka:

- ▶ Vedeme-li bodem B kolmici b k dané přímce a , přičemž $B \notin a$, potom průsečík P přímek a a b nazýváme také *patou kolmice b* (obr. 1.15).



Obrázek 1.15: Pata kolmice

ZT 7: Je-li vzdálenost bodu $A \notin p$ od přímky p rovna d , kde $d > 0$, potom existuje právě jeden bod $X \in p$ takový, že $|XA| = d$. Zároveň platí, že $XA \perp p$.

ZT 8: Osa úhlu, jehož velikost je α , jej rozděluje na dva úhly o velikosti $\frac{\alpha}{2}$.

Věta 1.4

Osy úhlů sevřených dvěma různoběžnými přímkami jsou na sebe kolmé.

Důkaz:

Mějme různoběžky a, b svírající dvě dvojice vrcholových úhlů o velikostech α a β , přičemž $\alpha + \beta = 180^\circ$. Sjednocením os vrcholových úhlů o velikosti α získáme přímku o_α , sjednocením os vrcholových úhlů o velikosti β získáme přímku o_β . Přímky o_α, o_β jsou též různoběžné a svírají dvě dvojice vrcholových úhlů, každý (dle ZT 8) o velikosti $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. Jelikož je $\alpha + \beta = 180^\circ$, je $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$. \square

V matematice pracujeme také s pojmem *orientovaný úhel*. Je třeba zdůraznit, že orientovaný úhel není totéž jako úhel definovaný výše. Zde jsme definovali úhel jako množinu bodů, zatímco orientovaný úhel je obvykle definován jako uspořádaná dvojice polopřímek.³

1.4 Úlohy

- 1.1** V rovině je dáno n různých bodů, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce. Kolik přímek je těmito body určeno?
- 1.2** Pro kolineární body A, B, C platí $(ABC) = -3$. Určete hodnoty (ACB) , (BCA) a (BAC) .
- 1.3** Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:
- Průnikem dvou trojúhelníků není konvexní množina.
 - Osa dutého úhlu rozdělí daný úhel na dva ostré úhly.
- 1.4** Určete velikost konvexního úhlu, který na kompasu svírají směry V a SZS. Výsledek zapište v míře stupňové ($^\circ$), obloukové (rad) i setinné (g).

³Podrobněji viz např. (Odvárko, 2008) a též zde str. 160.

Kapitola 2

Trojúhelník

Trojúhelník jsme již definovali jako průnik tří polorovin v kapitole 1 (str. 18). Nyní se podrobněji podíváme na jednotlivé typy trojúhelníků, na významné body a úsečky trojúhelníku, na jeho vlastnosti a další zajímavé souvislosti. Podobně jako v kapitole 1 i zde uvedeme několik základních tvrzení (ZT).

2.1 Základní pojmy a vlastnosti

ZT 9 (trojúhelníková nerovnost): V každém trojúhelníku je součet délek dvou jeho libovolných stran větší než délka strany třetí.

Poznámky:

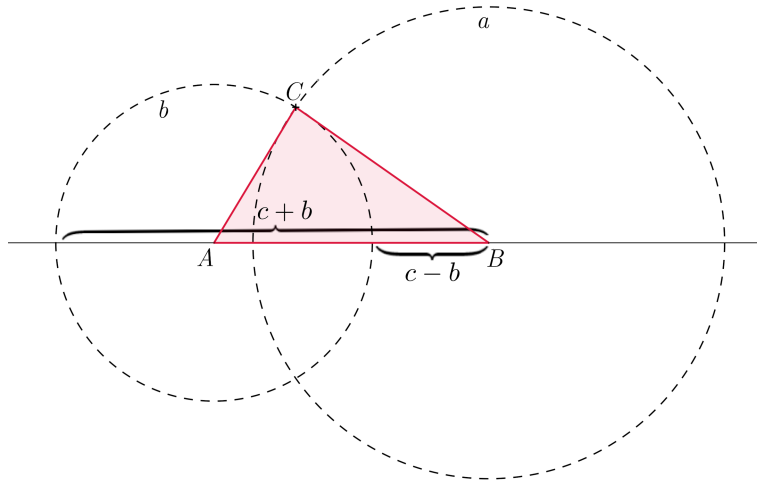
- ▶ Platnost ZT 9 úzce souvisí s tím, že vrcholy trojúhelníku jsou nekolineárními body.
- ▶ V trojúhelníku ABC tedy platí, že $a + b > c$, $b + c > a$ a zároveň $a + c > b$. Tuto trojici nerovností můžeme přepsat stručněji

$$|b - c| < a < b + c$$

a interpretovat graficky (obr. 2.1).

Věta 2.1

Nechť pro délky úseček a , b , c platí $a \leq b \leq c \wedge a + b > c$. Potom existuje trojúhelník se stranami a , b , c .



Obrázek 2.1: Trojúhelníková nerovnost

Důkaz: Aby existoval trojúhelník se stranami a, b, c , musí pro jejich délky platit trojúhelníková nerovnost (ZT 9). Chceme tedy ukázat, že z uvedených předpokladů plyne, že $a + c > b$ a také $b + c > a$.

Z předpokladu $a \leq b \leq c$ plyne, že $a \leq c$. Přičteme-li k pravé straně kladné číslo b , bude $a < b + c$.

Z předpokladu $a \leq b \leq c$ víme, že $b \leq c$. Přičteme-li k pravé straně kladné číslo a , bude $b < a + c$.

☒

Poznámka:

- Pokud tři dané délky úseček nespĺňují trojúhelníkovou nerovnost, nemohou tyto úsečky být stranami trojúhelníku. Z věty 2.1 vyplývá, že stačí ověřit, že součet délek dvou kratších stran je větší než délka strany třetí.

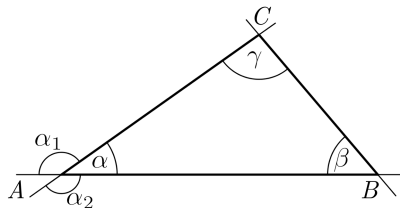
Každý trojúhelník má tři vnitřní a tři vnější úhly.

Vnitřními úhly trojúhelníku ABC rozumíme duté úhly ABC , BCA a BAC .

Vnější úhlem k danému vnitřnímu úhlu nazýváme libovolný ze dvou úhlů vedlejších k příslušnému vnitřnímu úhlu.

Poznámky:

- ▶ Vnitřní úhly trojúhelníku, resp. jejich velikosti, se zpravidla označují malým písmenem řecké abecedy, které odpovídá názvu vrcholu. V trojúhelníku ABC tedy pracujeme s úhly α , β a γ (obr. 2.2).
- ▶ V obrázku 2.2 jsou vyznačeny dva vnější úhly α_1 a α_2 k úhlu α . Jelikož jsou úhly α_1 a α_2 vrcholové, jejich velikost je stejná.



Obrázek 2.2: Vnitřní a vnější úhly trojúhelníku

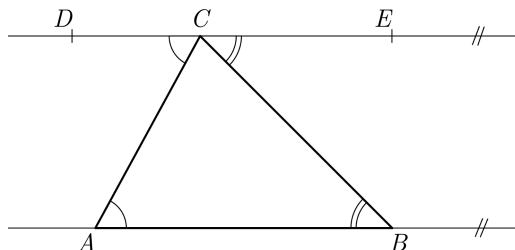
Věta 2.2

V každém trojúhelníku je součet velikostí vnitřních úhlů roven 180° .

Důkaz:

Mějme libovolný trojúhelník ABC . Bodem C vedme rovnoběžku (viz ZT 1, str. 11) s přímkou AB (obr. 2.3) a vyznačme na ní libovolně bod $D \neq C$ ležící v polorovině BCA a bod $E \neq C$ ležící v polorovině ACB . Dle ZT 4 (str. 17) jsou duté úhly BAC a ACD shodné, stejně tak jsou shodné duté úhly ABC a BCE (jedná se vždy o dvojice střídavých úhlů při rovnoběžkách prořatých příčkou). Sjednocením dutých úhlů ACD , ACB a BCE získáme přímý úhel DCE , jehož velikost je 180° . Tedy $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ACD| + |\sphericalangle BCE| + |\sphericalangle ACB| = 180^\circ$.

☒



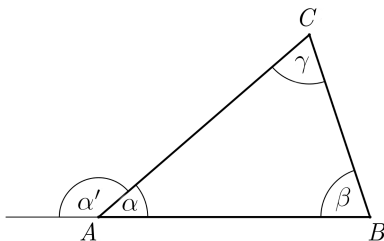
Obrázek 2.3: Součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku

Věta 2.3

Velikost vnějšího úhlu při vrcholu A trojúhelníku ABC je rovna součtu velikostí vnitřních úhlů při vrcholech B a C .

Důkaz:

Označme α' velikost vnějšího úhlu trojúhelníku ABC , který je vedlejší k úhlu o velikosti α (obr. 2.4). Potom $\alpha + \alpha' = 180^\circ$, zároveň však dle věty 2.2 platí, že $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Tedy $\alpha' = \beta + \gamma$. \square



Obrázek 2.4: Velikost vnějšího úhlu trojúhelníku

Poznámka:

- Větu 2.3 lze formulovat (podobně jako některé další věty a definice) a dokázat trojmo (platí také, že $\beta' = \alpha + \gamma$ a $\gamma' = \alpha + \beta$). Abychom se tomuto vyhnuli, předpokládáme v dalším textu tzv. *cyklickou záměnu*, tj. možnost nahrazení vrcholů A, B, C a jim odpovídajících stran a úhlů v trojúhelníku ABC po řadě vrcholy (a odpovídajícími stranami/úhly) B, C, A , resp. C, A, B .

2.2 Věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků

Trojúhelník obvykle zadáváme třemi údaji, které vybíráme z délek stran, velikostí vnitřních úhlů i délek jiných významných úseček trojúhelníku jako těžnice, výška (viz dále) aj. V některých případech tyto tři údaje stačí k tomu, aby byl trojúhelník zadán jednoznačně. Lze ukázat, že trojúhelník je zadán jednoznačně mimo jiné délkami svých stran, délkami dvou stran a velikostí vnitřního úhlu jimi sevřeného, délkou jedné strany a velikostmi vnitřních úhlů přiléhajících k této straně a konečně délkami dvou stran a velikostí vnitřního úhlu proti delší¹ ze zadaných stran.

Jestliže je výše uvedenými údaji trojúhelník zadán jednoznačně, pak dva trojúhelníky, které se v těchto údajích shodují, musí být shodné. Odtud vyplývají tzv. *věty o shodnosti trojúhelníků*, které uvedeme bez důkazu jako ZT, neboť v axiomatickém systému je jedna z nich přímo axiomem a ostatní pak jejím důsledkem (viz kapitola 13). Jednotlivé věty o shodnosti trojúhelníků bývají označovány výstižnými zkratkami sestavenými kombinací písmen s (strana) a u (úhel).

ZT 10 (sss): Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v délkách všech tří stran.

ZT 11 (sus): Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v délkách dvou stran a velikosti vnitřního úhlu, který tyto strany svírají.

ZT 12 (usu): Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v délce jedné strany a velikostech vnitřních úhlů k této straně přilehlých.

ZT 13 (Ssu): Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v délkách dvou stran a velikosti vnitřního úhlu proti delší z těchto stran.

Poznámky:

- ▶ Jsou-li trojúhelníky ABC a KLM shodné, píšeme $\triangle ABC \simeq \triangle KLM$.
- ▶ V symbolickém zápisu shodných trojúhelníků záleží na pořadí vrcholů. Zápisem $\triangle ABC \simeq \triangle KLM$ říkáme, že strana AB je shodná se stranou KL , že vnitřní úhel trojúhelníku ABC u vrcholu A je shodný s vnitřním úhlem u vrcholu K trojúhelníku KLM atd.
- ▶ Jsou-li dva trojúhelníky shodné dle jednoho z výše uvedených ZT, jsou pak shodné i dle dalších vět o shodnosti.

¹ Jsou-li dané strany stejně dlouhé, je jedno, proti které z nich leží daný úhel.

Obdobně lze formulovat čtyři základní tvrzení stanovující, kdy jsou dva trojúhelníky podobné.² Také pro tyto tzv. *věty o podobnosti trojúhelníků* používáme obvyklé zkratky.

ZT 14 (*sss*): Dva trojúhelníky jsou podobné, mají-li shodné poměry délek všech tří dvojic odpovídajících si stran.

ZT 15 (*sus*): Dva trojúhelníky jsou podobné, mají-li shodné poměry délek dvou dvojic stran a mají-li shodnou velikost vnitřního úhlu, který tyto strany svírají.

ZT 16 (*uu*): Dva trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se ve velikostech dvou vnitřních úhlů.

ZT 17 (*Ssu*): Dva trojúhelníky jsou podobné, mají-li shodné poměry délek dvou dvojic stran a mají-li shodnou velikost vnitřního úhlu proti delší z těchto stran.

Poznámky:

- ▶ Jsou-li dva trojúhelníky podobné dle jedné z výše uvedených vět, jsou pak podobné i dle tří zbývajících vět o podobnosti.
- ▶ Jsou-li trojúhelníky ABC a KLM podobné, píšeme $\triangle ABC \sim \triangle KLM$. Jinými slovy to znamená, že existuje kladné reálné číslo k takové, že $|KL| = k \cdot |AB|$, $|LM| = k \cdot |BC|$ a $|KM| = k \cdot |AC|$.
- ▶ V symbolickém zápisu podobných trojúhelníků záleží na pořadí vrcholů. Zápisem $\triangle ABC \sim \triangle KLM$ říkáme, že straně AB odpovídá strana KL , že vnitřní úhel trojúhelníku ABC u vrcholu A je shodný s vnitřním úhlem u vrcholu K trojúhelníku KLM atd.

Nyní můžeme dokázat **větu 1.3** z kapitoly 1 (str. 23).

Důkaz:

Mějme úsečku AB a její osu o_{AB} , která je množinou bodů X , pro něž platí $|AX| = |BX|$. Chceme dokázat, že o_{AB} prochází středem \overline{AB} a $o_{AB} \perp \overline{AB}$. Pro střed S úsečky AB platí, že $|AS| = |BS|$, tedy $S \in o_{AB}$. Uvažujme libovolný bod $P \in o_{AB} \wedge P \neq S$. Potom

²Podobnost v tuto chvíli chápeme, obdobně jako shodnost (viz str. 10), intuitivně. Podobné útvary mají stejný tvar, liší se však svou velikostí. Exaktněji definujeme shodnost a podobnost v kapitolách 9 a 10.

$\triangle ASP \simeq \triangle BSP$ podle věty *sss* a tedy také $|\sphericalangle ASP| = |\sphericalangle BSP|$. Zároveň však jsou úhly ASP a BSP vedlejší, proto $|\sphericalangle ASP| + |\sphericalangle BSP| = 180^\circ$. Odtud plyne, že $|\sphericalangle ASP| = 90^\circ$ a tedy $o_{AB} \perp \overline{AB}$.

☒

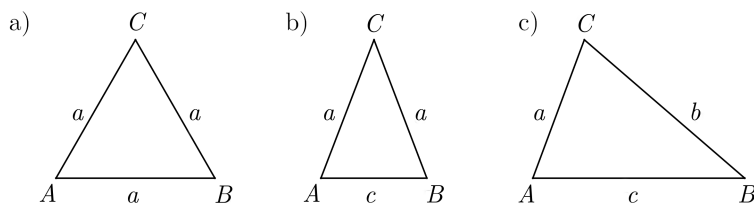
2.3 Klasifikace trojúhelníků

Trojúhelníky dělíme dvěma způsoby – dle délek stran a dle velikostí vnitřních úhlů – do tří disjunktních skupin. Podle délek stran rozlišujeme trojúhelníky rovnostranné, rovnoramenné a různostranné.

Rovnostranný trojúhelník má všechny tři strany stejně dlouhé (obr. 2.5a).

Rovnoramenný trojúhelník má právě dvě strany stejně dlouhé. Tyto strany nazýváme *rameny*, třetí stranu nazýváme *základnou* rovnoramenného trojúhelníku (obr. 2.5b).

Různostranný trojúhelník nemá žádné dvě strany stejně dlouhé (obr. 2.5c).



Obrázek 2.5: Rovnostranný, rovnoramenný a různostranný trojúhelník

Poznámky:

- ▶ Různostranný trojúhelník bývá nesprávně nazýván *obecným trojúhelníkem*. Termín *obecný* však používáme pro trojúhelník, o němž nic nepředpokládáme/nevíme. Obecný trojúhelník tedy může být různostranný, rovnoramenný i rovnostranný.
- ▶ Je možný i jiný přístup ke klasifikaci trojúhelníků dle délek stran, kdy rovnoramenný trojúhelník definujeme jako trojúhelník s (alespoň) dvěma stejně dlouhými stranami a rovnostranný trojúhelník je potom jeho speciálním případem.

Věta 2.4

Každý vnitřní úhel rovnostranného trojúhelníku má velikost 60° .

Důkaz:

Mějme rovnostranný trojúhelník ABC , tedy $|AB| = |BC| = |AC|$. Podle věty o shodnosti trojúhelníků *sss* je $\triangle ABC \simeq \triangle BCA \simeq \triangle CAB$, tedy jsou shodné i odpovídající si úhly, proto

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle CAB|. \quad (2.1)$$

Zároveň však dle věty 2.2 je

$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle CAB| = 180^\circ. \quad (2.2)$$

Dosazením vztahu (2.1) do (2.2) získáme:

$$\begin{aligned} 3 \cdot |\sphericalangle ABC| &= 180^\circ \\ |\sphericalangle ABC| &= 60^\circ \end{aligned}$$

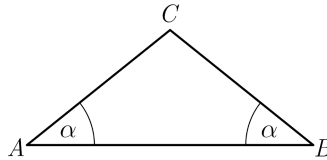
☒

Věta 2.5

V rovnoramenném trojúhelníku jsou vnitřní úhly přilehlé k základně stejně velké.

Důkaz: Mějme rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB , tedy $|AC| = |BC|$ (obr. 2.6). Podle věty o shodnosti trojúhelníků *sss* je $\triangle ABC \simeq \triangle BAC$, tedy jsou shodné i odpovídající si úhly, proto $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BAC|$.

☒



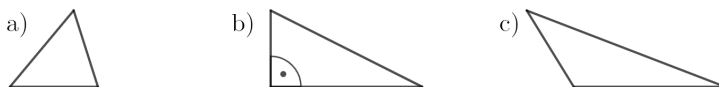
Obrázek 2.6: Rovnoramenný trojúhelník

Podle velikostí vnitřních úhlů rozlišujeme trojúhelníky ostroúhlé, pravoúhlé a tupouhlé.

Ostroúhlý trojúhelník má všechny tři vnitřní úhly ostré (obr. 2.7a).

Pravoúhlý trojúhelník má právě jeden vnitřní úhel pravý. Stranu protilehlou pravému úhlu nazýváme *přepona*, strany svírající pravý úhel nazýváme *odvěsny* (obr. 2.7b).

Tupoúhlý trojúhelník má právě jeden vnitřní úhel tupý (obr. 2.7c).



Obrázek 2.7: Ostroúhlý, pravoúhlý a tupoúhlý trojúhelník

Poznámka:

- Jiná možnost pro vnitřní úhly trojúhelníku nemůže nastat. Nejvýše jeden z vnitřních úhlů může být pravý nebo tupý, tj. jeho velikost je z intervalu $[90^\circ; 180^\circ)$, neboť pokud by takové byly dva či více vnitřních úhlů, potom by součet velikostí všech vnitřních úhlů byl větší než 180° , což by bylo v rozporu s větou 2.2.

Věta 2.6

Přepona pravoúhlého trojúhelníku je větší než kterákoliv z jeho odvěsen.

Důkaz:

Věta je přímým důsledkem ZT 7 (str. 24).

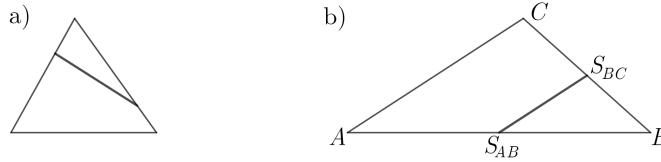
☒

2.4 Významné objekty trojúhelníku

S trojúhelníkem se pojí řada pojmů jako výšky, těžnice, příčky aj. Tyto objekty navíc mají zajímavé vlastnosti.

Příčkou trojúhelníku nazveme každou úsečku, jejíž krajní body jsou vnitřními body dvou různých stran trojúhelníku (obr. 2.8a).

Střední příčkou trojúhelníku nazveme úsečku, jejíž krajní body jsou středy stran trojúhelníku (obr. 2.8b).



Obrázek 2.8: Příčka a střední příčka trojúhelníku

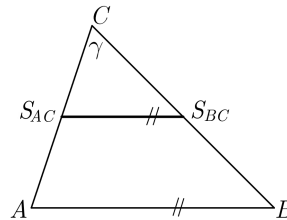
Věta 2.7

Střední příčka trojúhelníku je rovnoběžná s jednou jeho stranou a zároveň má poloviční délku než tato strana.

Důkaz:

Uvažujme střední příčku $S_{AC}S_{BC}$ trojúhelníku ABC (obr. 2.9). Potom $|AC| = 2 \cdot |S_{AC}C|$, $|BC| = 2 \cdot |S_{BC}C|$ a úhel γ je vnitřním úhlem trojúhelníku ABC i $S_{AC}S_{BC}C$, proto jsou trojúhelníky ABC , $S_{AC}S_{BC}C$ podobné dle věty *sus*. Jsou tedy i podobné dle věty *sss*, a proto je $|AB| = 2 \cdot |S_{AC}S_{BC}|$. Dále jsou podobné dle věty *uu*, a proto je $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle S_{BC}S_{AC}C|$, z čehož (dle ZT 4, str. 17) plyne rovnoběžnost AB a $S_{AC}S_{BC}$.

☒



Obrázek 2.9: K důkazu věty 2.7

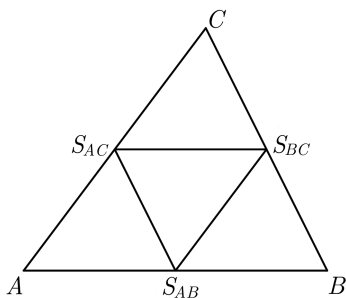
Věta 2.8

Střední příčky trojúhelníku dělí trojúhelník na čtyři navzájem shodné trojúhelníky.

Důkaz:

Trojúhelník ABC je svými středními příčkami rozdělen na trojúhelníky $AS_{AB}S_{BC}$, $S_{AB}BS_{BC}$, $S_{AC}S_{BC}C$, $S_{BC}S_{AC}S_{AB}$ (obr. 2.10).

Z definice středu úsečky (str. 20) a věty 2.7 plyne, že délky stran těchto trojúhelníků jsou $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ a $\frac{c}{2}$, tedy jsou shodné dle věty *sss*. ☒

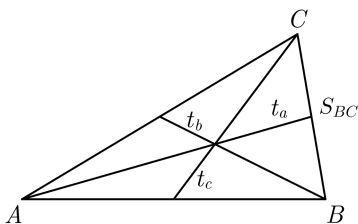


Obrázek 2.10: K důkazu věty 2.8

Úsečku spojující vrchol trojúhelníku se středem protilehlé strany nazveme *těžnicí* trojúhelníku příslušnou k této straně.

Poznámka:

- ▶ Těžnice (a přeneseně i jejich délky) obvykle značíme písmenem t s dolním indexem příslušné strany. Například v trojúhelníku ABC označíme t_a těžnici spojující vrchol A se středem strany BC atd. (obr. 2.11).



Obrázek 2.11: Těžnice trojúhelníku

Věta 2.9

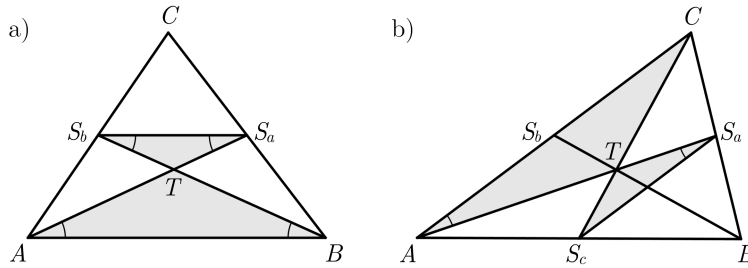
Těžnice trojúhelníku se protínají v jednom bodě. Vzdálenost tohoto bodu od středu kterékoliv strany je rovna jedné třetině délky příslušné těžnice.

Důkaz:

Mějme trojúhelník ABC a označme S_a střed strany BC a S_b střed strany AC . Sestrojíme bod T jako průsečík těžnic t_a, t_b (obr. 2.12a). Trojúhelníky ABT, S_aS_bT jsou podobné podle věty uu , neboť S_aS_b je střední příčka trojúhelníku ABC rovnoběžná se stranou AB (viz věta 2.7). Díky tomu je $|\sphericalangle BAT| = |\sphericalangle S_bS_aT|$ a $|\sphericalangle ABT| = |\sphericalangle S_aS_bT|$. Dále z věty 2.7 víme, že $|AB| = 2 \cdot |S_aS_b|$, a tedy také $|AT| = 2 \cdot |S_aT|$ a $|BT| = 2 \cdot |S_bT|$, neboli vzdálenost bodu T od středu strany a , resp. b , je rovna třetině délky příslušné těžnice.

Dále označme S_c střed strany AB . Chceme dokázat, že bod T , sestrojený jako průsečík těžnic t_a, t_b , leží na těžnici t_c .

Z výše uvedeného víme, že $|AT| = 2 \cdot |S_aT|$. Jelikož je S_aS_c střední příčkou trojúhelníku ABC rovnoběžnou se stranou AC , platí dle věty 2.7 že $|AC| = 2 \cdot |S_aS_c|$ a $|\sphericalangle CAT| = |\sphericalangle S_cS_aT|$. Proto jsou trojúhelníky S_aS_cT, ACT podobné podle věty uus (obr. 2.12b). Z této podobnosti vyplývá rovnost velikostí úhlů ATC, S_aTS_c a jelikož T leží na $\overline{AS_a}$, musí být úhly ATC, S_aTS_c vrcholové. Tedy, $T \in \overline{CS_c}$. Z podobnosti trojúhelníků S_aS_cT, ACT vyplývá také, že T dělí i těžnici t_c v poměru $1 : 2$, neboli vzdálenost bodu T od středu strany c je rovna jedné třetině délky těžnice t_c . \square



Obrázek 2.12: K důkazu věty 2.9

Průsečík těžnic nazýváme *těžištěm* trojúhelníku.

Strany trojúhelníku jsou úsečky a osu úsečky jsme již definovali v kapitole 1 (str. 20), není proto třeba zvlášť definovat pojem *osa strany* trojúhelníku. Obdobně není třeba zavádět *osu vnitřního úhlu* trojúhelníku, poznamenejme jen,

že se jí často říká jednoduše *osa úhlu* trojúhelníku. Jelikož trojúhelník má tři strany a tři vnitřní úhly, má také tři osy stran a tři osy úhlů.

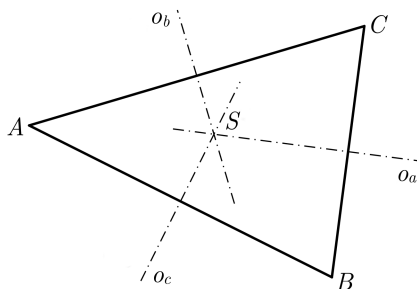
Věta 2.10

Osy stran trojúhelníku jsou přímky téhož svazku.

Důkaz:

Mějme trojúhelník ABC (obr. 2.13). Osou o_a strany a je množina všech bodů X , pro které platí $|XB| = |XC|$. Obdobně pro každý bod Y osy o_b strany b platí $|YA| = |YC|$. Jelikož strany a, b nejsou rovnoběžné, nemohou být ani osy o_a, o_b rovnoběžné. Označme S průsečík os o_a, o_b . Jelikož $S \in o_a \wedge S \in o_b$, je $|SB| = |SC| = |SA|$. Bod S má tedy stejnou vzdálenost od bodu B jako od bodu A , proto musí ležet také na ose o_c strany c . Neboli, všechny tři osy stran prochází týmž bodem S .

□



Obrázek 2.13: Osy stran trojúhelníku

Věta 2.11

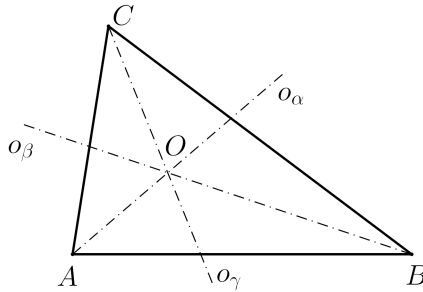
Osy vnitřních úhlů trojúhelníku jsou přímky téhož svazku.

Důkaz:

Mějme trojúhelník ABC (obr. 2.14). Osou o_α úhlu α je množina všech bodů X , které jsou stejně vzdálené od ramen AB, AC . Obdobně je každý bod Y osy o_β úhlu β stejně vzdálen od ramen BA, BC . Označme O průsečík os o_α, o_β . Jelikož $O \in o_\alpha \wedge O \in o_\beta$, je bod O stejně vzdálen od přímek AB, BC i AC a zároveň je vnitřním bodem trojúhelníku ABC . Bod O má tedy stejnou vzdálenost od

ramen CA , CB úhlu γ , a proto musí ležet také na ose o_γ úhlu γ .
Neboli, všechny tři osy vnitřních úhlů prochází týmž bodem O .

☒

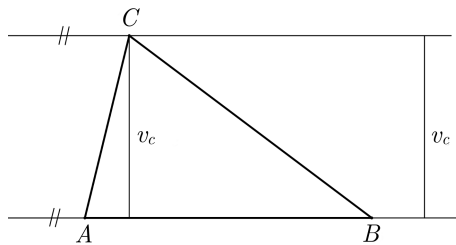


Obrázek 2.14: Osy vnitřních úhlů trojúhelníku

Výškou trojúhelníku rozumíme přímku vedenou z vrcholu trojúhelníku kolmo k protilehlé straně.

Poznámky:

- Jako výšku trojúhelníku také, zpravidla při výpočtech, označujeme vzdálenost vrcholu trojúhelníku od přímky, na níž leží protilehlá strana. Přeneseně pak lze výškou nazvat i úsečku, která tuto vzdálenost znázorňuje (obr. 2.15).



Obrázek 2.15: Výška trojúhelníku jako úsečka

- Výšky obvykle značíme písmenem v s dolním indexem strany, k níž je výška kolmá. Například v trojúhelníku ABC označíme v_a výšku vedenou

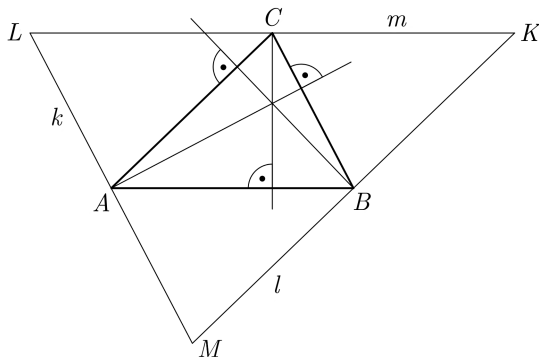
z vrcholu A kolmo ke straně a . Toto značení se používá i pro výšky ve smyslu úseček, resp. vzdáleností (potom v_a označuje vzdálenost bodu A od přímky BC).

Věta 2.12

Výšky trojúhelníku jsou přímky téhož svazku.

Důkaz:

Mějme trojúhelník ABC (obr. 2.16). Veďme bodem A rovnoběžku k se stranou BC , bodem B rovnoběžku l se stranou AC a bodem C rovnoběžku m se stranou AB . Označme K, L, M po řadě průsečíky přímek l a m , k a m , k a l . Získali jsme tak trojúhelníky KCB , BAM a CLA . Ze ZT 4 (str. 17) vyplývá shodnost úhlů BAC , ACL , MBA , shodnost úhlů ABC , KCB , BAM a shodnost úhlů ACB , KBC , CAL . Dále má každý z trojúhelníků KCB , BAM , CLA společnou stranu s trojúhelníkem ABC . Z uvedeného vyplývá, že trojúhelníky ABC , BAM , KCM , CLA jsou shodné dle věty *sus*. Shodují se tedy i v délkách odpovídajících si stran, a proto je bod C středem strany KL , bod A středem strany LM a bod B středem strany KM . Výšky trojúhelníku ABC tedy splývají s osami stran trojúhelníku KLM a osy stran se dle věty 2.10 protínají v jednom bodě. \square

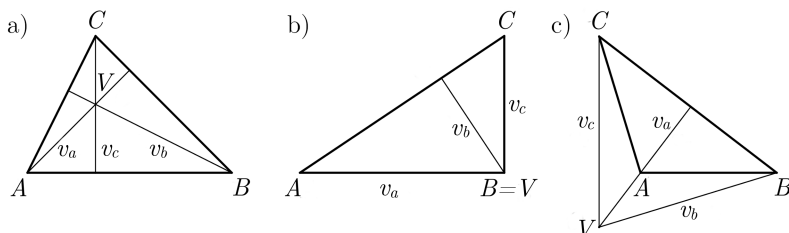


Obrázek 2.16: Výšky trojúhelníku

Průsečík výšek nazýváme *ortocentrem* trojúhelníku.

Poznámka:

- V ostroúhlém trojúhelníku je ortocentrum V vnitřním bodem trojúhelníku (obr. 2.17a). V pravoúhlém trojúhelníku dvě z výšek obsahují odvěsnu (obr. 2.17b), proto je ortocentrem V vrchol pravého úhlu. Dvě z výšek tupoúhlého trojúhelníku mají s trojúhelníkem společný pouze vrchol, z něž jsou vedeny, a ortocentrum V leží vně tohoto trojúhelníku (obr. 2.17c).



Obrázek 2.17: Ortocentrum ostroúhlého, pravoúhlého a tupoúhlého trojúhelníku

Věta 2.13 (*Meneláova³ věta*)

V rovině je dán trojúhelník ABC . Nechtě jsou K, L, M po řadě body na přímkách AB, BC, CA , které nesplývají s žádným z vrcholů trojúhelníku ABC . Potom body K, L, M jsou kolineární právě tehdy, když $(ABK) \cdot (BCL) \cdot (CAM) = 1$.

Důkaz viz podkapitola 10.4, str. 182.

Věta 2.14 (*Cèvova⁴ věta*)

V rovině je dán trojúhelník ABC . Nechtě jsou K, L, M po řadě body na přímkách AB, BC, CA , které nesplývají s žádným z vrcholů trojúhelníku ABC . Přímký CK, AL, BM procházejí jedním bodem, nebo jsou navzájem rovnoběžné právě tehdy, když $(ABK) \cdot (BCL) \cdot (CAM) = -1$.

Důkaz viz podkapitola 10.4, str. 184.

³Meneláos Alexandrijský (konec 1. st.) byl starořecký matematik. Zabýval se nejen rovinou, ale také sférickou geometrií a trigonometrií. Jeho dílo se dochovalo pouze v arabských překladech.

⁴Giovanni Benedetto Cèva (1647–1734) byl italský matematik a fyzik. Znovuobjevil Meneláovu větu a v roce 1678 v časopise *De Lineis Rectis* publikoval větu k ní duální včetně důkazu. Přestože tutéž větu již dokázal v 11. století Yusuf Al-Mu'taman ibn Húid, je dnes nazývána po svém znovuobjeviteli větou *Cèvovou*.

2.5 Kružnice ve vztahu k trojúhelníku

Kružnici, která prochází všemi vrcholy daného trojúhelníku, nazveme *kružnicí opsanou* danému trojúhelníku.

Kružnici, která se dotýká všech stran daného trojúhelníku, nazveme *kružnicí vepsanou* danému trojúhelníku.

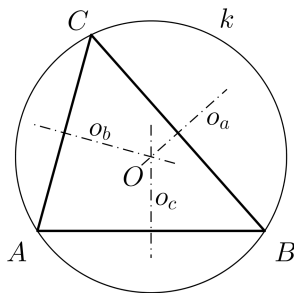
Věta 2.15

Každému trojúhelníku lze opsat kružnici.

Důkaz:

Mějme trojúhelník ABC (obr. 2.18). Dle věty 2.10 se osy stran trojúhelníku protínají v jednom bodě O , přičemž $|OA| = |OB| = |OC|$. Sestrojíme-li tedy kružnici $k(O, |OA|)$, bude $A \in k$, $B \in k$ i $C \in k$.

☒



Obrázek 2.18: Kružnice opsaná trojúhelníku

Poznámky:

- ▶ Věta 2.15 jinými slovy říká, že kružnice je jednoznačně určena třemi nekolineárními body.
- ▶ Z důkazu věty 2.15 vyplývá, že středem kružnice opsané trojúhelníku je průsečík os stran tohoto trojúhelníku.

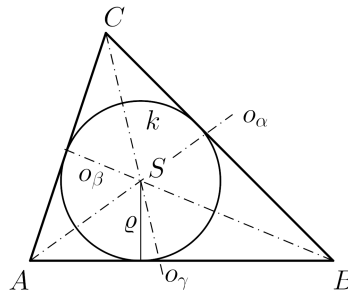
Věta 2.16

Každému trojúhelníku lze vepsat kružnici.

Důkaz:

Mějme trojúhelník ABC (obr. 2.19). Dle věty 2.11 se osy vnitřních úhlů trojúhelníku protínají v jednom bodě S , který je stejně vzdálen od všech tří stran trojúhelníku ABC . Tuto vzdálenost označme ρ . Sestrojíme-li tedy kružnici $k(S, \rho)$, bude se dotýkat všech stran trojúhelníku.

□



Obrázek 2.19: Kružnice vepsaná trojúhelníku

Kružnice popsaná v důkazu věty 2.16 je jedinou kružnicí dotýkající se všech stran trojúhelníku, není však jedinou kružnicí dotýkající se současně všech tří přímk, na nichž leží strany trojúhelníku.

Kružnici, která se dotýká právě jedné strany daného trojúhelníku a dvou přímk, na nichž leží zbylé strany tohoto trojúhelníku, nazveme *kružnicí připsanou* danému trojúhelníku.

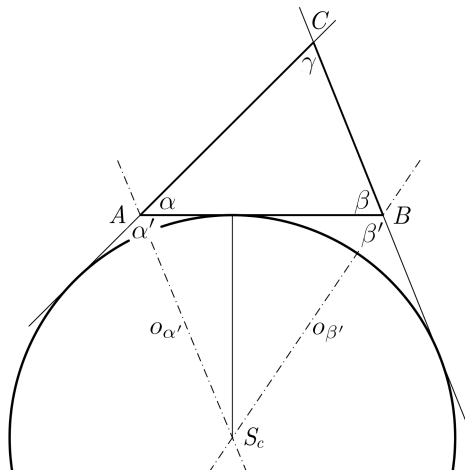
Věta 2.17

Každému trojúhelníku lze připsat tři kružnice.

Důkaz:

Mějme trojúhelník ABC (obr. 2.20). Označme α' vnější úhel při vrcholu A , který leží v polorovině ACB , a β' vnější úhel při vrcholu B , který leží v polorovině BCA . Na ose $o_{\alpha'}$ úhlu α' leží body stejně vzdálené od přímk AB a AC , obdobně na ose $o_{\beta'}$ úhlu β' leží body stejně vzdálené od přímk AB a BC . Průsečík S_c os $o_{\alpha'}$, $o_{\beta'}$ je tedy stejně vzdálen od přímk AB , BC i AC . Zároveň leží

v úhlu ACB stejně jako strana c trojúhelníku ABC . Bod S_c je tedy středem kružnice k_c připsané ke straně c trojúhelníku ABC , poloměrem ρ_c kružnice k_c je vzdálenost bodu S_c od úsečky AB . Analogicky lze sestavit kružnice připsané ke stranám a a b . \square



Obrázek 2.20: Kružnice připsaná trojúhelníku

Věta 2.18

Mějme libovolný trojúhelník a označme T jeho těžiště, V jeho ortocentrum a S střed kružnice jemu opsané. Potom body T , V , S jsou kolineární a buď splývají, nebo $(SVT) = -\frac{1}{2}$.

Důkaz viz podkapitola 10.4, str. 186.

Kromě opsané a vepsané kružnice a kružnic připsaných se s trojúhelníkem pojí ještě například *Feuerbachova*⁵ *kružnice*, neboli tzv. *kružnice devíti bodů*. Na této kružnici leží středy stran trojúhelníku, paty výšek a středy úseček AV , BV a CV , kde V je ortocentrem trojúhelníku ABC . Existenci Feuerbachovy kružnice, resp. skutečnost, že uvedených devět bodů opravdu náleží jedné kružnici, dokážeme v kapitole 4 (viz věta 4.15, str. 78).

⁵Karl Wilhelm von Feuerbach (1800–1834) byl německý geometr. Větu o kružnici devíti bodů publikoval v roce 1822.

2.6 Úlohy

- 2.1** Jsou dány délky dvou stran trojúhelníku KLM : $k = 27$ cm, $l = 39$ cm. Jakým podmínkám musí vyhovovat délka strany m ?
- 2.2** V jakých trojúhelnících leží průsečík těžnic, výšek, os stran, os úhlů uvnitř/na obvodu/vně trojúhelníku? Kdy tyto body splývají?
- 2.3** Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Nad jeho stranami AC a AB jsou vně trojúhelníku ABC sestrojeny rovnostranné trojúhelníky ACM a ANB . Dokažte, že $|BM| = |CN|$.
- 2.4** Dokažte, že výška rovnoramenného trojúhelníku kolmá k jeho základně dělí tento trojúhelník na dva shodné trojúhelníky.
- 2.5** V rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou AB je velikost úhlu α rovna 30° . Dokažte, že osy ramen tohoto trojúhelníku rozdělují jeho základnu AB na tři shodné díly.
- 2.6** Vnitřním bodem M konvexního úhlu AVB vedte přímku m tak, aby úsečka KL , kde $K = m \cap \overleftrightarrow{VA}$, $L = m \cap \overleftrightarrow{VB}$, byla bodem M dělena v poměru $2 : 3$.
- 2.7** Dokažte, že v trojúhelníku ABC platí: $v_a : v_b : v_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.
- 2.8** Dokažte, že spojnice pat dvou výšek ostroúhlého trojúhelníku odděluje z něho trojúhelník danému trojúhelníku podobný.
- 2.9** Dokažte, že v trojúhelníku ABC platí: $\frac{1}{2}(a+b+c) < t_a + t_b + t_c < a+b+c$.
- 2.10** Dokažte věty 2.9, 2.11 a 2.12 pomocí Cèvovy, resp. Meneláovy věty (tj. vět 2.14 a 2.13).

Kapitola 3

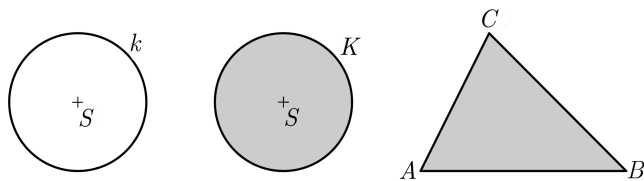
Kružnice, kruh

Kružnici jsme již nadeřinovali v kapitole 1 (str. 22) pomocí vzdálenosti bodů. Nyní se podrobněji podíváme na rozdíl mezi kružnicí a kruhem, vlastnosti kružnice a vztahy mezi kružnicí a přímkou i mezi dvěma kružnicemi.

3.1 Základní pojmy a vlastnosti

Připomeňme, že kružnici definujeme jako množinu bodů ležících ve vzdálenosti r od bodu (středu) S . Obdobně definujeme i kruh.

V rovině je dán bod S a úsečka délky r . Množinu všech bodů dané roviny, jejichž vzdálenost od bodu S je menší nebo rovna r , nazveme *kruhem* se středem S a poloměrem r .



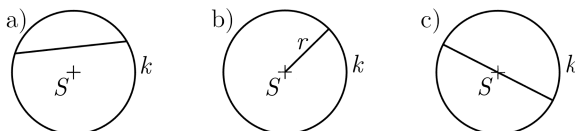
Obrázek 3.1: Kružnice, kruh, trojúhelník (porovnání)

Poznámky:

- Kruh obvykle značíme velkým písmenem latinské abecedy, stejně jako u kružnice přepisujeme do závorčky označení středu a poloměru, popřípadě přímo velikost poloměru. Například kruh K se středem H a poloměrem 5 cm zapíšeme symbolicky $K(H, 5 \text{ cm})$.
- Z definice vyplývá, že kružnice je křivkou (a nekonvexním útvarem), zatímco kruh je, stejně jako například trojúhelník, plošným (a konvexním) útvarem (obr. 3.1). V dalším textu této kapitoly, pokud nebudeme chtít záměrně pracovat s plochou, budeme definovat pojmy pouze pro kružnici. Analogicky lze však tytéž pojmy zpravidla definovat také pro kruh.

Číslo rovné dvojnásobku poloměru dané kružnice nazveme *průměrem* této kružnice.

Úsečku, jejíž krajní body leží na kružnici, nazýváme *tětivou* této kružnice (obr. 3.2a).



Obrázek 3.2: Tětiva, poloměr a průměr kružnice

Poznámka:

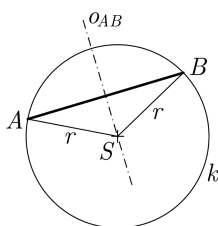
- Průměr i poloměr kružnice lze chápat jako délku úsečky, tj. kladné reálné číslo (viz definice výše), ale také jako geometrický objekt – úsečku. Potom *poloměrem* kružnice je každá úsečka, jejímž jedním krajním bodem je střed dané kružnice a druhým krajním bodem je libovolný bod této kružnice (obr. 3.2b). *Průměrem* kružnice je každá tětiva této kružnice, která prochází jejím středem (obr. 3.2c).

Věta 3.1

Osa libovolné tětivy dané kružnice prochází středem této kružnice.

Důkaz:

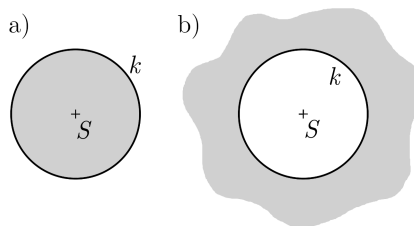
Mějme libovolnou tětivu AB kružnice $k(S, r)$. Osu úsečky jsme v kapitole 1 (str. 20) definovali jako množinu bodů stejně vzdálených od krajních bodů této úsečky. Krajními body tětivy jsou body A, B , které jsou však zároveň body kružnice k , proto $|AS| = |BS| = r$. Bod S je tedy stejně vzdálen od krajních bodů úsečky AB , a proto leží na její ose o_{AB} (obr. 3.3). \square



Obrázek 3.3: Osa tětivy

Mějme kružnici $k(S, r)$. Množinu všech bodů v rovině, jejichž vzdálenost od bodu S je menší než r , nazveme *vnitřní oblastí kružnice k* (obr. 3.4a).

Množinu všech bodů v rovině, jejichž vzdálenost od bodu S je větší než r , nazveme *vnější oblastí kružnice k* (obr. 3.4b).



Obrázek 3.4: Vnitřní a vnější oblast kružnice

Poznámky:

- Leží-li bod A ve vnitřní/vnější oblasti kružnice k , říkáme také, že „bod A je vnitřním/vnější bodem kružnice k “.

- Sjednocením kružnice $k(S, r)$ s její vnitřní oblastí získáme kruh $K(S, r)$. Kružnice k tvoří *hranici* kruhu K .

3.2 Kružnice a přímka

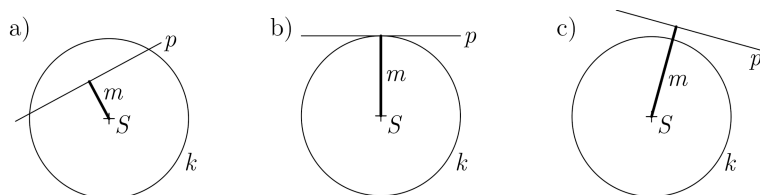
Pro danou kružnici a přímku rozlišujeme tři různé vzájemné polohy.

Mějme kružnici $k(S, r)$ a přímku p , jejíž vzdálenost od bodu S je rovna m .
Potom pro

$m < r$ nazveme přímku p *sečnou* kružnice k (obr. 3.5a),

$m = r$ nazveme přímku p *tečnou* kružnice k (obr. 3.5b),

$m > r$ nazveme přímku p *vnější přímkou* kružnice k (obr. 3.5c).



Obrázek 3.5: Sečna, tečna a vnější přímka kružnice

Věta 3.2

Průnikem kružnice a její sečny jsou právě dva body.

Důkaz:

Uvažujme kružnici $k(S, r)$ a její sečnu p , přičemž $|Sp| < r$. Podle ZT 5 (str. 20) existují na přímce p právě dva různé body A, B takové, že $|AS| = |BS| = r$, tedy $A \in k$ a $B \in k$. ☒

Poznámka:

- Označíme-li společné body sečny a kružnice A, B , říkáme také, že „sečna vytíná na kružnici tětivu AB “.

Věta 3.3

Průnikem kružnice a její tečny je právě jeden bod.

Důkaz:

Věta je přímým důsledkem ZT 7 (str. 24). ☒

Poznámka:

- ▶ Společný bod kružnice a její tečny nazýváme *bodem dotyku* dané tečny a kružnice. Je-li bodem dotyku tečny t a kružnice k bod T , mluvíme o přímce t jako o „tečně kružnice k v bodě T “.

Věta 3.4

Průnikem kružnice a její vnější přímkou je prázdná množina.

Důkaz:

Uvažujme kružnici $k(S, r)$ a její vnější přímkou p , přičemž $|Sp| = m$. Pro každý bod X přímkou p platí, že $|XS| \geq m$, kde $m > r$. Tedy $\forall X \in p : X \notin k$. ☒

Věta 3.5

Tečna t kružnice $k(S, r)$ v bodě T je kolmá na poloměr ST .

Důkaz:

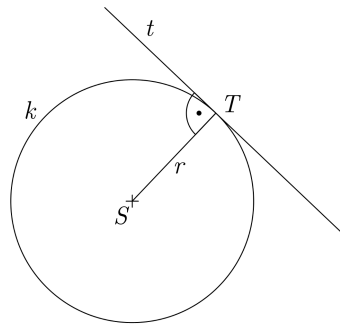
Věta je přímým důsledkem ZT 7 (str. 24). ☒

Větu 3.5 aplikujeme při konstrukci tečny kružnice „v daném bodě“¹. Je-li dána kružnice k se středem S a její bod T , tečna v bodě T je kolmá na poloměr ST (obr. 3.6).

Pokud rýsujeme tečnu kružnice a nemáme zadaný její bod dotyku, musíme tento bod nejprve nalézt. K typickým úlohám tohoto typu patří konstrukce tečny rovnoběžné s danou přímkou, kolmé k dané přímce a „z bodu“².

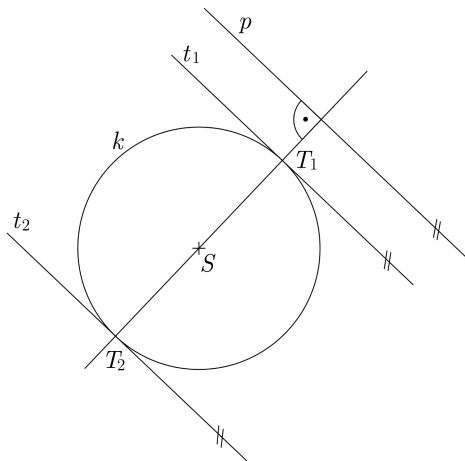
¹Touto formulací je myšlena tečna procházející daným bodem, který leží na dané kružnici.

²Formulací „z bodu“ rozumíme konstrukci tečny, která prochází daným vnějším bodem kružnice.



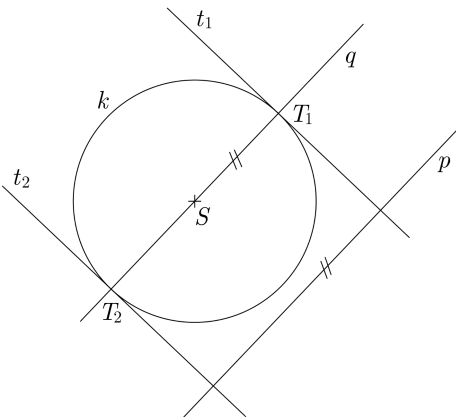
Obrázek 3.6: Tečna kružnice v daném bodě

Je-li dána kružnice k se středem S a přímka p , s níž má být hledaná tečna t rovnoběžná, sestrojíme nejprve bod dotyku T tečny t a kružnice k . Tímto bodem je průsečík kružnice k s přímkou q , kterou vedeme bodem S kolmo k přímce p . Jelikož takové průsečíky existují dva, má úloha dvě řešení (obr. 3.7).



Obrázek 3.7: Tečna kružnice rovnoběžná s danou přímkou

Je-li dána kružnice k se středem S a přímka p , k níž má být hledaná tečna t kolmá, sestrojíme opět nejprve bod dotyku T tečny t a kružnice k . Tímto bodem je průsečík kružnice k s přímkou q , kterou vedeme bodem S rovnoběžně s přímkou p . Jelikož takové průsečíky existují dva, má úloha dvě řešení (obr. 3.8).



Obrázek 3.8: Tečna kružnice kolmá k dané přímce

K sestrojení tečny z bodu využijeme tzv. Thalétovu³ větu.

Věta 3.6 (*Thalétova věta*)

V rovině je dána úsečka AB . Množinou vrcholů X všech pravých úhlů AXB dané roviny je kružnice s průměrem AB vyjma bodů A, B .

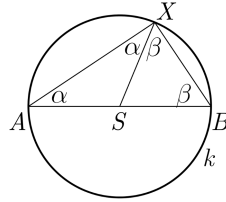
Důkaz:

Označme k kružnici s průměrem AB a S její střed. Nejprve dokážeme, že každý bod X této kružnice (vyjma bodů A, B) je vrcholem pravého úhlu AXB . V další části důkazu ukážeme, že žádný jiný bod není vrcholem pravého úhlu.

Mějme kružnici $k(S, r)$ a její průměr AB . Zvolme libovolný bod X , kde $X \in k \wedge X \neq A \wedge X \neq B$. Dále označme $|\sphericalangle BAX| = \alpha$ a $|\sphericalangle ABX| = \beta$ (obr. 3.9). Chceme ukázat, že $|\sphericalangle AXB| = 90^\circ$. Trojúhelníky AXS a BXS jsou rovnoramenné a dle věty 2.5 (str. 32) platí $|\sphericalangle SAX| = |\sphericalangle ASX| = \alpha$ a $|\sphericalangle SBX| = |\sphericalangle BXS| = \beta$. Zároveň je $|\sphericalangle AXB| = |\sphericalangle ASX| + |\sphericalangle BXS| = \alpha + \beta$. V trojúhelníku ABX dle věty 2.2 (str. 27) platí $|\sphericalangle XAB| + |\sphericalangle ABX| + |\sphericalangle AXB| = 180^\circ$, tedy $\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ$, odkud úpravou získáme, že $\alpha + \beta = 90^\circ$.

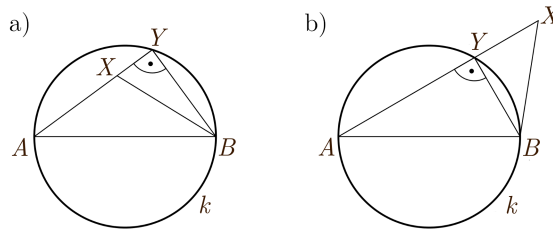
Bod X kružnice k je tedy vrcholem pravého úhlu AXB .

³Thalés z Milétu (~ 624 př. n. l. – ~ 548 př. n. l.) byl řecký předsókratovský filosof, geometr a astronom. Jeho dílo se téměř nedochovalo, od starověku je mu však připisována řada objevů mimo jiné v geometrii.



Obrázek 3.9: Thalétova věta, bod na kružnici

Nyní se podíváme na body neležící na kružnici k . Pro vnitřní bod X kružnice k ležící na \overline{AB} je $|\sphericalangle AXB| = 180^\circ$. Uvažujeme-li vnitřní bod X kružnice k neležící na \overline{AB} (obr. 3.10a), potom pro průsečík Y polopřímky AX s kružnicí k platí, že $|\sphericalangle AYB| = 90^\circ$. Trojúhelník BXY je tedy pravoúhlý a jeho vnitřní úhel BXY musí být ostrý. Jelikož je úhel AXB vedlejší k úhlu BXY , je $|\sphericalangle AXB| > 90^\circ$.



Obrázek 3.10: Thalétova věta, vnitřní a vnější bod kružnice

Pro vnější bod X kružnice k ležící na \overleftrightarrow{AB} je $|\sphericalangle AXB| = 0^\circ$. Uvažujeme-li vnější bod X kružnice k , který neleží na \overleftrightarrow{AB} (obr. 3.10b), potom alespoň jedna z polopřímek AX , BX protíná kružnici k v bodě Y ($Y \neq A \wedge Y \neq B$). Búno⁴ předpokládejme, že $Y = \overrightarrow{AX} \cap k$. Pro průsečík Y polopřímky AX s kružnicí k platí, že $|\sphericalangle AYB| = 90^\circ$. Trojúhelník BXY je tedy pravoúhlý a jeho vnitřní úhel $YXB = AXB$ musí být ostrý, tedy $|\sphericalangle AXB| < 90^\circ$. \boxtimes

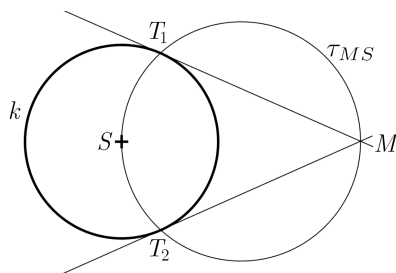
Poznámky:

- Pro kružnici s daným průměrem AB používáme ustálený obrat „kružnice nad průměrem AB “.

⁴Bez újmy na obecnosti.

- Kružnice nad průměrem AB vyjma bodů A, B se nazývá *Thalétova kružnice* nad průměrem AB . Často bývá označována τ_{AB} . Poznamenejme, že Thalétova kružnice díky vypuštění dvou bodů vlastně není kružnicí.

Je-li dána kružnice k se středem S a její vnější bod M , tečnu t z bodu M ke kružnici k sestrojíme následovně. Nad průměrem MS sestrojíme Thalétovu kružnici τ_{MS} . Její průsečík T s kružnicí k je bodem dotyku hledané tečny t , neboť v důsledku věty 3.6 jsou přímkami MT a TS kolmé. Jelikož jsou tyto průsečíky dva (viz dále podkapitola 3.4), má úloha dvě řešení (obr. 3.11).



Obrázek 3.11: Tečna z bodu ke kružnici

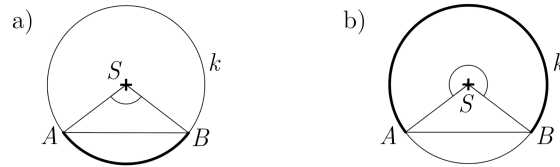
3.3 Kružnicový oblouk

Mějme kružnici $k(S, r)$ a tětivu AB kružnice k , která není průměrem. Body A, B rozdělují kružnici na dva tzv. *kružnicové oblouky* AB (\widehat{AB}).

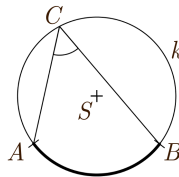
Dutý úhel ASB je *středovým úhlem* příslušným menšímu z oblouků AB (obr. 3.12a), vypuklý úhel ASB je *středovým úhlem* příslušným většímu z oblouků AB (obr. 3.12b).

Je-li AB průměrem kružnice k , pak každý z kružnicových oblouků AB nazýváme též *polokružnicí*.

Mějme kružnicový oblouk AB kružnice $k(S, r)$ a bod $C \in k \wedge C \notin \widehat{AB}$. Potom dutý úhel ACB nazveme *obvodovým úhlem* příslušným kružnicovému oblouku AB (obr. 3.13).



Obrázek 3.12: Středový úhel příslušný kružnicovému oblouku



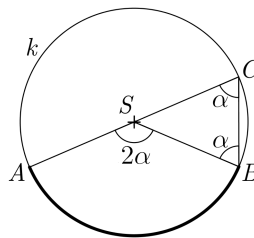
Obrázek 3.13: Obvodový úhel příslušný kružnicovému oblouku

Věta 3.7 (o obvodovém a středovém úhlu)

Velikost středového úhlu příslušejícího danému kružnicovému oblouku je dvojnásobkem velikosti libovolného obvodového úhlu příslušejícího témuž oblouku.

Důkaz:

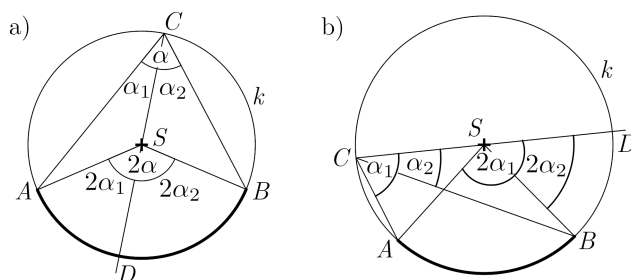
Mějme oblouk AB kružnice $k(S, r)$ a bod $C \in k \wedge C \notin \widehat{AB}$. Označme α velikost dutého úhlu ACB . Nejprve předpokládejme, že body A, S, B nejsou kolineární. Uvažujeme-li menší oblouk AB , pak mohou nastat tři disjunktní případy:



Obrázek 3.14: K důkazu věty 3.7, část (a)

- (a) Střed S leží na jednom z ramen úhlu ACB . Nechť bod S leží buď na rameni CA , tedy $|\sphericalangle SCB| = |\sphericalangle ACB| = \alpha$ (obr. 3.14). Trojúhelník BCS je rovnoramenný se základnou BC , tedy dle věty 2.5 (str. 32) platí $|\sphericalangle SBC| = \alpha$. Z věty 2.3 (str. 28) plyne, že $|\sphericalangle ASB| = 2\alpha$.
- (b) Střed S je vnitřním bodem úhlu ACB . Průsečík přímky CS s danou kružnicí, který je různý od bodu C , označíme D . Úhly ACD a ASD jsou obvodový a středový úhel příslušející oblouku AD , podobně úhly DCB a DSB jsou obvodový a středový úhel příslušející oblouku DB (obr. 3.15a). Označíme-li $|\sphericalangle ACD| = \alpha_1$ a $|\sphericalangle DCB| = \alpha_2$, potom dle části (a) tohoto důkazu bude $|\sphericalangle ASD| = 2\alpha_1$ a $|\sphericalangle DSB| = 2\alpha_2$. Zároveň však platí, že

$$\begin{aligned} |\sphericalangle ASB| &= |\sphericalangle ASD| + |\sphericalangle DSB| = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = \\ &= 2 \cdot (|\sphericalangle ACD| + |\sphericalangle DCB|) = 2 \cdot |\sphericalangle ACB| = 2\alpha. \end{aligned}$$



Obrázek 3.15: K důkazu věty 3.7, části (b) a (c)

- (c) Střed S je vnějším bodem úhlu ACB . Průsečík přímky CS s danou kružnicí, který je různý od bodu C , označíme opět D (obr. 3.15b). Označíme-li $|\sphericalangle ACD| = \alpha_1$ a $|\sphericalangle DCB| = \alpha_2$, potom dle části (a) a analogicky jako v části (b) tohoto důkazu bude $|\sphericalangle ASD| = 2\alpha_1$ a $|\sphericalangle DSB| = 2\alpha_2$. Zároveň však platí, že
- $$\begin{aligned} |\sphericalangle ASB| &= ||\sphericalangle ASD| - |\sphericalangle DSB|| = |2\alpha_1 - 2\alpha_2| = 2|\alpha_1 - \alpha_2| = \\ &= 2 \cdot ||\sphericalangle ACD| - |\sphericalangle DCB|| = 2 \cdot |\sphericalangle ACB| = 2\alpha. \end{aligned}$$

Uvažujeme-li větší oblouk AB nebo jsou-li body A, S, B kolineární, je bod S vždy vnitřním bodem obvodového úhlu ACB a platí část (b) výše.

☒

Věta 3.8

Všechny obvodové úhly příslušné témuž oblouku kružnice jsou shodné.

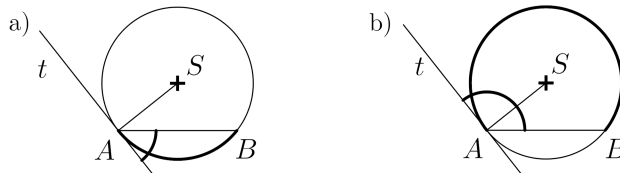
Důkaz:

Věta je přímým důsledkem věty 3.7, neboť každý obvodový úhel má poloviční velikost oproti příslušnému středovému úhlu a danému oblouku přísluší právě jeden úhel středový.

☒

Mějme tětivu AB kružnice $k(S, r)$, která není průměrem, a tečnu t kružnice k v bodě A . Ostrý úhel, který svírá tětiva AB s tečnou t nazveme *úsekovým úhlem* příslušným k menšímu oblouku AB (obr. 3.16a), tupý úhel, který svírá tětiva AB s tečnou t nazveme *úsekovým úhlem* příslušným k většímu oblouku AB (obr. 3.16b).

Je-li \overline{AB} průměrem kružnice k , potom úsekovým úhlem rozumíme libovolný z pravých úhlů, který svírá tečna t kružnice k v bodě A s úsečkou AB .



Obrázek 3.16: Úsekový úhel příslušný kružnicovému oblouku

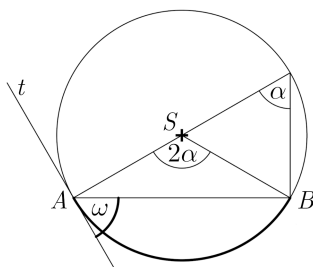
Věta 3.9 (o úsekovém úhlu)

Velikost úsekového úhlu příslušného kružnicovému oblouku AB je rovna velikosti obvodového úhlu příslušného témuž oblouku.

Důkaz:

Mějme kružnicový oblouk AB kružnice $k(S, r)$ příslušný středovému úhlu o velikost 2α a tečnu t kružnice k v bodě A (obr. 3.17). Velikost

obvodového úhlu příslušného oblouku AB je rovna α . Trojúhelník ABS je rovnoramenný, proto dle vět 2.5 (str. 32) a 2.2 (str. 27) je $|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle SBA| = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$. Velikost úsekového úhlu příslušného oblouku AB označme ω . Jelikož sjednocením tohoto úsekového úhlu a vnitřního úhlu BAS trojúhelníku ABS je úhel pravý (tečna t je dle věty 3.5 kolmá na poloměr SA), je $\omega = \alpha$. \square



Obrázek 3.17: Velikost úsekového úhlu

Poznámka:

- Věty o úhlech příslušných kružnicovému oblouku lze využít k elegantním důkazům jiných planimetrických vět, například Thalétovy věty (str. 51).

3.4 Vzájemná poloha dvou kružnic

Kružnice, které mají tentýž střed a leží v jedné rovině, nazýváme *soustředné*. Kružnice, jejichž středy jsou různé, nazýváme *nesoustředné*.

Dále se budeme zabývat vzájemnou polohou dvou různých kružnic (tj. kružnic, které mají různý střed nebo různý poloměr) ležících v téže rovině.

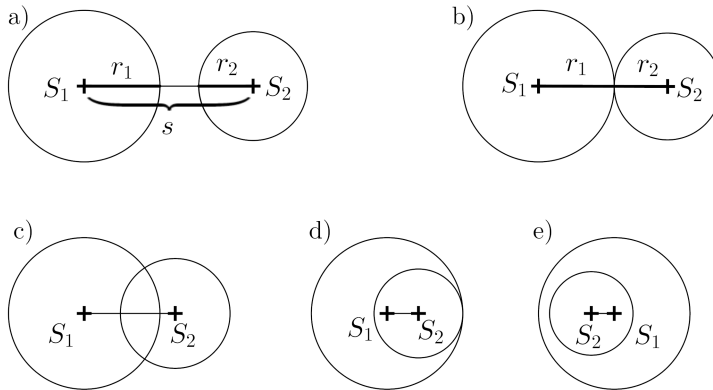
Mějme kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ takové, že $S_1 \neq S_2$. Úsečka S_1S_2 se nazývá *středná* kružnic k_1, k_2 .

Poznámka:

- Jako středná je někdy označována i přímka určená středy daných kružnic.

Dle vzájemného vztahu délky s středné S_1S_2 kružnic $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ a součtu/rozdílu poloměrů r_1, r_2 rozlišujeme následujících pět *vzájemných poloh* dvou nesoustředných *kružnic*.

Je-li $s > r_1 + r_2$, říkáme, že kružnice k_1, k_2 leží *navzájem vně* (obr. 3.18a).
 Je-li $s = r_1 + r_2$, říkáme, že kružnice k_1, k_2 mají *vnější dotyk* (obr. 3.18b).
 Je-li $r_1 + r_2 > s > |r_1 - r_2|$, říkáme, že kružnice k_1, k_2 se *protínají* (obr. 3.18c).
 Je-li $s = |r_1 - r_2|$, říkáme, že kružnice k_1, k_2 mají *vnitřní dotyk* (obr. 3.18d).
 Je-li $s < |r_1 - r_2|$, říkáme, že jedna z kružnic k_1, k_2 leží *uvnitř druhé* (obr. 3.18e).



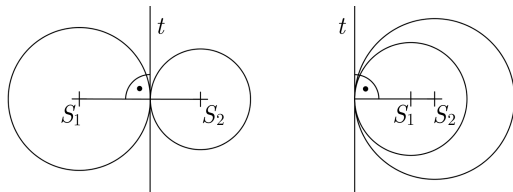
Obrázek 3.18: Vzájemná poloha dvou kružnic

Poznámka:

- V klasifikaci vzájemných poloh dvou kružnic výše předpokládáme nesoustřednost kružnic, aby byla zajištěna existence jejich středné. Lze však připustit nulovou délku středné a dodefinovat, že soustředné kružnice s různými poloměry jsou speciálním případem situace, kdy jedna z kružnic leží uvnitř druhé.

Z výše uvedené definice vyplývá, že pro středy kružnic $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ a každý ze společných bodů A, B protínajících se kružnic platí trojúhelníková nerovnost (ZT 9, str. 25), tedy body S_1, S_2, A , resp. S_1, S_2, B , jsou nekolineární.

Naopak v případě dotýkajících se kružnic z rovnosti $s = r_1 + r_2$, resp. $s = |r_1 - r_2|$, plyne, že společný bod kružnic, tzv. *bod dotyku*, leží na přímce S_1S_2 . Díky tomu existuje společná tečna dvou dotýkajících se kružnic, je jí kolmice na střednu daných kružnic vedená jejich bodem dotyku (obr. 3.19).



Obrázek 3.19: Společná tečna dotýkajících se kružnic

Konstrukce společné tečny dvou kružnic v dalších vzájemných polohách je popsána v podkapitole 10.3 (str. 182).

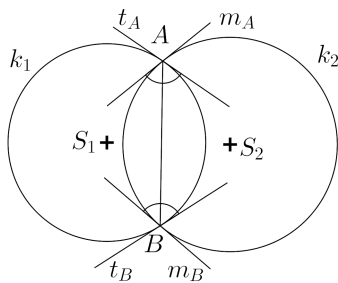
Věta 3.10

Mějme dvě kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$, které se protínají v bodech A , B . Označme t_A , t_B tečny kružnice k_1 v bodech A , B a m_A , m_B tečny kružnice k_2 v bodech A , B . Potom odchylka přímek t_A , m_A je rovna odchylce přímek t_B , m_B .

Důkaz:

Odchylka tečen t_A , m_A je, stejně jako odchylka tečen t_B , m_B , rovna součtu velikostí úsekového úhlu příslušného oblouku AB kružnice k_1 a úsekového úhlu příslušného oblouku AB kružnice k_2 (obr. 3.20).

☒

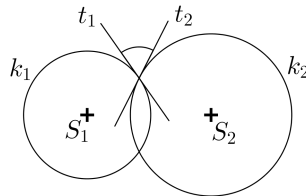


Obrázek 3.20: K důkazu věty 3.10

Mají-li dvě kružnice alespoň jeden společný bod, lze definovat jejich odchylku.

Odchylka dotýkajících se kružnic je nulová.

Odchylku protínajících se kružnic definujeme jako odchylku tečen kružnic v jejich společném bodě (obr. 3.21).



Obrázek 3.21: Odchylka protínajících se kružnic

Kružnice, jejichž odchylka je 90° , nazýváme *ortogonální*.

3.5 Mocnost bodu ke kružnici

Je dán bod M a kružnice $k(S, r)$. Číslo $m_k^M = |MS|^2 - r^2$ nazýváme *mocností bodu M ke kružnici k* .

Poznámky:

- ▶ Je-li bod M vnějším bodem kružnice k , je $m_k^M > 0$.
- ▶ Je-li bod M vnitřním bodem kružnice k , je $m_k^M < 0$.
- ▶ Leží-li bod M na kružnici k , je $|MS| = r$, a tedy $m_k^M = 0$.
- ▶ Z definice mocnosti bodu ke kružnici vyplývá, že mají-li dva různé body A, B stejnou mocnost k dané kružnici $k(S, r)$, potom je $|AS| = |BS|$, a tedy body A, B leží na téže kružnici l soustředné s kružnicí k .

Věta 3.11

Je dána kružnice $k(S; r)$ a bod M , který na ní neleží. Nechť p je libovolná sečna kružnice k procházející bodem M , která kružnici k protíná v bodech A, B .

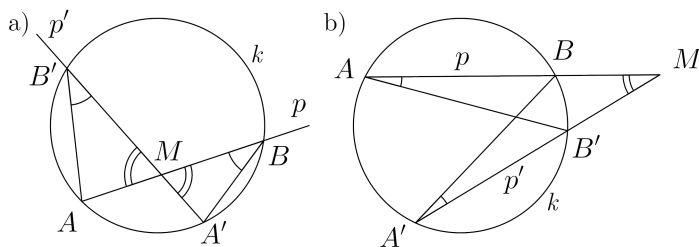
Potom $m_k^M = |MA| \cdot |MB|$ pro vnější bod M kružnice k a $m_k^M = -|MA| \cdot |MB|$ pro vnitřní bod M kružnice k .

Důkaz:

Bod M může ležet ve vnitřní (obr. 3.22a), nebo ve vnější (obr. 3.22b) oblasti kružnice k . V obou případech však postupujeme stejně. Nejprve dokážeme, že hodnota součinu $|MA| \cdot |MB|$ nezávisí na volbě sečny, poté ukážeme, že je rovna $\pm m_k^M$.

Veďme bodem M další libovolnou sečnu p' a označme A' , B' její průsečíky s kružnicí k . Trojúhelníky MBA' a $MB'A$ jsou podobné (uu), neboť mají společný vnitřní úhel u vrcholu M a dále se shodují například ve velikostech vnitřních úhlů u vrcholů B , B' , protože oba tyto úhly jsou obvodovými úhly nad obloukem AA' kružnice k (viz věta 3.8). Z této podobnosti vyplývá rovnost poměrů délek odpovídajících si stran, tedy:

$$\begin{aligned} \frac{|MB|}{|MB'|} &= \frac{|MA'|}{|MA|} \\ |MA| \cdot |MB| &= |MA'| \cdot |MB'| \end{aligned}$$



Obrázek 3.22: Libovolné sečny kružnice k

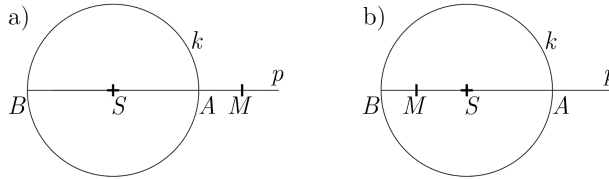
Ukázali jsme, že nezáleží na tom, jakou sečnu p zvolíme. Dále využijeme sečnu procházející středem S kružnice k . Průsečíky sečny p s kružnicí k označíme A , B .

Je-li bod M vnějším bodem kružnice k (obr. 3.23a), potom

$$|MA| \cdot |MB| = (|MS| - r) \cdot (|MS| + r) = |MS|^2 - r^2 = m_k^M.$$

Je-li bod M vnitřním bodem kružnice k (obr. 3.23b), potom

$$|MA| \cdot |MB| = (r - |MS|) \cdot (r + |MS|) = r^2 - |MS|^2 = -m_k^M. \quad \square$$



Obrázek 3.23: Sečna vedená středem kružnice

Věta 3.12

Je dána kružnice $k(S; r)$ a bod M , který leží ve vnější oblasti kružnice k . Nechť t je tečna ke kružnici k z bodu M , jejímž bodem dotyku je bod T . Potom je $m_k^M = |MT|^2$.

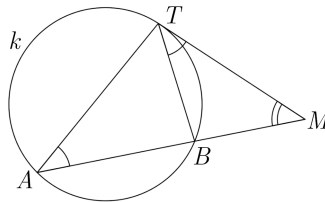
Důkaz:

Z věty 3.11 víme, že pro danou kružnici k a její vnější bod M platí $m_k^M = |MA| \cdot |MB|$, kde A, B jsou průsečíky kružnice k s libovolnou sečnou p vedenou bodem M . Zvolme tedy libovolně takovou sečnu p . Potom trojúhelníky MTA a MBT jsou podobné (uu), neboť se shodují ve velikostech vnitřních úhlů u vrcholu M a dále ve velikostech vnitřních úhlů u vrcholů T a B (obr. 3.24), neboť úhel u vrcholu B je obvodovým úhlem a úhel u vrcholu T je úsekovým úhlem příslušným oblouku AT (viz věta 3.9). Z této podobnosti vyplývá rovnost poměrů délek odpovídajících si stran, tedy:

$$\frac{|MT|}{|MB|} = \frac{|MA|}{|MT|}$$

$$m_k^M = |MA| \cdot |MB| = |MT|^2$$

□



Obrázek 3.24: Tečna a sečna kružnice

Dále se zaměříme na body roviny, které mají ke dvěma daným kružnicím stejnou mocnost.

Máme-li dvě soustředné kružnice $k_1(S; r_1)$, $k_2(S; r_2)$, pak pro $r_1 = r_2$ jsou kružnice k_1 , k_2 totožné, a tedy $m_{k_1}^M = m_{k_2}^M$ pro každý bod M . Pro $r_1 \neq r_2$ naopak neexistuje žádný bod v rovině, který by měl stejnou mocnost k oběma kružnicím, neboť pro každý bod X platí, že $|XS|^2 - r_1^2 \neq |XS|^2 - r_2^2$. Zajímavější situace však nastane pro nesoustředné kružnice.

Věta 3.13

Množinou všech bodů v rovině, které mají stejnou mocnost ke dvěma nesoustředným kružnicím $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$, je přímka.

Důkaz viz podkapitola 6.6 (str. 107).

Množinu bodů, které mají stejnou mocnost ke dvěma daným nesoustředným kružnicím (tedy přímku z věty 3.13), nazveme *chordálovou dvou kružnic*.

Věta 3.14

Mějme tři kružnice $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$, $k_3(S_3; r_3)$ ležící v téže rovině, jejichž středy S_1 , S_2 , S_3 nejsou kolineární. Potom existuje právě jeden bod, který má stejnou mocnost ke kružnicím k_1 , k_2 , k_3 .

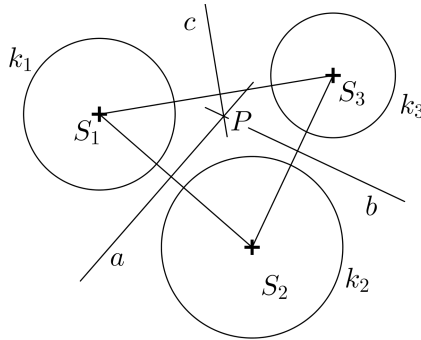
Důkaz:

Body S_1 , S_2 , S_3 jsou vrcholy trojúhelníku (obr. 3.25). Označme a chordálu kružnic k_1 , k_2 a b chordálu kružnic k_2 , k_3 . Dle věty 3.13 je přímka a kolmá k úsečce S_1S_2 a přímka b kolmá k úsečce S_2S_3 , přičemž úsečky S_1S_2 , S_2S_3 jsou různoběžné. Díky tomu jsou i přímky a , b různoběžné, jejich průsečík označme P . Na přímce a leží body, které mají stejnou mocnost ke kružnicím k_1 , k_2 . Na přímce b leží body, které mají stejnou mocnost ke kružnicím k_2 , k_3 . Bod P má tedy stejnou mocnost ke kružnicím k_1 , k_2 , k_3 (a je to jediný bod, který má tuto vlastnost, neboť dvě různoběžky mají společný právě jeden bod).

☒

Poznámky:

- Bod P z důkazu věty 3.14 leží také na chordále kružnic k_1 , k_3 .



Obrázek 3.25: Stejná mocnost bodu ke třem kružnicím

- Pokud by středy kružnic k_1 , k_2 , k_3 byly navzájem různé kolinéární body, potom by chordály a , b z důvodu věty 3.14 byly rovnoběžnými přímkami.

Bod, který má stejnou mocnost ke třem daným kružnicím (tedy bod P z věty 3.14), nazýváme *potenčním středem tří kružnic*.

3.6 Apollóniovy úlohy

V planimetrii se často setkáváme s úlohami, v nichž je kružnice k zadána třemi objekty, kterými může být bod, přímka či kružnice. Hledaná kružnice musí daným/i bodem/y procházet a dané/ých přímkou/ek či kružnic/e se má dotýkat. Takové úlohy nazýváme *Apollóniovými*⁵.

Symbolicky tyto úlohy označujeme pomocí trojice z písmen B (bod), p (přímka), k (kružnice) dle počtu a typů objektů, jimiž je kružnice zadána. Například zápis BBB znamená, že kružnice je zadána třemi body, zápis Bpp znamená, že kružnice je zadána bodem a dvěma přímkami apod. Vždy je třeba uvážit rozmístění zadaných objektů, aby byla úloha zadána korektně.

⁵Apollónios z Pergy (3.–2. st. př. n. l.) byl řecký geometr, matematik a astronom. Jeho patrně nejznámějším dílem je spis *Kónika*, v němž definoval elipsu, parabolu a hyperbolu a ukázal, že všechny kuželosečky lze získat jako rovinný řez kuželové plochy. Úlohu „nalézt kružnici určenou třemi objekty“ zformuloval údajně v díle *O dotycích*, které se však nedochovalo.

S některými konkrétními Apollóniovými úlohami jsme se již setkali v podkapitole 2.5. Například konstrukce kružnice opsané trojúhelníku je Apollóniova úloha BBB, přičemž dané tři body jsou nekolineární. Kružnice trojúhelníku vepsaná spolu s kružnicemi připsanými je řešením Apollóniovy úlohy ppp, kde dané tři přímky jsou navzájem různoběžné a nejedná se o přímky téhož svazku.

3.7 Úlohy

- 3.1** Dokažte, že spojnice bodů, které vyznačují na ciferníku hodinek 1, 6 a 5, 8, jsou k sobě kolmé.
- 3.2** Do kružnice k je vepsán trojúhelník ABC . Body A, B, C dělí kružnici k na tři kružnicové oblouky, jejichž délky jsou v poměru 2 : 3 : 7. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC .
- 3.3** Je dán trojúhelník ABC . Vyjádřete „délku tečny“ z bodu A ke kružnici vepsané trojúhelníku ABC v závislosti na délkách stran a, b, c .
- 3.4** Je dána kružnice $k(S, 4 \text{ cm})$ a bod M , kde $|SM| = 8 \text{ cm}$. Bodem M ved'te přímku p tak, aby délka tětivy, kterou přímka p vytíná na kružnici k , byla 5 cm.
- 3.5** Kružnice k, l se protínají v bodech A, B ; AX a AY jsou jejich průměry. Dokažte, že body X, B, Y jsou kolineární.
- 3.6** Sestrojte chordálu dvou kružnic, které
- (a) se protínají,
 - (b) se dotýkají vně,
 - (c) leží navzájem vně.
- 3.7** Je dána kružnice $k(S, 7 \text{ cm})$ a bod M , kde $|MS| = 11 \text{ cm}$. Bodem M ved'te sečnu p kružnice k tak, aby jeden její průsečík s kružnicí k byl středem úsečky s krajními body v bodě M a ve druhém průsečíku p a k .
- 3.8** Jsou dány nekolineární body A, B, C . Dále je dán vnitřní bod M úsečky AB . Označme $|MA| = a, |MB| = b, |MC| = c$. Určete vzdálenost bodu M od průsečíku D ($D \neq C$) přímky MC s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC .

- 3.9** Je dána kružnice $k(S, 4 \text{ cm})$. Sestrojte množinu bodů, které mají ke kružnici k mocnost 9.
- 3.10** Jsou dány ortogonální kružnice $k(K, r)$, $l(L, r')$. Jakou mocnost má bod K ke kružnici l a bod L ke kružnici k ?
- 3.11** Sestrojte kružnici k , která prochází danými body A , B a dotýká se vně zadané kružnice l . Body A , B volte ve vnější oblasti kružnice k a v navzájem různé vzdálenosti od jejího středu.

Kapitola 4

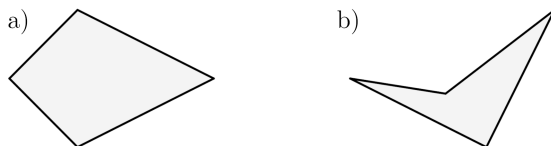
Čtyřúhelník

Dalším plošným útvarem, kterému se budeme podrobněji věnovat, je čtyřúhelník.

4.1 Základní pojmy a vlastnosti

Mějme body A, B, C, D , z nichž žádné tři nejsou kolineární a bod D leží v polorovině opačné k polorovině ACB . Sjednocení trojúhelníků ACB, ACD nazveme *čtyřúhelníkem* $ABCD$.

Úsečky AC a BD nazýváme *úhlopříčkami* čtyřúhelníku $ABCD$.

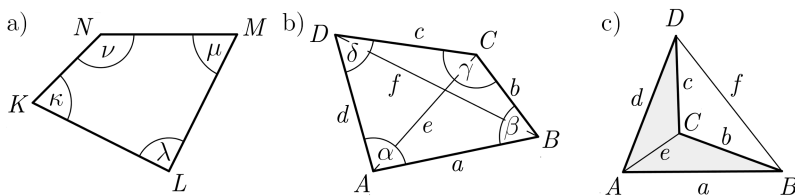


Obrázek 4.1: Konvexní a nekonvexní čtyřúhelník

Poznámky:

- Čtyřúhelník může být konvexní (obr. 4.1a) i nekonvexní (obr. 4.1b), záleží na poloze daných bodů. Jedna z úhlopříček nekonvexního čtyřúhelníku leží vně a jedna uvnitř daného čtyřúhelníku (obr. 4.2c).

- Body A, B, C, D z definice výše jsou vrcholy čtyřúhelníku $ABCD$, úsečky AB, BC, CD, AD jsou stranami čtyřúhelníku. Strany též označujeme (stejně jako jejich délky) malými písmeny, přičemž zpravidla volíme písmeno shodné s jedním z krajních bodů této strany s respektem k abecedě (viz obr. 4.2).
- Ve čtyřúhelníku $ABCD$ obvykle značíme e úhlopříčku AC a f úhlopříčku BD , není-li řečeno jinak (obr. 4.2b,c).
- Analogicky jako u trojúhelníku rozlišujeme vnitřní a vnější úhly čtyřúhelníku, velikost jednoho vnitřního úhlu však může být větší než 180° . Vnitřní úhel obvykle značíme písmenem řecké abecedy odpovídajícím označení příslušného vrcholu (obr. 4.2a,b).



Obrázek 4.2: Značení stran, úhlopříček a vnitřních úhlů čtyřúhelníku

Věta 4.1

Součet velikostí vnitřních úhlů čtyřúhelníku je roven 360° .

Důkaz:

Čtyřúhelník $ABCD$ rozdělíme úhlopříčkou AC na dva trojúhelníky ABC, ACD a jejich vnitřní úhly označíme $\alpha_1, \beta, \gamma_1$ a $\alpha_2, \gamma_2, \delta$ (viz obr. 4.3)¹. Součet velikostí vnitřních úhlů každého trojúhelníku je dle věty 2.2 (str. 27) 180° , tedy

$$\alpha_1 + \beta + \gamma_1 = 180^\circ, \quad (4.1)$$

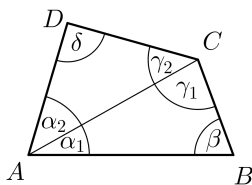
$$\alpha_2 + \gamma_2 + \delta = 180^\circ, \quad (4.2)$$

přičemž $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ a $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$.

Sečtením rovnic (4.1) a (4.2) získáme: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$.

□

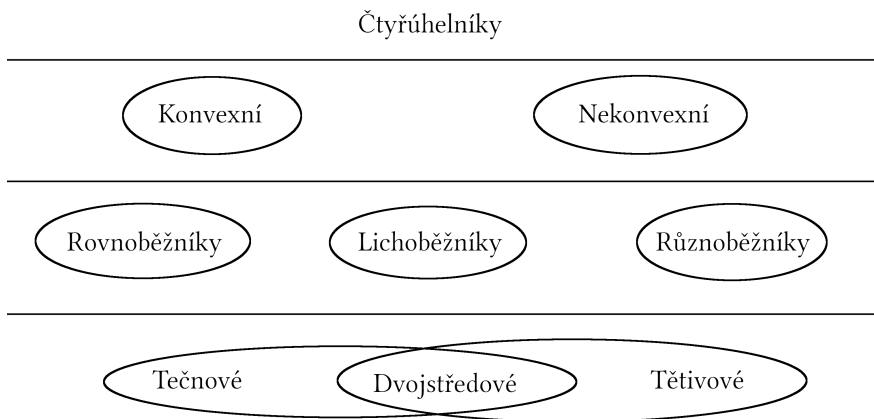
¹Věta platí i pro nekonvexní čtyřúhelník, v důkazu pak bůno předpokládáme, že úhlopříčka AC neleží vně čtyřúhelníku.



Obrázek 4.3: Součet velikostí vnitřních úhlů čtyřúhelníku

4.2 Klasifikace čtyřúhelníků

Čtyřúhelníky lze klasifikovat z různých hledisek (obr. 4.4). Kromě výše uvedeného dělení na konvexní a nekonvexní je můžeme klasifikovat například dle počtu dvojic rovnoběžných stran na *rovnoběžníky*, *lichoběžníky* a *různoběžníky*. Dále dle existence kružnice opsané nebo vepsané rozlišujeme čtyřúhelníky *tečnové*, *tětivové*, *dvojtředové* a ty, které *nemají kružnici opsanou ani vepsanou*. Zatímco v prvních dvou klasifikacích jsou jednotlivé skupiny čtyřúhelníků disjunktní, třetí klasifikace není v tomto smyslu pravou klasifikací, neboť dvojtředové čtyřúhelníky tvoří podmnožinu čtyřúhelníků tečnových i tětivových. V dalším textu se podrobněji zabýváme jednotlivými speciálními typy čtyřúhelníků.



Obrázek 4.4: Klasifikace čtyřúhelníků

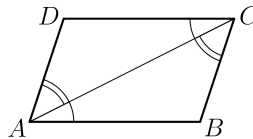
Rovnoběžníkem rozumíme čtyřúhelník, který má dvě dvojice rovnoběžných stran.

Věta 4.2

Protější strany rovnoběžníku jsou stejně dlouhé.

Důkaz:

Mějme rovnoběžník $ABCD$ (obr. 4.5). Trojúhelníky ABC a CDA jsou shodné dle věty *usu* neboť mají společnou stranu AC a úhly k ní přilehlé jsou střídavé úhly při rovnoběžkách (viz ZT 4, str. 17). Ze shodnosti trojúhelníků vyplývá shodnost jejich odpovídajících si stran, tedy $|AB| = |CD|$ a $|BC| = |DA|$. ☒



Obrázek 4.5: K důkazům vět 4.2 a 4.3

Věta 4.3

Protější (vnitřní) úhly rovnoběžníku jsou shodné.

Důkaz:

Mějme rovnoběžník $ABCD$ (obr. 4.5). Dle ZT 4 (str. 17) jsou duté úhly BAC , ACD shodné, stejně tak jsou shodné duté úhly BCA a CAD . Pro velikosti vnitřních úhlů α a γ čtyřúhelníku $ABCD$ platí

$$\alpha = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAD|,$$

$$\gamma = |\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle ACD|,$$

a tedy $\alpha = \gamma$. Analogicky získáme rovnost $\beta = \delta$. ☒

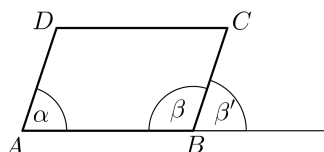
Věta 4.4

Součet velikostí dvou sousedních vnitřních úhlů rovnoběžníku je roven 180° .

Důkaz:

V rovnoběžníku $ABCD$ je vnější úhel β' při vrcholu B souhlasným úhlem s vnitřním úhlem α (obr. 4.6). Zároveň jsou přímky AD a BC rovnoběžné, tedy dle ZT 4 (str. 17) je $\beta' = \alpha$. Jelikož je $\beta' + \beta = 180^\circ$, je také $\alpha + \beta = 180^\circ$. Analogicky postupujeme u dalších dvojic úhlů.

☒



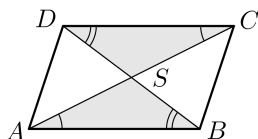
Obrázek 4.6: K důkazu věty 4.4

Věta 4.5

Úhlopříčky rovnoběžníku se navzájem půlí.

Důkaz: Mějme rovnoběžník $ABCD$ a označme S průsečík jeho úhlopříček (obr. 4.7). Trojúhelníky ABS , CDS jsou shodné dle věty *usu*, neboť dle věty 4.2 je $|AB| = |CD|$ a rovnost velikostí přilehlých úhlů plyne ze ZT 4 (str. 17). Ze shodnosti trojúhelníků vyplývá, že $|AS| = |CS|$ a $|BS| = |DS|$, tedy S je středem \overline{AC} i \overline{BD} .

☒



Obrázek 4.7: K důkazu věty 4.5

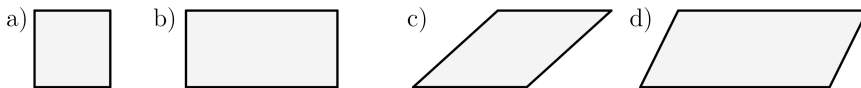
Rovnoběžníky lze dále dělit podle velikostí vnitřních úhlů na *pravoúhelníky* (čtverec a obdélník) a *kosoúhelníky* (kosočtverec a kosodélník) nebo podle délek stran na *rovnoustranné čtyřúhelníky* (čtverec a kosočtverec) a *různostranné čtyřúhelníky* (obdélník a kosodélník).

Rovnoběžník, jehož strany jsou stejně dlouhé a vnitřní úhly pravé, nazveme *čtvercem* (obr. 4.8a).

Rovnoběžník, jehož vnitřní úhly jsou pravé a jehož strany nejsou všechny stejně dlouhé, nazveme *obdélníkem* (obr. 4.8b).

Rovnoběžník, jehož strany jsou stejně dlouhé ale vnitřní úhly nejsou pravé, nazveme *kosočtvercem* (obr. 4.8c).

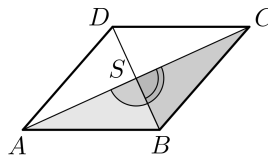
Rovnoběžník, jehož vnitřní úhly nejsou pravé a jehož strany nejsou všechny stejně dlouhé, nazveme *kosodélníkem* (obr. 4.8d).



Obrázek 4.8: Čtverec, obdélník, kosočtverec, kosodélník

Poznámka:

- V literatuře se můžeme setkat s odlišným přístupem k definicím jednotlivých typů rovnoběžníků, který připouští, že například čtverec je speciálním případem obdélníku apod. Tento přístup má v matematice svůj význam, avšak ve školské matematice doporučujeme pojmy čtverec, obdélník, kosočtverec a kosodélník chápat disjunktně.



Obrázek 4.9: K důkazu věty 4.6

Věta 4.6

Úhlopříčky kosočtverce jsou navzájem kolmé.

Důkaz:

Mějme kosočtverec $ABCD$ a označme S průsečík jeho úhlopříček (obr. 4.9). Z věty 4.5 vyplývá, že trojúhelníky ABS a CBS jsou

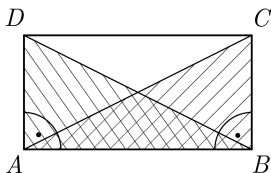
shodné dle věty *sss*. Díky tomu je $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle CSB|$. Úhly ASB a CSB jsou zároveň vedlejší, tedy $|\sphericalangle ASB| + |\sphericalangle CSB| = 180^\circ$, z čehož plyne, že velikost každého z nich je 90° . \square

Věta 4.7

Úhlopříčky obdélníku jsou stejně dlouhé.

Důkaz:

V obdélníku $ABCD$ (obr. 4.10) jsou shodné trojúhelníky ABC , BAD dle věty *sus* ($|BC| = |AD|$ plyne z věty 4.2). Z toho vyplývá, že $|AC| = |BD|$. \square



Obrázek 4.10: K důkazu věty 4.7

Věta 4.8

Úhlopříčky čtverce jsou stejně dlouhé a navzájem kolmé.

Důkaz:

Vyplývá z důkazů vět 4.6 a 4.7, neboť čtverec je stejně jako kosodélník rovnoramenným čtyřúhelníkem a stejně jako obdélník pravoúhelníkem. \square

Lichoběžníkem rozumíme čtyřúhelník, který má právě jednu dvojici rovnoběžných stran (obr. 4.11).

Rovnoběžné strany lichoběžníku nazýváme *základny*, různoběžné strany *ramena*. Jsou-li ramena shodná, mluvíme o *rovnoramenném lichoběžníku* (obr. 4.11b). Je-li jedno z ramen kolmé k základnám, mluvíme o *pravoúhlém lichoběžníku* (obr. 4.11c).



Obrázek 4.11: Lichoběžník

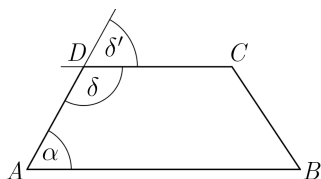
Věta 4.9

Součet velikostí vnitřních úhlů lichoběžníku přilehlých k jednomu rameni je roven 180° .

Důkaz:

V lichoběžníku $ABCD$ se základnou AB uvažujme dvojici úhlů při rovnoběžkách AB a CD prořatých příčkou AD (resp. BC). Vedlejší úhel δ' úhlu δ je souhlasným úhlem s úhlem α , tedy $\alpha + \delta = 180^\circ$ (obr. 4.12). Analogicky pro úhly β a γ platí $\beta + \gamma = 180^\circ$.

□



Obrázek 4.12: K důkazu věty 4.9

Střední příčkou lichoběžníku nazýváme úsečku, jejímiž krajními body jsou středy ramen daného lichoběžníku.

Věta 4.10

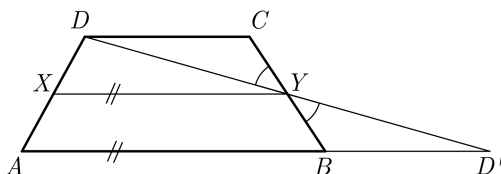
Střední příčka lichoběžníku je rovnoběžná s jeho základnami a její délka je rovna aritmetickému průměru délek základen.

Důkaz:

Mějme lichoběžník $ABCD$ se základnou AB a střední příčkou XY , kde $X \in AD$ a $Y \in BC$ (obr. 4.13). Označme D' průsečík přímky DY s přímkou AB . Trojúhelníky CDY , $BD'Y$ jsou shodné dle věty *usu*, neboť úhly DYC , $D'YB$ jsou vrcholové, rovnost $|\sphericalangle DCY| =$

$= |\sphericalangle D'BY|$ plyne z věty 4.9 a Y je středem \overline{BC} . Odtud plyne, že $|CD| = |BD'|$ a Y je středem $\overline{DD'}$, tedy \overline{XY} je střední příčkou v trojúhelníku $AD'D$ a dle věty 2.7 (str. 34) je $\overline{XY} \parallel \overline{AD'}$ (a tedy i $\overline{XY} \parallel \overline{AB}$) a $|XY| = \frac{|AD'|}{2} = \frac{a+c}{2}$.

□

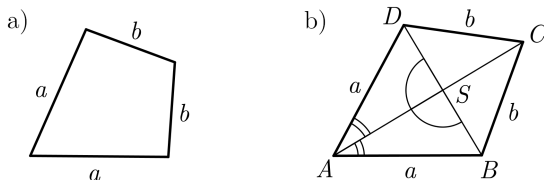


Obrázek 4.13: Střední příčka lichoběžníku

Různoběžníkem rozumíme čtyřúhelník, který nemá žádnou dvojici rovnoběžných stran.

Z různoběžníků zmíníme jeden speciální případ – *deltoid*. Svým tvarem připomíná papírového draka.

Konvexní různoběžník, který má shodné dvě dvojice sousedních stran, nazveme *deltoidem* (obr. 4.14).



Obrázek 4.14: Deltoid

Věta 4.11

Úhlopříčky deltoidu jsou kolmé a jedna z nich je jejich průsečíkem půlena.

Důkaz:

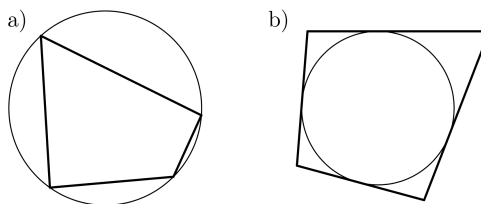
Mějme deltoid $ABCD$ (obr. 4.14b), kde $|AB| = |AD|$, $|BC| = |CD|$ a $|AB| > |BC|$. Trojúhelníky ABC , ADC jsou shodné dle věty *sss*, tedy také platí $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle DAC|$. Označme S průsečík úhlopříček. Z uvedené rovnosti velikostí úhlů BAC a DAC plyne, že trojúhelníky ABS a ADS jsou shodné dle věty *sus*, a tedy také $|BS| = |DS|$, čili S je středem úhlopříčky BD , a $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle ASD|$. Jelikož jsou úhly ASB a ASD vedlejší, jsou jejich velikosti rovny 90° .

☒

Čtyřúhelník, kterému lze opsat kružnici, nazýváme *tětivovým čtyřúhelníkem* (obr. 4.15a).

Poznámky:

- ▶ Název je odvozen z vlastnosti, že strany tětivového čtyřúhelníku jsou tětivami opsané kružnice.
- ▶ Příkladem tětivového čtyřúhelníku je obdélník, rovnoramenný lichoběžník aj.



Obrázek 4.15: Tětivový a tečnový čtyřúhelník

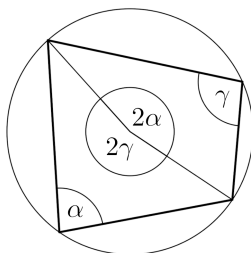
Věta 4.12

Součet velikostí protějších vnitřních úhlů tětivového čtyřúhelníku je roven 180° .

Důkaz:

Mějme tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Jeho vnitřní úhly jsou poté obvodovými úhly, které přísluší vždy nějakému oblouku kružnice opsané čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 4.16). Sjednocením dvou středových úhlů, které odpovídají protějším obvodovým úhlům α a γ (resp.

β a δ), je úhel plný, jehož velikost je 360° . Podle věty 3.7 (str. 54) je $360^\circ = 2\alpha + 2\gamma$ (resp. $360^\circ = 2\beta + 2\delta$), a tedy $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$.



☒

Obrázek 4.16: K důkazu věty 4.12

Čtyřúhelník, kterému lze vepsat kružnici, nazýváme *tečnovým čtyřúhelníkem* (obr. 4.15b).

Poznámky:

- ▶ Název je odvozen z vlastnosti, že strany tečnového čtyřúhelníku leží na tečnách vepsané kružnice.
- ▶ Příkladem tečnového čtyřúhelníku je kosočtverec, deltoid aj.

Věta 4.13

Součty délek protějších stran tečnového čtyřúhelníku se rovnají.

Důkaz:

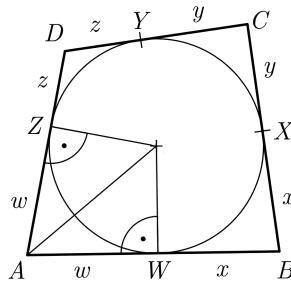
Mějme tečnový čtyřúhelník $ABCD$. Označme W, X, Y, Z po řadě dotykové body stran a, b, c, d s kružnicí vepsanou $k(S, r)$. Potom ze shodnosti trojúhelníků AWS, AZS (Ssu) plyne, že $|AW| = |AZ|$, analogicky je také $|BW| = |BX|$, $|CX| = |CY|$ a $|DY| = |DZ|$ (obr. 4.17). Označíme-li pro přehlednost tyto délky úseček na tečnách z vrcholů A, B, C, D po řadě w, x, y, z , platí: $a = w + x$, $b = x + y$, $c = y + z$, $d = z + w$. Pro součty délek protějších stran tedy získáme

$$a + c = w + x + y + z, \quad (4.3)$$

$$b + d = x + y + z + w. \quad (4.4)$$

Jelikož se pravé strany vztahů (4.3) a (4.4) rovnají, rovnají se i strany levé, tedy $a + c = b + d$.

□



Obrázek 4.17: K důkazu věty 4.13

Některé čtyřúhelníky jsou tečnové a tětíkové zároveň, tedy mají kružnici opsanou i vepsanou. Takové čtyřúhelníky nazýváme *dvoustředové*. Patří mezi ně například čtverec nebo rovnoramenný lichoběžník s vhodnou výškou. Existují však čtyřúhelníky, které nemají kružnici opsanou ani vepsanou. Z výše uvedených speciálních typů se jedná například o kosodélník.

Věta 4.14 (*Ptolemaiova² věta*)

Součin délek úhlopříček konvexního čtyřúhelníku je menší nebo roven součtu součinů délek jeho protějších stran. Rovnost nastává právě tehdy, je-li čtyřúhelník tětíkový.

Důkaz viz podkapitola 12.3 (str. 208).

Nyní dokážeme větu o existenci kružnice devíti bodů, kterou jsme již zmínili v kapitole 2 (str. 43).

Věta 4.15 (*Kružnice devíti bodů*)

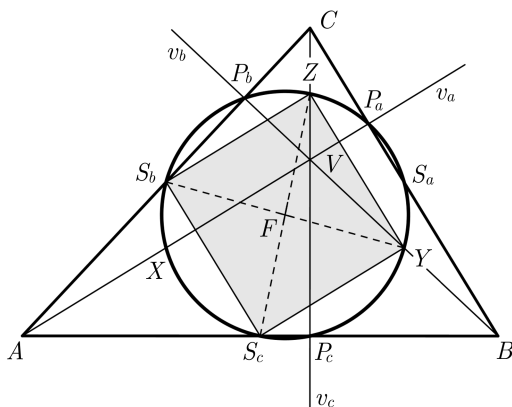
V trojúhelníku leží středy stran, paty výšek a středy spojnic vrcholů s ortocentrem na jedné kružnici.

²Klaudios Ptolemaios (~85–168), též znám jako Ptolemaios Alexandrijský, byl antický matematik, astronom, astrolog a geograf. Ptolemaiovi je připisována pouze část z uvedených vět týkající se tětíkového čtyřúhelníku, obecnější verze byla dokázána až později.

Důkaz:

Mějme trojúhelník ABC a označme středy stran BC , AC , AB po řadě S_a , S_b , S_c , paty výšek v_a , v_b , v_c po řadě P_a , P_b , P_c , ortocentrum V a středy úseček AV , BV , CV po řadě X , Y , Z .

Úsečka S_bS_c je střední příčkou v trojúhelníku ABC rovnoběžnou se stranou BC . Úsečka ZY je střední příčkou v trojúhelníku BCV rovnoběžnou také se stranou BC . Dle věty 2.7 (str. 34) je tedy $|S_bS_c| = |ZY|$. Podobně úsečka S_bZ je střední příčkou v trojúhelníku AVC rovnoběžnou se stranou AV a úsečka S_cY je střední příčkou v trojúhelníku ABV rovnoběžnou také se stranou AV , proto $|S_bZ| = |S_cY|$. Čtyřúhelník S_bS_cYZ je tedy rovnoběžníkem. Dále platí: $\overline{AV} \perp \overline{BC} \wedge \overline{S_bZ} \parallel \overline{AV} \wedge \overline{ZY} \parallel \overline{BC}$. Díky tomu je čtyřúhelník S_bS_cYZ dokonce pravoúhelníkem a lze mu opsat kružnici k , jejímž středem je průsečík úhlopříček S_bY , S_cZ , označme jej F (obr. 4.18).



Obrázek 4.18: Kružnice devíti bodů

Obdobně zjistíme, že čtyřúhelníky S_aS_bXY , S_aS_cXZ jsou také pravoúhelníky. První z nich má úhlopříčku S_bY společnou s pravoúhelníkem S_bS_cYZ . Střed této úhlopříčky jsme již označili F . Pravoúhelník S_aS_cXZ má s pravoúhelníkem S_aS_bXY společnou úhlopříčku S_aX , proto je bod F také středem obdélíku S_aS_cXZ . Díky tomu leží body S_a , S_b , S_c , X , Y , Z na společné kružnici k se středem F . Úsečky S_aX , S_bY , S_cZ jsou průměry kružnice k .

Zbývá ukázat, že na kružnici k leží i body P_a, P_b, P_c , tedy paty výšek. To plyne z Thalétovy věty (věta 3.6, str. 51), neboť bod P_a je vrcholem pravého úhlu nad průměrem S_aX , bod P_b je vrcholem pravého úhlu nad průměrem S_bY a bod P_c je vrcholem pravého úhlu nad průměrem S_cZ .

☒

Kružnici devíti bodů (tj. kružnici z věty 4.15) nazýváme *Feuerbachovou kružnicí*.

4.3 Úlohy

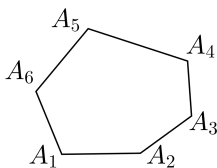
- 4.1** V lichoběžníku $ABCD$ se základnou AB vypočítejte velikosti vnitřních úhlů, jestliže $\alpha = 57^\circ$, $\gamma = 4\beta$.
- 4.2** Dokažte, že osy vnitřních úhlů kosodélníku určují pravoúhelník.
- 4.3** Dokažte, že středy stran libovolného čtyřúhelníku jsou vrcholy rovnoběžníku.
- 4.4** V lichoběžníku $ABCD$ se základnou AB platí $a = 2c$. Dokažte, že spojnice vrcholů C, D se středem úsečky AB dělí lichoběžník na tři shodné trojúhelníky.
- 4.5** Vyjádřete délku ramene rovnoramenného lichoběžníku pomocí délek základen tak, aby byl tento lichoběžník dvojtředový.
- 4.6** Dokažte, že přímky spojující vrchol A rovnoběžníku $ABCD$ se středy stran BC, CD rozdělují úhlopříčku BD na tři stejné části.
- 4.7** Dokažte, že přímka spojující středy základen lichoběžníku prochází průsečíkem prodloužených ramen a průsečíkem úhlopříček tohoto lichoběžníku.
- 4.8** Dokažte, že ve čtyřúhelníku $ABCD$ platí: $(\overline{AB} \parallel \overline{CD} \wedge |AB| = |CD|)$ právě tehdy, když $ABCD$ je rovnoběžník.
- 4.9** Rozhodněte, zda platí věty obrácené k větám 4.12 (str. 76) a 4.13 (str. 77).

Kapitola 5

Mnohoúhelník

5.1 Základní pojmy a vlastnosti

Mějme v rovině n různých bodů A_1, A_2, \dots, A_n ($n \geq 3$) takových, že všechny leží vždy pouze v jedné polorovině určené hraniční přímkou $A_i A_{i+1}$ ($i \in \{1, \dots, n\}, A_{n+1} = A_1$), přičemž žádné tři body nejsou kolineární. Průnik všech takto určených polorovin nazveme *konvexním mnohoúhelníkem* $A_1 A_2 \dots A_n$ (obr. 5.1).



Obrázek 5.1: Konvexní mnohoúhelník

Poznámky:

- ▶ Kromě termínu mnohoúhelník používáme také termín *n-úhelník*, což je vhodné zejména v situaci, kdy známe konkrétní hodnotu n (např. pětiúhelník, osmiúhelník, 23úhelník atd.).
- ▶ Trojúhelník a čtyřúhelník jsou také mnohoúhelníky.

- Analogicky jako u trojúhelníku a čtyřúhelníku definujeme pojmy vrchol, strana a vnitřní/vnější úhel mnohoúhelníku pro $n \geq 5$.
- Jiným možným přístupem k definici mnohoúhelníku je definovat nejprve *lomenou čáru* (pomocí posloupnosti úseček $A_i B_i$, kde $B_i = A_{i+1}$), dále *uzavřenou lomenou čáru* ($B_n = A_1$) a nakonec mnohoúhelník jako sjednocení uzavřené lomené čáry s částí roviny ohraničené touto uzavřenou lomenou čárou. Tato definice v sobě skrývá mnohá úskalí – v precizní podobě je poměrně komplikovaná (například je třeba ošetřit, aby lomená čára sama sebe neprotínala, abychom nezískali útvar jako na obr. 5.2a). Její výhodou je však možnost definovat i *nekonvexní mnohoúhelník* (obr. 5.2b).

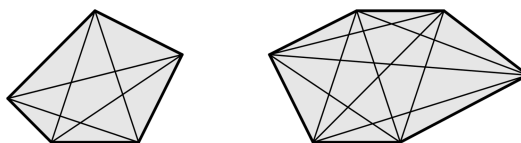


Obrázek 5.2: Protínající se uzavřená lomená čára; nekonvexní mnohoúhelník

Úhlopříčkou konvexního mnohoúhelníku $A_1 A_2 \dots A_n$ rozumíme úsečku $A_i A_j$, kde $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $1 < |i - j| < n - 1$.

Poznámka:

- Zjednodušeně řečeno, úhlopříčkou konvexního mnohoúhelníku je každá úsečka, jejímiž krajními body jsou navzájem různé nesousední vrcholy tohoto mnohoúhelníku (obr. 5.3).



Obrázek 5.3: Úhlopříčky pětiúhelníku a šestiúhelníku

Věta 5.1

Pro počet p úhlopříček konvexního n -úhelníku platí $p = \frac{n(n-3)}{2}$.

Důkaz:

Z jednoho vrcholu n -úhelníku lze vést $n - 3$ úhlopříček (tento vrchol nemůže být spojen se dvěma sousedními vrcholy ani sám se sebou). Vrcholů je celkem n , takto tedy vytvoříme $n(n - 3)$ úhlopříček. Každou jsme však započítali dvakrát (každá spojuje dva vrcholy), proto je výsledkem výraz $\frac{n(n - 3)}{2}$. \square

Poznámka:

- Důkaz věty 5.1 lze provést též kombinatoricky – počet úhlopříček vychází z počtu možností výběru dvou libovolných (neuspořádaných) bodů z n , tj. $\binom{n}{2}$. Je však třeba odečíst dvojice sousedních vrcholů, kterých je n . Tedy

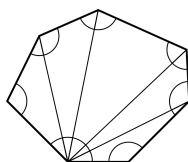
$$p = \binom{n}{2} - n = \frac{n!}{(n - 2)!2!} - n = \frac{n(n - 1)}{2} - \frac{2n}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n(n - 3)}{2}.$$

Věta 5.2

Součet velikostí vnitřních úhlů konvexního n -úhelníku je roven $180^\circ(n - 2)$.

Důkaz:

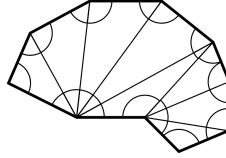
Konvexní n -úhelník lze rozdělit úhlopříčkami vedenými z jednoho vrcholu na $n - 2$ trojúhelníků (obr. 5.4). Celkový součet velikostí vnitřních úhlů všech těchto trojúhelníků je stejný jako součet velikostí vnitřních úhlů původního n -úhelníku, tedy $180^\circ(n - 2)$. \square



Obrázek 5.4: Součet velikostí vnitřních úhlů konvexního mnohoúhelníku

Poznámka:

- Věta 5.2 platí i pro nekonvexní mnohoúhelníky, jen je třeba v důkazu při rozdělování nekonvexního mnohoúhelníku na trojúhelníky postupovat obezřetněji (např. obr. 5.5), neboť každá úhlopříčka nemusí ležet uvnitř daného mnohoúhelníku.



Obrázek 5.5: Součet velikostí vnitřních úhlů nekonvexního mnohoúhelníku

5.2 Pravidelný mnohoúhelník

Specifickou skupinou mnohoúhelníků, které mají řadu dalších zajímavých vlastností, jsou pravidelné mnohoúhelníky.

Pravidelným mnohoúhelníkem rozumíme konvexní mnohoúhelník, jehož všechny strany a všechny vnitřní úhly jsou navzájem shodné.

Poznámka:

- Pravidelným trojúhelníkem je rovnostranný trojúhelník, pravidelným čtyřúhelníkem je čtverec.

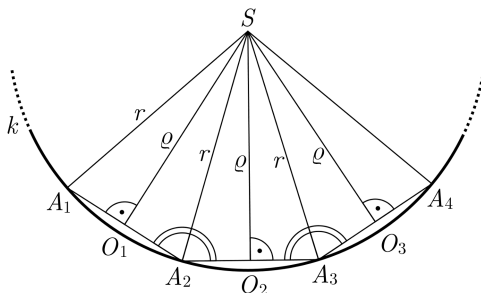
Věta 5.3

Každému pravidelnému mnohoúhelníku lze opsat a vepsat kružnici, přičemž jejich středy splývají.

Důkaz:

Mějme pravidelný n -úhelník $A_1A_2 \dots A_n$ a uvažujme kružnici $k(S, r)$, která je určena body A_1, A_2, A_3 , tj. $|SA_1| = |SA_2| = |SA_3| = r$. Trojúhelníky A_1A_2S, A_2A_3S jsou shodné dle věty *sss* a rovnoramenné (obr. 5.6). Díky tomu úsečky A_2S, A_3S půlí vnitřní úhly mnohoúhelníku velikosti α při vrcholech A_2, A_3 na úhly o velikosti $\frac{\alpha}{2}$, a tedy $|\sphericalangle SA_3A_4| = \frac{\alpha}{2}$. Potom jsou však také shodné trojúhelníky A_3A_4S a A_3A_2S (dle věty *sus*), z čehož plyne, že $|A_4S| = |A_2S| = r$, neboli $A_4 \in k$. Analogicky bychom postupovali dále s každým dalším vrcholem, tedy $A_i \in k$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$.

V první části důkazu jsme ukázali, že trojúhelníky $A_iA_{i+1}S$, kde $i \in \{1, \dots, n-1\}$, jsou rovnoramenné se základnou A_iA_{i+1} a hlav-



Obrázek 5.6: Kružnice opsaná/vepsaná pravidelnému mnohoúhelníku

ním vrcholem S a navzájem shodné. Mají tedy shodné i výšky k základně, označme jejich velikost ϱ a jejich paty O_i (obr. 5.6). Ze ZT 6 a 7 (str. 23, 24) a věty 3.5 (str. 49) vyplývá, že strany $A_i A_{i+1}$ mnohoúhelníku $A_1 A_1 \dots A_n$ se dotýkají kružnice $l(S, \varrho)$ v bodech O_i , tedy daný mnohoúhelník má kružnici vepsanou, jejíž střed S splývá se středem kružnice opsané.

□

Poznámka:

- ▶ Je-li n sudé, je střed kružnice opsané a vepsané zároveň průsečíkem úhlopříček $A_i A_j$, kde $|i - j| = \frac{n}{2}$.

Další větu uvedeme bez důkazu, neboť ten je zcela nad rámec naší přednášky.

Věta 5.4 (Gaussova¹-Wantzelova² věta)

Pravidelný n -úhelník lze eukleidovsky (tj. jen pomocí pravítka a kružítka) sestrojít právě tehdy, když $n = 4 \cdot 2^k$, kde $k \in \mathbb{N}_0$, nebo $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_m \cdot 2^k$, kde $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $p_i = 2^{2^a} + 1$ ($a \in \mathbb{N}_0$) a $p_x \neq p_y$ pro $x \neq y$.

¹Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) byl německý matematik a fyzik. Zabýval se mimo jiné analytickou a neeukleidovskou geometrií, matematickou analýzou, teorií čísel, astronomií, elektrostatikou, geodézií a optikou. V roce 1796 nejprve objevil konstrukci pravidelného sedmnáctiúhelníku, následně se mu podařilo dokázat, že lze eukleidovsky sestrojít každý pravidelný mnohoúhelník s počtem stran rovným Fermatovu číslu.

²Pierre Laurent Wantzel (1814–1848) byl francouzský matematik. Zabýval se mimo jiné neřešitelnými úlohami starověké matematiky. V roce 1837 publikoval mimo jiné důkaz zmíněné věty, doplnil tak Gaussovův důkaz o tvrzení, kdy pravidelný mnohoúhelník eukleidovsky sestrojít nelze.

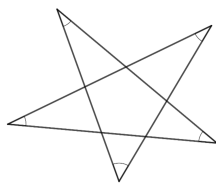
Poznámky:

- ▶ Hodnoty n z věty 5.4 jsou 4, 8, 16, 32, ... a dále například 3, 6, 12 ($3 \cdot 4$), 5, 10, 15 ($3 \cdot 5$) aj.
- ▶ Čísla p_i z věty 5.4 se nazývají také *Fermatova čísla*. Můžeme se setkat i s pojmem *Fermatova prvočísla*, neboť Pierre de Fermat³ vyslovil hypotézu, že každé takové číslo je prvočíslem (prvních pět skutečně je). V roce 1732 však byla tato hypotéza vyvrácena.
- ▶ Pro $2 < n < 20$ nelze eukleidovsky sestrojít pravidelný n -úhelník, kde $n \in \{7, 9, 11, 13, 14, 18, 19\}$.

Eukleidovským konstrukcím pravidelných n -úhelníků včetně přibližných konstrukcí pro $n \in \{7, 9\}$ se podrobněji věnujeme v podkapitole 8.2.

5.3 Úlohy

- 5.1 Proveďte úplnou diskusi průniku trojúhelníku a konvexního čtyřúhelníku.
- 5.2 Určete počet vrcholů pravidelného mnohoúhelníku, jehož vnitřní úhel má velikost 144° .
- 5.3 Dokažte, že v pravidelném dvanáctiúhelníku je velikost vnitřního úhlu pětinašobkem velikosti vnějšího úhlu.
- 5.4 Který konvexní mnohoúhelník má dvakrát více úhlopříček než stran?
- 5.5 Vypočítejte součet velikostí vyznačených úhlů v obrázku 5.7.



Obrázek 5.7: K úloze 5.5

³Pierre de Fermat (1601–1665) byl francouzský matematik. Zabýval se teorií pravděpodobnosti, matematickou analýzou, analytickou geometrií a především teorií čísel. Ve známost vešla tzv. *Velká Fermatova věta* (neexistují přirozená čísla $n \geq 3$, x , y a z taková, že $x^n + y^n = z^n$), kterou Fermat sice zformuloval, dokázána však byla až koncem 20. století.

Kapitola 6

Obvod, obsah

V této kapitole se zaměříme na obvody a obsahy geometrických obrazců, jimž byly věnovány předchozí kapitoly, tj. mnohoúhelníků a kruhu, a na některé známé planimetrické věty související s obsahy těchto útvarů.

6.1 Definice obvodu a obsahu

V dalším textu rozumíme *geometrickým obrazcem* souvislý rovinný útvar ohraničený uzavřenou čarou, která sama sebe neprotíná a je též součástí obrazce. Uzavřenou čáru ohraničující geometrický obrazec též nazýváme *hranicí* obrazce.

Obvodem o geometrického obrazce rozumíme délku jeho hranice.

Obsahem S geometrického obrazce je kladné číslo přiřazené obrazci tak, že platí:

- (a) obsahy navzájem shodných obrazců jsou sobě rovné,
- (b) skládá-li se obrazec U z několika obrazců T_1, T_2, \dots, T_n , které se navzájem nepřekrývají, rovná se obsah obrazce U součtu obsahů S_i všech obrazců T_i , kde $i \in \{1, \dots, n\}$, tj. $S = \sum_{i=1}^n S_i$.
- (c) obsah čtverce o straně dlouhé 1 (mm, cm, ...) je 1 (mm², cm², ...).

Poznámky:

- ▶ Obvodem i obsahem obrazce jsou tedy kladná reálná čísla, jednotkami obvodu jsou jednotky délky (mm, cm, ...), jednotkami obsahu jsou čtverečné jednotky délky (mm^2 , cm^2 , ...).
- ▶ Nepřekrývajícími se obrazci z části (b) definice obsahu rozumíme obrazce, které mohou mít společné části svých hranic, avšak libovolný vnitřní bod libovolného obrazce není bodem jiného obrazce.

6.2 Obvod mnohoúhelníku

Jelikož hranicí mnohoúhelníku je sjednocení úseček, obvod mnohoúhelníku určíme jako součet délek těchto úseček. Pro *obvod o mnohoúhelníku* $A_1A_2 \dots A_n$ tedy platí:

$$o = |A_1A_2| + |A_2A_3| + \dots + |A_{n-1}A_n| + |A_nA_1|.$$

Mají-li některé strany mnohoúhelníku navzájem shodné délky, vztah pro výpočet obvodu se tím zjednoduší, například:

obrazec	obvod
čtverec/kosočtverec o straně a	$4a$
pravidelný n -úhelník o straně a	na
obdélník/kosodélník o stranách a, b	$2a + 2b$
rovnoramenný trojúhelník s rameny r a základnou z	$2r + z$
rovnoramenný lichoběžník s rameny b a základnami a, c	$a + 2b + c$

6.3 Obvod kruhu a jeho částí

Již víme (str. 48), že hranicí kruhu $K(S, r)$ je kružnice $k(S, r)$. Obvod kruhu je tedy roven délce příslušné kružnice. Délka kružnice byla v minulosti hledána experimentálně s různou přesností. Mezi problémy antické matematiky patří tzv. *rektifikace kružnice*, tedy úkol sestavit úsečku stejné délky jakou má daná kružnice (viz kap. 8, str. 132). Že tato úloha není eukleidovsky řešitelná, bylo dokázáno až v novověku.

Metodami matematické analýzy lze odvodit, že pro délku kružnice $k(S, r)$, resp. pro *obvod o kruhu* $K(S, r)$, platí:

$$o = 2\pi r,$$

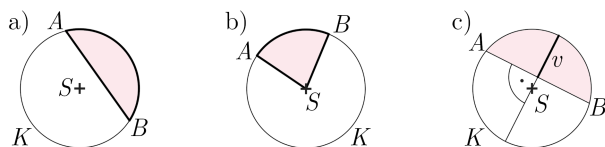
kde π je tzv. *Ludolfovo*¹ *číslo*. Z uvedeného vztahu je vidět, že konstantu π můžeme geometricky definovat jako podíl délky kružnice a jejího průměru.

Kromě kruhu nás bude zajímat též obvod jeho částí, konkrétně kruhové úseče, kruhové výseče a mezikruží.

Libovolná tětiva AB kruhu $K(S, r)$ dělí kruh K na dvě *kruhové úseče* (obr. 6.1a).

Úsečku, jejímiž krajními body jsou průsečíky průměru kruhu K kolmého na tětivu AB s hranicí kruhové úseče, nazveme *výškou* v této *úseče* (obr. 6.1c).

Libovolné dva různé poloměry SA, SB kruhu $K(S, r)$ dělí kruh K na dvě *kruhové výseče* (obr. 6.1b).



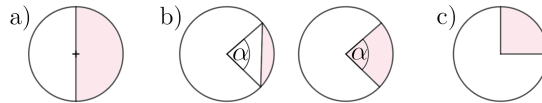
Obrázek 6.1: Kruhová úseč, kruhová výseč, výška kruhové úseče

Poznámky:

- Je-li tětivou průměr (tedy sjednocení dvou poloměrů), získané části kruhu můžeme nazvat *kruhovými úsečemi* i *výsečemi*. V takové situaci používáme pro jednotlivé části termín *půlkruh* (obr. 6.2a).

¹Ludolph van Ceulen (1540–1610) byl německý matematik, který strávil značnou část svého života počítáním číselné hodnoty matematické konstanty π , přičemž jeho postup byl obdobný jako postup řeckého matematika Archiméda ze Syrakús (287 př. n. l. – 212 př. n. l.). V roce 1596 Ceulen publikoval hodnotu čísla π s přesností na 20 desetinných míst, později výpočet zpřesnil na 35 desetinných míst. V současnosti víme, že konstanta π je nejen iracionální, ale dokonce transcendentní.

- Chceme-li specifikovat, kterou ze získaných dvou (různých) kruhových úsečí/výsečí máme na mysli, využijeme středový úhel příslušný oblouku kruhové úseče/výseče, jež tvoří část hranice této úseče/výseče (obr. 6.2b).
- Kruhovou výseč příslušející středovému úhlu o velikosti 90° nazýváme též *čtvrtkruh* (obr. 6.2c).



Obrázek 6.2: Půlkruh, úseč a výseč příslušná středovému úhlu α , čtvrtkruh

Obvod kruhové úseče a výseče vychází z tvaru hranice těchto obrazců. V obou případech je hranice sjednocením úsečky/úseček a kružnicového oblouku. Délka l_α kružnicového oblouku kružnice o poloměru r je přímo úměrná velikosti α příslušného středového úhlu, tedy²

$$l_\alpha = \frac{2\pi r \alpha}{360^\circ}.$$

Pro *obvod* o_u *kruhové úseče* příslušející středovému úhlu o velikosti α vytvořené tětivou AB z kruhu o poloměru r tedy platí

$$o_u = |AB| + \frac{2\pi r \alpha}{360^\circ},$$

pro *obvod* o_v *kruhové výseče* příslušející středovému úhlu o velikosti α vytvořené poloměry SA , SB z téhož kruhu platí

$$o_v = 2r + \frac{2\pi r \alpha}{360^\circ}.$$

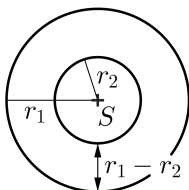
Mějme bod S a dvě kladná čísla r_1 , r_2 , kde $r_1 > r_2$. Množinu všech bodů roviny, jejichž vzdálenost od bodu S je menší nebo rovna r_1 a zároveň větší nebo rovna r_2 , nazveme *mezikružím* (obr. 6.3).

Rozdíl $r_1 - r_2$ nazýváme *šířkou mezikruží*.

Mezikružím je tedy rovinným geometrickým obrazcem, jehož hranicí jsou dvě různé soustředné kružnice. Odtud vyplývá i vztah pro *obvod* o_m výše nadefinovaného *mezikruží*:

$$o_m = 2\pi r_1 + 2\pi r_2.$$

²Velikost α předpokládáme v míře stupňové, pro α v míře obloukové je $l_\alpha = r\alpha$.



Obrázek 6.3: Mezikruží

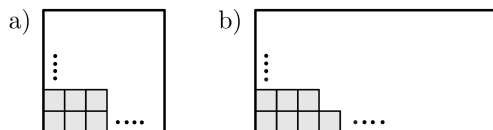
6.4 Obsah mnohoúhelníku

Vztahy pro obsahy geometrických obrazců dle definice obsahu (viz str. 87) odvodíme od obsahu čtverce. Čtverec o straně délky a lze pokrýt a^2 jednotkovými čtverci (obr. 6.4a), tedy pro *obsah* S_{\square} tohoto *čtverce* platí

$$S_{\square} = a^2.$$

Obdélník se stranami o délkách a, b pokryjeme ab jednotkovými čtverci (obr. 6.4b), tedy pro *obsah* S_{\square} tohoto *obdélníku* platí

$$S_{\square} = ab.$$



Obrázek 6.4: Obsah čtverce a obdélníku

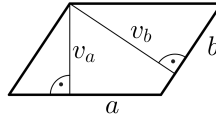
Pomocí obsahu obdélníku dále odvodíme obsah zbývajících rovnoběžníků, tedy kosodélníku a kosočtverce.

Výškou rovnoběžníku rozumíme vzdálenost jeho protilehlých stran.

Poznámky:

- Obecně má rovnoběžník dvě různé výšky (obr. 6.5), speciálně ve čtverci a kosočtverci jsou tyto výšky totožné. Výšky obvykle značíme v_x , kde index x odpovídá označení libovolné z příslušných rovnoběžných stran.

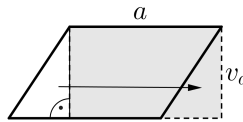
- Přeneseně též můžeme chápat výšku rovnoběžníku jako geometrický objekt – úsečku.



Obrázek 6.5: Výšky rovnoběžníku

Můžeme si představit, že daný kosodélník/kosočtverec rozdělíme kolmicí vedenou z jednoho z vrcholů k protilehlé straně (obr. 6.6) a přeuspořádáme na obdélník, jehož jednu stranu tvoří strana a daného obrazce a druhou k této straně příslušná výška v_a . Potom *obsah* S daného *rovnoběžníku* je shodný s obsahem získaného obdélníku, tedy

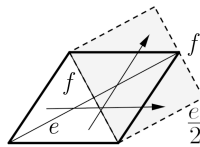
$$S = av_a.$$



Obrázek 6.6: Obsah kosodélníku

Speciálně v kosočtverci (a čtverci) lze využít také kolmosti úhlopříček e , f , které rozdělí daný útvar na čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky. Jejich přeskládáním získáme obdélník o rozměrech $\frac{e}{2}$, f (obr. 6.7), tedy pro *obsah* S daného *kosočtverce* platí

$$S = av_a = \frac{ef}{2}.$$



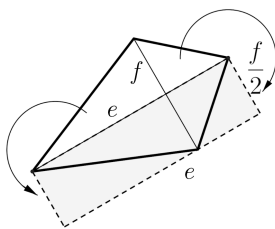
Obrázek 6.7: Obsah kosočtverce pomocí úhlopříček

Úhlopříčky čtverce jsou navzájem shodné, tedy pro *obsah* S_{\square} čtverce o straně a a úhlopříčce u platí

$$S_{\square} = a^2 = \frac{u^2}{2}.$$

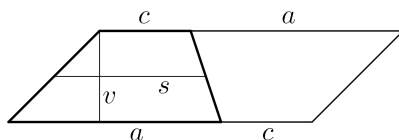
Analogicky lze postupovat také při odvozování vztahu pro *obsah* S deltoidu s úhlopříčkami e, f (obr. 6.8). Stejně jako pro kosočtverec získáme

$$S = \frac{ef}{2}.$$



Obrázek 6.8: Obsah deltoidu

Výškou *lichoběžníku* rozumíme vzdálenost jeho základů.



Obrázek 6.9: Obsah lichoběžníku

Vztah pro obsah lichoběžníku lze odvodit různě, jeden z přístupů naznačuje obrázek 6.9. Nejprve k danému lichoběžníku přikreslíme shodný, ale otočený lichoběžník. Sjednocením obou obrazců získáme rovnoběžník, jehož obsah je dvojnásobkem obsahu původního lichoběžníku. Délka strany rovnoběžníku je součtem délek a, c základů lichoběžníku, výška v (tj. vzdálenost základů) se nezměnila.

Pro obsah S lichoběžníku tedy platí:

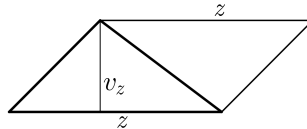
$$\begin{aligned} 2S &= (a + c) \cdot v, \\ S &= \frac{(a + c)}{2} \cdot v = s \cdot v, \end{aligned}$$

kde s značí délku střední příčky lichoběžníku (viz věta 4.10, str. 74).

Obsah S_{Δ} trojúhelníku můžeme vypočítat několika způsoby. Patrně nejznámějším vztahem je

$$S_{\Delta} = \frac{z v_z}{2}, \quad (6.1)$$

kde z značí libovolnou stranu trojúhelníku a v_z k ní příslušnou výšku. Tento vztah vychází z představy, že trojúhelník můžeme doplnit na rovnoběžník se stejnou stranou i výškou (obr. 6.10),³ jehož obsah je roven $z v_z$ a je dvojnásobkem obsahu daného trojúhelníku.



Obrázek 6.10: Obsah trojúhelníku

V případě, že je daný trojúhelník něčím speciální, můžeme získat i speciální tvar tohoto vztahu. Například pro obsah S pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami a, b platí

$$S = \frac{ab}{2},$$

jelikož b je výškou ke straně a a obráceně.

Obsah trojúhelníku lze však vyjádřit i jinými, na první pohled zcela odlišnými způsoby.

Věta 6.1

Pro obsah S_{Δ} trojúhelníku ABC platí $S_{\Delta} = \varrho \cdot \frac{a + b + c}{2}$, kde ϱ je poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC .

³Na obrázku uvažujeme výšku ležící uvnitř daného trojúhelníku. Odvození lze však analogicky provést i v situaci, kdy výška, s níž pracujeme, leží vně trojúhelníku.

Důkaz:

Střed S kružnice vepsané trojúhelníku ABC nalezneme jako průsečík os vnitřních úhlů α , β , γ (viz věta 2.16, str. 41). Trojúhelník ABC můžeme rozložit na trojúhelníky ABS , BCS a ACS (obr. 6.11), jejichž obsahy značíme po řadě S_{ABS} , S_{BCS} , S_{ACS} . Dle vztahu (6.1) pro obsah trojúhelníku platí:

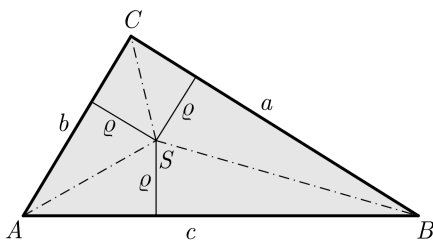
$$\begin{aligned} S_{ABS} &= \frac{c\rho}{2}, \\ S_{BCS} &= \frac{a\rho}{2}, \\ S_{ACS} &= \frac{b\rho}{2}, \end{aligned}$$

kde ρ je poloměr kružnice vepsané.

Pro obsah S_{Δ} trojúhelníku ABC tedy platí:

$$S_{\Delta} = S_{ABS} + S_{BCS} + S_{ACS} = \frac{c\rho}{2} + \frac{a\rho}{2} + \frac{b\rho}{2} = \rho \cdot \frac{a+b+c}{2}.$$

□



Obrázek 6.11: Obsah trojúhelníku pomocí kružnice vepsané

Poznámka:

- Výraz $\frac{a+b+c}{2}$ vyjadřuje poloviční obvod o trojúhelníku ABC .

Věta 6.2

Pro obsah S_{Δ} trojúhelníku ABC platí $S_{\Delta} = \frac{ab \sin \gamma}{2}$.

Důkaz:

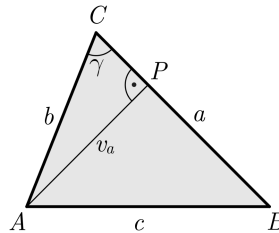
V důkazu využijeme mimo jiné goniometrickou funkci sinus v pravoúhlém trojúhelníku.⁴ Patu výšky v_a označíme P (obr. 6.12). V trojúhelníku APC platí:

$$\begin{aligned}\sin \gamma &= \frac{v_a}{b}, \\ v_a &= b \sin \gamma.\end{aligned}\tag{6.2}$$

Dle vztahu (6.1) je $S_{\Delta} = \frac{av_a}{2}$. Dosazením (6.2) získáme

$$S = \frac{ab \sin \gamma}{2}.$$

□



Obrázek 6.12: Obsah trojúhelníku pomocí vnitřního úhlu

Poznámka:

- Na větu 6.2 lze aplikovat cyklickou záměnu (str. 28).

Věta 6.3

Pro obsah S_{Δ} trojúhelníku ABC platí $S_{\Delta} = \frac{abc}{4r}$, kde r je poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC .

Důkaz:

Střed S kružnice k opsané trojúhelníku ABC nalezneme jako průsečík os stran a , b , c (viz věta 2.15, str. 41). Střed strany c označme O (obr. 6.13). Úhel ACB je obvodovým úhlem příslušným oblouku AB ,

⁴Viz např. (Odvárko, 2008).

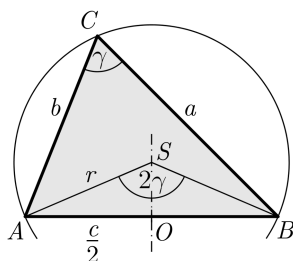
jeho velikost je γ . Tomuto úhlu odpovídá středový úhel ASB o velikosti 2γ (viz věta 3.7, str. 54), ten je však půlen osou strany c (viz úloha 2.4, str. 44), a proto $|\sphericalangle ASO| = \gamma$. Trojúhelník ASO je pravoúhlý, proto⁵

$$\sin \gamma = \frac{\frac{c}{2}}{r} = \frac{c}{2r}, \quad (6.3)$$

kde r je poloměr kružnice opsané.

Vztah (6.3) dosadíme do vztahu z věty 6.2:

$$S_{\Delta} = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{ab \frac{c}{2r}}{2} = \frac{abc}{4r}. \quad \square$$



Obrázek 6.13: Obsah trojúhelníku pomocí kružnice opsané

Nyní jsme schopni dokázat následující větu formulující vztah pro *obsah* obecného *čtyřúhelníku*.

Věta 6.4

Pro obsah S libovolného čtyřúhelníku platí $S = \frac{ef \sin \varphi}{2}$, kde e , f jsou délky úhlopříček a φ velikost libovolného z úhlů, které tyto úhlopříčky svírají.

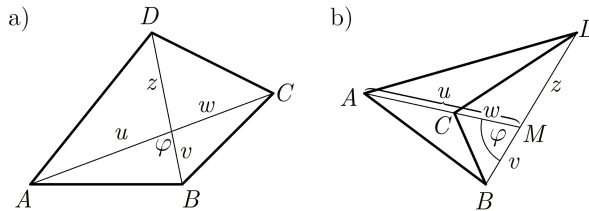
Důkaz:

Předpokládejme nejprve, že je daný čtyřúhelník konvexní. Označme u , w úseky úhlopříčky e , na které je tato úhlopříčka rozdělena průsečíkem úhlopříček. Podobně z , v nechť jsou úseky úhlopříčky f (obr. 6.14a). Úhlopříčky rozdělily čtyřúhelník na čtyři trojúhelníky,

⁵Opět jsme využili goniometrickou funkci sinus v pravoúhlém trojúhelníku, viz např. (Odvárko, 2008).

obsah každého z nich vyjádříme pomocí vztahu z věty 6.2. Obsah S je roven součtu obsahů jednotlivých trojúhelníků, tedy⁶

$$\begin{aligned} S &= \frac{uv \sin \varphi}{2} + \frac{vw \sin(180^\circ - \varphi)}{2} + \frac{wz \sin \varphi}{2} + \frac{zu \sin(180^\circ - \varphi)}{2} = \\ &= \frac{\sin \varphi}{2} (uv + vw + wz + zu) = \\ &= \frac{\sin \varphi}{2} [v(u + w) + z(u + w)] = \\ &= \frac{\sin \varphi}{2} (u + w)(v + z) = \frac{\sin \varphi}{2} ef. \end{aligned}$$

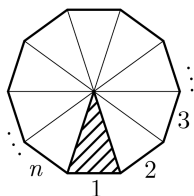


Obrázek 6.14: Obsah obecného čtyřúhelníku

Nyní uvažujme nekonvexní čtyřúhelník $ABCD$, buďto nechť je vnější úhlopříčkou úhlopříčka f . Průsečík přímky AC s úhlopříčkou BD označme M , velikost úhlu AMB označme φ a dále označme délky $|AM|$, $|BM|$, $|CM|$, $|DM|$ po řadě u , v , w , z (obr. 6.14b). Analogicky s první částí důkazu pro obsah S čtyřúhelníku $ABCD$ platí

$$\begin{aligned} S &= \frac{uv \sin \varphi}{2} - \frac{vw \sin \varphi}{2} - \frac{wz \sin(180^\circ - \varphi)}{2} + \frac{zu \sin(180^\circ - \varphi)}{2} = \\ &= \frac{\sin \varphi}{2} (uv - vw - wz + zu) = \\ &= \frac{\sin \varphi}{2} [v(u - w) + z(-w + u)] = \\ &= \frac{\sin \varphi}{2} (u - w)(v + z) = \frac{\sin \varphi}{2} ef. \end{aligned}$$

☒



Obrázek 6.15: Obsah pravidelného mnohoúhelníku

Obsahy n -úhelníků pro $n > 4$ řešíme jejich rozkladem na trojúhelníky nebo čtyřúhelníky a následným sečtením obsahů získaných trojúhelníků/čtyřúhelníků. Obrazce, na něž daný n -úhelník rozkládáme, volíme pokud možno tak, abychom byli schopni jejich obsahy co nejsnadněji vypočítat. V některých případech lze efektivně využít rozkladu na navzájem shodné útvary, například pravidelný n -úhelník lze rozložit na n navzájem shodných rovnostranných trojúhelníků o obsahu S_{Δ} (obr. 6.15), pro obsah S pravidelného n -úhelníku tedy platí

$$S = nS_{\Delta}.$$

6.5 Obsah kruhu a jeho částí

Obsah kruhu byl, stejně jako jeho obvod, v minulosti experimentálně zkoumán. Mezi problémy antické matematiky patří tzv. *kvadratura kruhu*, tedy úkol sestavit čtverec o stejném obsahu jako má daný kruh.⁷

Metodami matematické analýzy lze dokázat, že pro obsah S_{\circ} kruhu o poloměru r platí

$$S_{\circ} = \pi r^2.$$

Obsah S_v kruhové výseče kruhu $K(S, r)$ je přímo úměrný velikosti α příslušného středového úhlu, tedy⁸

$$S_v = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ}.$$

Obsah S_u kruhové úseče kruhu $K(S, r)$ získané rozdělením kruhu K tětivou AB a odpovídající středovému úhlu o velikost α vypočítáme tak, že od obsahu S_v

⁶V první úpravě jsme využili rovnosti $\sin(180^\circ - \varphi) = \sin \varphi$.

⁷Problémem se zabýval také Archimédés ze Syrakús (287 př. n. l. – 212 př. n. l.), který v díle *Měření kruhu* dokázal, že obsah kruhu je roven obsahu pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsnami jsou poloměr a obvod tohoto kruhu, čímž vlastně ukázal, že ve vztahu pro obsah kruhu figuruje tatáž konstanta (π) jako ve vztahu pro obvod.

⁸Velikost α předpokládáme v míře stupňové, pro α v míře obloukové je $S = \frac{r^2 \alpha}{2}$.

kruhové výseče příslušející témuž úhlu odečteme obsah S_{ABS} trojúhelníku ABS , který můžeme vyjádřit například dle vztahu z věty 6.2, tedy:

$$S_u = S_v - S_{ABS} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{r^2 \sin \alpha}{2}.$$

Obsah S_m mezikruží, jehož hranici tvoří kružnice $k_1(S, r_1)$, $k_2(S, r_2)$, $r_1 > r_2$, je rozdílem obsahů kruhů $K_1(S, r_1)$, $K_2(S, r_2)$, tedy:

$$S_m = \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi(r_1^2 - r_2^2).$$

6.6 Pýthagorova věta, Eukleidovy věty

V poslední části této kapitoly se podrobně podíváme na známé věty týkající se pravoúhlého trojúhelníku, v nichž se pracuje s obsahy obrazců.

Věta 6.5 (*Pýthagorova⁹ věta*)

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad přeponou roven součtu obsahů čtverců nad odvěsnami.

Důkaz:

Uvažujme libovolný pravoúhlý trojúhelník ABC s odvěsnami a , b a přeponou c . Chceme dokázat, že $c^2 = a^2 + b^2$.

Sestrojme čtverec $KLMN$ o straně délky $a + b$ a na jeho stranách KL , LM , MN , NK po řadě body O , P , Q , R tak, že $|KO| = |LP| = |MQ| = |NR| = b$ (obr. 6.16). Trojúhelníky ABC , ORK , POL , QPM , RQN jsou shodné (*usu*), tedy $|AB| = |OR| = |PO| = |QP| = |RQ| = c$. Čtyřúhelník $OPQR$ tedy může být čtvercem, nebo kosočtvercem.

Shodné trojúhelníky se shodují také v odpovídajících si úhlech, proto $|\sphericalangle ORK| = |\sphericalangle POL|$, a dle věty 2.2 (str. 27) v pravoúhlém trojúhelníku ORK platí $|\sphericalangle KOR| + |\sphericalangle ORK| = 90^\circ$. Pro vnitřní úhel ROP čtyřúhelníku $OPQR$ tedy platí:

$$\begin{aligned} |\sphericalangle ROP| &= 180^\circ - (|\sphericalangle KOR| + |\sphericalangle POL|) = \\ &= 180^\circ - (|\sphericalangle KOR| + |\sphericalangle ORK|) = \\ &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ. \end{aligned}$$

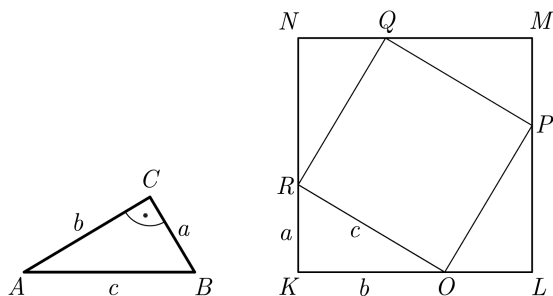
⁹Pýthagorás ze Samu (~ 570 př. n. l. – ~ 510 př. n. l.) byl řecký filosof a matematik, zakladatel tzv. *Pýthagorejské školy* a pravděpodobně první, kdo dokázal *Pýthagorovu větu*.

Analogicky zjistíme, že každý vnitřní úhel čtyřúhelníku $OPQR$ je pravý, jedná se tedy o čtverec.

Nyní můžeme dvěma způsoby vyjádřit obsah čtverce $KLMN$ – jako druhou mocninu délky jeho strany, nebo jako součet obsahů čtyř shodných pravoúhlých trojúhelníků a čtverce $OPQR$ – a tato vyjádření porovnat:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 &= 2ab + c^2 \\ a^2 + b^2 &= c^2\end{aligned}$$

☒



Obrázek 6.16: Důkaz Pýthagorovy věty

Poznámky:

- ▶ Důkazů Pýthagorovy věty existuje mnoho, jsou jim věnovány celé publikace.
- ▶ Pýthagorova věta je zde, tak, jak je obvyklé, formulována jako implikace. Lze však dokázat i obrácenou implikaci, tzv. *obrácenou Pýthagorovu větu*, která říká, že platí-li v trojúhelníku ABC vztah $c^2 = a^2 + b^2$, pak je tento trojúhelník pravoúhlý s přeponou c .¹⁰ Obrácenou Pýthagorovu větu lze využít jako kritérium, zda je trojúhelník zadaný délkami svých stran pravoúhlý.

¹⁰Důkaz viz např. (Horák, 1949).

Pýthagorovu větu lze různými způsoby zobecnit. Můžeme například hledat obecnější vztah platící i v ostroúhlém a tupoúhlém trojúhelníku¹¹ nebo zkoumat vztah mezi obsahy jiných obrazců sestavených nad stranami pravoúhlého trojúhelníku.

Věta 6.6

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah půlkruhu nad přeponou roven součtu obsahů půlkruhů nad odvěsnami.

Důkaz:

Mějme pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou c . Pro obsahy půlkruhů S_a, S_b, S_c nad stranami a, b, c platí $S_a = \frac{\pi a^2}{8}, S_b = \frac{\pi b^2}{8}, S_c = \frac{\pi c^2}{8}$. V trojúhelníku ABC platí Pýthagorova věta, tedy $a^2 + b^2 = c^2$. Tento vztah stačí vynásobit zlomkem $\frac{\pi}{8}$, čímž získáme požadované:

$$\frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} = \frac{\pi c^2}{8}.$$

□

Věta 6.7

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB sestrojme libovolný trojúhelník ABK nad přeponou a jemu podobné trojúhelníky BCL, CAM nad odvěsnami. Potom obsah trojúhelníku ABK je roven součtu obsahů trojúhelníků BCL a CAM .

Důkaz:

Označíme v_a vzdálenost bodu L od přímky BC , v_b vzdálenost bodu M od přímky AC a v_c vzdálenost bodu K od přímky AB (obr. 6.17). Pro obsahy $S_{ABK}, S_{BCL}, S_{CAM}$ trojúhelníků ABK, BCL, CAM platí $S_{ABK} = \frac{cv_c}{2}, S_{BCL} = \frac{av_a}{2}, S_{CAM} = \frac{bv_b}{2}$. Jelikož jsou trojúhelníky ABK, BCL, CAM podobné, je:

$$\frac{c}{a} = \frac{v_c}{v_a} \Rightarrow v_a = \frac{av_c}{c}, \quad (6.4)$$

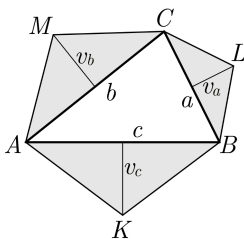
$$\frac{c}{b} = \frac{v_c}{v_b} \Rightarrow v_b = \frac{bv_c}{c}. \quad (6.5)$$

¹¹Takovým zobecněním je tzv. *kosinová věta*, dle níž v libovolném trojúhelníku ABC platí, že $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$; důkaz viz např. (Halas, 2016).

V trojúhelníku ABC platí Pýthagorova věta, tedy $a^2 + b^2 = c^2$.
Tento vztah ekvivalentně upravíme:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 && | \cdot \frac{v_c}{2c} \\ \frac{a^2 v_c}{2c} + \frac{b^2 v_c}{2c} &= \frac{c v_c}{2} && | \text{dosadíme (6.4) a (6.5)} \\ \frac{a v_a}{2} + \frac{b v_b}{2} &= \frac{c v_c}{2} \end{aligned}$$

☒



Obrázek 6.17: Zobecnění Pýthagorovy věty

Poznámka:

- Věty 6.6 a 6.7 jsou jen konkrétními příklady zobecnění věty 6.5. Lze dokázat obecnější tvrzení říkájící, že sestrojíme-li navzájem podobné¹² obrazce nad stranami pravoúhlého trojúhelníku, potom součet obsahů obrazců nad odvěsnami je roven obsahu obrazce nad přeponou.

Věta 6.8 (Eukleidova¹³ věta o výšce)

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad výškou na přeponu roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou shodné s úseky přepony, na něž je přepona rozdělena patou výšky.

Důkaz:

Mějme trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C , výšku na přeponu označme v , patu výšky P a úseky přepony c_a , c_b , kde c_a je

¹²Podobnost obecně zavádíme v kapitole 10.

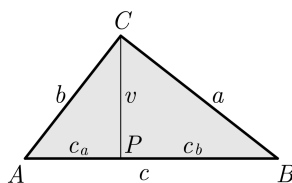
¹³Eukleidés (~ 325 př. n. l. – ~ 260 př. n. l.) byl řecký matematik a geometr. Bývá považován za nejvýznamnějšího matematika antického světa. Jeho neznámější dílo *Základy* (řecky *Stoicheia*) bylo na svou dobu pro deduktivní výstavbu (nejen) geometrie zcela výjimečné.

úsek přilehlý k odvěsně a a c_b je úsek přilehlý k odvěsně b (obr. 6.18). Chceme dokázat, že $v^2 = c_a c_b$.

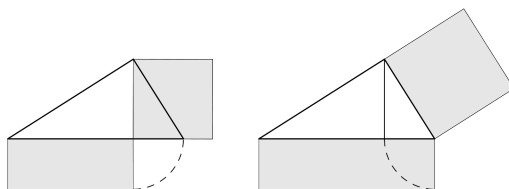
Trojúhelníky ABC a ACP jsou podobné podle věty uu (pravý úhel a úhel α), trojúhelníky ABC a CBP jsou rovněž podobné podle věty uu (pravý úhel a úhel β). Proto jsou podobné i trojúhelníky ACP a CBP . Z této podobnosti plyne:

$$\begin{aligned}\frac{|CP|}{|BP|} &= \frac{|AP|}{|CP|}, \\ \frac{v}{c_a} &= \frac{c_b}{v}, \\ v^2 &= c_a c_b.\end{aligned}$$

⊠



Obrázek 6.18: K důkazům Eukleidových vět



Obrázek 6.19: Rovnost obsahů obrazců dle Eukleidových vět

Věta 6.9 (*Eukleidova věta o odvěsně*)

V pravoúhlém trojúhelníku rozdělíme přeponu patou výšky na přeponu na dva úseky. Potom je obsah čtverce nad libovolnou z odvěsen roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou shodné s přeponou a úsekem přepony přilehlým k příslušné odvěsně.

Důkaz:

Mějme trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C , výšku na přeponu označíme v , patu výšky P a úsek přepony přilehlý k odvěsně a označíme c_a (obr. 6.18). Větu dokážeme pro odvěsnu a . (Pro odvěsnu b bychom postupovali analogicky.) Chceme tedy dokázat, že $a^2 = cc_a$.

Trojúhelníky ABC a CBP jsou podobné (uu). Proto platí:

$$\begin{aligned}\frac{|BC|}{|BP|} &= \frac{|AB|}{|CB|}, \\ \frac{a}{c_a} &= \frac{c}{a}, \\ a^2 &= cc_a.\end{aligned}$$

□

Poznámky:

- ▶ Eukleidovy věty (věty 6.8 a 6.9) lze, stejně jako větu Pýthagorovu, dokázat mnoha různými způsoby.
- ▶ Obrazce, jejichž obsahy se dle Eukleidových vět rovnají, jsou znázorněny na obrázcích 6.19a (k větě 6.8) a 6.19b (k větě 6.9).
- ▶ Eukleidovy věty (věty 6.8 a 6.9) platí, obdobně jako věta Pýthagorova také jako věty obrácené.

Věta 6.10 (*Hérónův¹⁴ vzorec*)

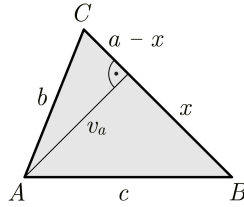
Pro obsah S_Δ trojúhelníku ABC platí $S_\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde s značí poloviční obvod trojúhelníku ABC .

Důkaz:

V trojúhelníku ABC sestrojíme výšku v_a . Búno můžeme předpokládat, že v_a protíná stranu a , neboť v každém trojúhelníku vždy alespoň jedna výška tuto vlastnost má. Délky úseček, na něž je strana a patou výšky v_a rozdělena, označíme x a $a-x$ (obr. 6.20). Podle Pýthagorovy věty platí:

$$x^2 + v_a^2 = c^2, \quad (6.6)$$

$$(a-x)^2 + v_a^2 = b^2. \quad (6.7)$$



Obrázek 6.20: Hérónův vzorec

Odečtením vztahu (6.6) od vztahu (6.7) získáme $a^2 - 2ax = b^2 - c^2$, odtud vyjádříme x :

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}. \quad (6.8)$$

Ze vztahu (6.8) dosadíme za x do vztahu (6.6) a vyjádříme v_a :

$$\begin{aligned} v_a^2 &= c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right)^2 = \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}, \\ v_a &= \frac{\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}}{2a}. \end{aligned}$$

Vyjádřenou výšku v_a nyní dosadíme do vztahu (6.1) pro obsah S_{Δ} trojúhelníku ABC a získaný výraz postupně upravujeme pomocí rozkladu $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ a vzorců $(A \pm B)^2$:

$$\begin{aligned} S &= \frac{av_a}{2} = \frac{\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)}}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{[(a+c)^2 - b^2][b^2 - (a-c)^2]}}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}}{4}. \end{aligned}$$

¹⁴Hérón z Alexandrie (10–75) byl starověký matematik, fyzik a vynálezce. Vztah pro výpočet obsahu trojúhelníku z délek jeho stran uvedl v díle *Metrika*.

Položíme-li $s = \frac{a+b+c}{2}$, resp. $a+b+c = 2s$, můžeme např. druhou závorku pod odmocninou v poslední úpravě výše přepsat následovně:

$$a+c-b = a+c+b-2b = 2s-2b.$$

Pro obsah S_{Δ} tedy platí:

$$\begin{aligned} S_{\Delta} &= \frac{\sqrt{2s(2s-2b)(2s-2c)(2s-2a)}}{4} = \frac{\sqrt{16s(s-b)(s-c)(s-a)}}{4} = \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \end{aligned}$$

□

Na závěr kapitoly s využitím Pýthagorovy věty dokážeme **větu 3.13** (str. 63).

Důkaz:

Mějme nesoustředné kružnice $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$. Chceme ukázat, že množinou všech bodů, které mají k těmto kružnicím stejnou mocnost, je přímka kolmá ke středně.

Nejprve zjistíme, zda existuje bod $A \in \longleftrightarrow S_1S_2$, který má k oběma kružnicím stejnou mocnost, tj. $m_{k_1}^A = m_{k_2}^A$. Tuto rovnost prepíšeme pomocí definice mocnosti bodu ke kružnici:

$$|AS_1|^2 - r_1^2 = |AS_2|^2 - r_2^2. \quad (6.9)$$

Búno předpokládejme, že $r_1 > r_2$. Ze vztahu (6.9) plyne, že potom také $|AS_1| > |AS_2|$, a tedy pokud bod A existuje, pak leží na polopřímce SS_2 , kde S je středem $\overline{S_1S_2}$. Díky tomu je

$$|AS_2| = |s - |AS_1||, \quad (6.10)$$

kde s je délka středně, tj. $s = |S_1S_2|$.

Vztah (6.10) dosadíme do vztahu (6.9) a po úpravě dostaneme:

$$|AS_1| = \frac{r_1^2 - r_2^2 + s^2}{2s} > 0,$$

z čehož plyne, že bod A existuje a je jednoznačně určen.

Veďme bodem A kolmici b k přímce S_1S_2 . Pro libovolný bod $B \neq A$ přímky b podle Pýthagorovy věty platí (obr. 6.21):

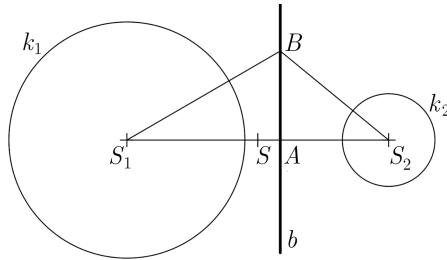
$$|BS_1|^2 = |AS_1|^2 + |AB|^2, \text{ resp.} \quad (6.11)$$

$$|BS_2|^2 = |AS_2|^2 + |AB|^2. \quad (6.12)$$

Vyjádřením výrazů $|AS_1|^2$, $|AS_2|^2$ ze vztahů (6.11), (6.12) a jejich dosazením do vztahu (6.9) získáme po úpravě:

$$\begin{aligned} |BS_1|^2 - r_1^2 &= |BS_2|^2 - r_2^2, \text{ neboli} \\ m_{k_1}^B &= m_{k_2}^B \end{aligned}$$

pro každý bod B přímky b .



Obrázek 6.21: Množina bodů majících stejnou mocnost k daným kružnicím

Ještě je třeba ukázat, že žádný jiný bod roviny již nemá stejnou mocnost k daným kružnicím, což dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje bod C takový, že $m_{k_1}^C = m_{k_2}^C$, tj.

$$|CS_1|^2 - r_1^2 = |CS_2|^2 - r_2^2, \quad (6.13)$$

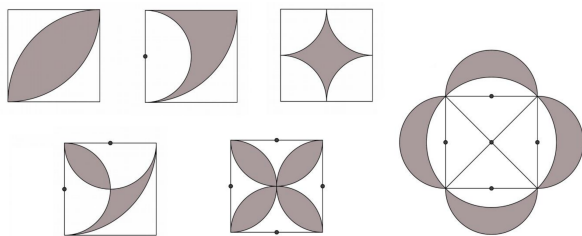
přičemž $C \notin b$ (tzn., že rovněž bod C neleží na přímce S_1S_2 , neboť jsme již ukázali, že na této přímce leží jediný bod A mající stejnou mocnost k oběma kružnicím, avšak tento bod je bodem přímky b). Bodem C veďme kolmici c k přímce S_1S_2 a označme D průsečík přímek c , S_1S_2 . Z Pýthagorovy věty aplikované po řadě na trojúhelníky S_1CD , S_2CD získáme $|CS_1|^2 = |DS_1|^2 + |CD|^2$, $|CS_2|^2 = |DS_2|^2 + |CD|^2$ a po dosazení do vztahu (6.13) vychází, že $|DS_1|^2 - r_1^2 = |DS_2|^2 - r_2^2$, neboli $m_{k_1}^D = m_{k_2}^D$, kde $D \neq A \wedge$

$\wedge D \in \longleftrightarrow S_1 S_2$, což je spor, neboť jsme výše dokázali, že A je jediným bodem přímky $S_1 S_2$, který má k daným kružnicím stejnou mocnost.

☒

6.7 Úlohy

- 6.1** Trojúhelníky KLM a $K'L'M'$ jsou podobné, přičemž $|K'M'| = k|KM|$, $k > 0$. Jaký poměru jejich a) obvodů, b) obsahů?
- 6.2** Vyjádřete obvody a obsahy šedě vybarvených obrazců (obr. 6.22) v závislosti na délce strany a čtverce, jemuž jsou obrazce „vepsány/opsány“. Obrazce jsou ohraničeny úsečkami a částmi kružnic, jejichž středy jsou vždy ve vrcholech nebo zvyrazněných středech stran či úhlopříček čtverce.



Obrázek 6.22: K úloze 6.2

- 6.3** Střed ramene BC lichoběžníku $ABCD$ označte E . Jaký je poměr obsahů lichoběžníku $ABCD$ a trojúhelníku ADE ?
- 6.4** Délky základů lichoběžníku jsou 6 cm a 4 cm, jeho obsah je 25 cm^2 . Vypočítejte obsahy čtyř trojúhelníků, na které je lichoběžník rozdělen svými úhlopříčkami.
- 6.5** Lichoběžníku $ABCD$ lze vepsat kružnici. Délky jeho ramen jsou 3 cm a 5 cm, jeho střední příčka jej dělí na dva lichoběžníky, jejichž poměr obsahů je $5 : 11$. Určete délky jeho základů.
- 6.6** Do kružnice $k(S, 24 \text{ cm})$ jsou vepsány dvě kružnice l_1, l_2 o poloměrech 12 cm tak, že s kružnicí k mají vnitřní dotyk a spolu navzájem mají vnější

- dotyk v bodě S . Vypočítejte poloměr kružnice m , která se dotýká všech tří zadaných kružnic.
- 6.7** Do čtvrtkruhu o daném poloměru R vepište kruh o maximálním obsahu. Určete poloměr vepsaného kruhu v závislosti na R .
- 6.8** Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC a délky jeho výšek, je-li $a = 10$ cm, $b = 8$ cm, $c = 14$ cm.
- 6.9** Je dán čtverec $ABCD$. Označme S střed jeho strany BC a Q průsečík přímk AS a BD . Přímk AS a BD dělí čtverec $ABCD$ na čtyři části. Určete jejich obsahy, jestliže obsah trojúhelníku BSQ je 8 cm².
- 6.10** Vyjádřete poloměr kružnice opsané r a poloměr kružnice vepsané ρ pravidelnému pětiúhelníku, jehož strana má délku a .
- 6.11** V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou c je dána odvěsna $a = 4$ cm a těžnice $t_a = 6$ cm. Vypočítejte délku těžnice t_b .
- 6.12** V obdélníku $ABCD$ vyjádřete vzdálenost bodu C od úsečky BD v závislosti na délkách $a = |AB|$, $b = |BC|$.
- 6.13** Do rovnostranného trojúhelníku ABC o straně délky a je vepsán čtverec $KLMN$. Vyjádřete délku x strany čtverce v závislosti na délce a , jestliže $\overline{KL} \subset \overline{AB} \wedge M \in \overline{BC} \wedge N \in \overline{AC}$.
- 6.14** Dokažte Pýthagorovu větu jako přímý důsledek vět Eukleidových (vět 6.8 a 6.9).
- 6.15** Dokažte Eukleidovy věty (věty 6.8 a 6.9) jako přímý důsledek věty Pýthagorovy.
- 6.16** Dokažte Eukleidovy věty (věty 6.8 a 6.9) užitím mocnosti bodu ke kružnici.
- 6.17** Dokažte, že v lichoběžníku $ABCD$ se základnou AB platí $e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac$.
- 6.18** Dokažte, že v pravoúhlém trojúhelníku je součet délek odvěsen roven součtu průměrů kružnice opsané a vepsané.
- 6.19** Je dán čtverec $ABCD$, bod E je středem úsečky AB , bod F je středem úsečky CD . Sestrojte kružnici k , která se dotýká přímk FB a prochází body A , E .

Kapitola 7

Množiny bodů dané vlastnosti

V této kapitole se věnujeme množinám bodů splňujících určitá kritéria. Není-li řečeno jinak, zabýváme se jen množinami bodů v *eukleidovské rovině* (skutečnost, že máme na mysli množinu bodů *v rovině* pro jednoduchost občas neuvádíme). Eukleidovskou rovinu dále značíme E_2 .

7.1 Základní pojmy a množiny

Množinou bodů dané vlastnosti nazýváme takovou množinu bodů, pro kterou platí, že každý bod této množiny má danou vlastnost a zároveň každý bod, který má danou vlastnost, je bodem této množiny.

Poznámky:

- ▶ Typickými vlastnostmi bodu jsou například: bod leží v předepsané vzdálenosti od nějakého objektu, bod je vrcholem úhlu o dané velikosti apod.
- ▶ Ve starší české terminologii se množiny bodů dané vlastnosti nazývaly *geometrická místa bodů*.
- ▶ Zdůrazněme, že množinou bodů dané vlastnosti dále rozumíme (dle druhé části definice výše) množinu *všech* bodů dané vlastnosti.

S některými typickými množinami bodů dané vlastnosti jsme se již v předchozích kapitolách setkali, například s kružnicí a kruhem, osou úsečky, osou úhlu či

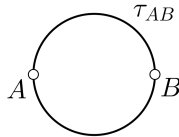
Thalétovou kružnicí. Tyto množiny připomeneme a zároveň na nich ukážeme různé způsoby jejich zápisu a grafického znázornění.

Kružnice k se středem S a poloměrem r , kde $r > 0$, je množinou bodů v rovině, které leží ve vzdálenosti r od bodu S . Symbolicky píšeme $k(S, r)$, množinově můžeme psát $k = \{X \in E_2; |XS| = r\}$.

Kruh K se středem S a poloměrem r , kde $r > 0$ je množinou bodů v rovině, které leží ve vzdálenosti menší nebo rovné r od bodu S . Symbolicky píšeme $K(S, r)$, množinově můžeme psát $K = \{X \in E_2; |XS| \leq r\}$.

Osa úsečky AB je množinou bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od bodu A jako od bodu B . Lze dokázat, že je to přímka kolmá k úsečce AB , která prochází středem \overline{AB} (viz věta 1.3, str. 23). Symbolicky píšeme o_{AB} (nebo libovolné jiné malé písmeno jako označení přímky), množinově můžeme psát $o_{AB} = \{X \in E_2; |XA| = |XB|\}$.

Thalétova kružnice nad úsečkou AB je množinou vrcholů pravých úhlů pravoúhlých trojúhelníků s přeponou AB (viz věta 3.6, str. 51) ležících v dané rovině. Symbolicky píšeme τ_{AB} (nebo libovolné jiné malé písmeno jako označení kružnice), množinově můžeme psát $\tau_{AB} = \{X \in E_2; |\sphericalangle AXB| = 90^\circ\}$. Graficky se jedná o kružnici nad průměrem AB vyjma bodů A, B , což můžeme znázornit tak, jak je ukázáno na obr. 7.1.



Obrázek 7.1: Thalétova kružnice nad úsečkou AB

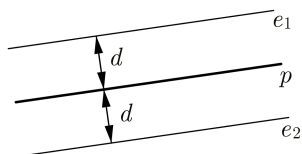
Dále definujeme několik dalších, dosud nezmíněných, elementárních množin bodů dané vlastnosti.

Množinu bodů v rovině, které leží v dané vzdálenosti d ($d > 0$) od dané přímky p , nazveme *ekvidistantou přímky* p .

Poznámky:

- Z definice vzdálenosti bodu od přímky (str. 19) vyplývá, že ekvidistantou přímky p je dvojice různých přímek e_1, e_2 rovnoběžných s přímkou p , přičemž $|pe_1| = |pe_2| = d$ (obr. 7.2).

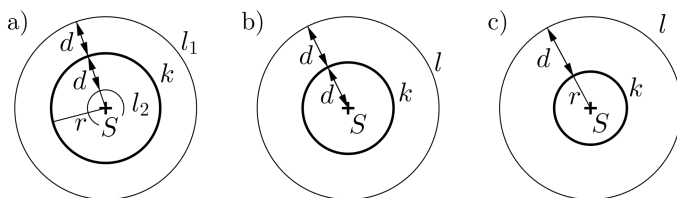
- Každou z přímek můžeme označit zvlášť malým písmenem (zde použito značení e_1, e_2) nebo můžeme označit celou množinu libovolným velkým písmenem, např. M . Potom je $M = \{X \in E_2; |Xp| = d\} = e_1 \cup e_2$.

Obrázek 7.2: Ekvidistanta přímky p

Množinu bodů v rovině, které leží v dané vzdálenosti d ($d > 0$) od dané kružnice $k(S, r)$, nazveme *ekvidistantou kružnice k* .

Poznámky:

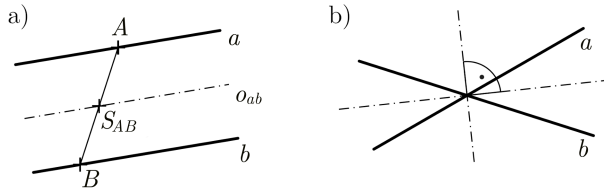
- Z definice vzdálenosti bodu od libovolného útvaru (str. 19) vyplývá, že ekvidistantou kružnice k je/jsou
 - právě dvě kružnice $l_1(S; r + d), l_2(S; r - d)$, pokud $r > d$ (obr. 7.3a),
 - právě jedna kružnice $l(S; r + d)$ a bod S , pokud $r = d$ (obr. 7.3b),
 - právě jedna kružnice $l(S; r + d)$, pokud $r < d$ (obr. 7.3c).
- Označíme-li M ekvidistantu kružnice k , pak $M = \{X \in E_2; |Xk| = d\}$.

Obrázek 7.3: Ekvidistanta kružnice k

Množinu bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od daných navzájem různých rovnoběžek a, b , nazveme *osou rovinného pásu* určeného přímkami a, b .

Poznámky:

- Z definice vzdálenosti bodu od přímky (str. 19) vyplývá, že osou rovinného pásu určeného přímkami a, b je přímka o_{ab} , která je rovnoběžná s přímkami a, b a prochází středem S_{AB} libovolné úsečky AB , kde $A \in a \wedge B \in b$ (obr. 7.4a).
- Množinově lze psát: $o_{ab} = \{X \in E_2; |Xa| = |Xb|\}$.



Obrázek 7.4: Osa rovinného pásu a osa různoběžek

Množinu bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od daných různoběžek a, b , nazveme *osou různoběžek* a, b .

Poznámky:

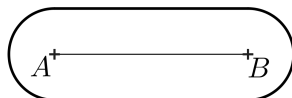
- S touto množinou jsme se již setkali v podobě sjednocení os úhlů sevřených dvěma různoběžkami (viz věta 1.4, str. 24). Je tvořena dvěma navzájem kolmými přímkami (obr. 7.4b).
- Označíme-li danou množinu M , lze psát: $M = \{X \in E_2; |Xa| = |Xb|\}$.

Množinu bodů v rovině, které leží v dané vzdálenosti d ($d > 0$) od dané úsečky AB , nazveme *ekvidistantou úsečky* AB .

Poznámky:

- Z definice vzdálenosti bodu od libovolného útvaru (str. 19) vyplývá, že ekvidistanta úsečky AB je sjednocením dvou shodných a s \overline{AB} rovnoběžných úseček spolu se dvěma polokružnicemi se středy A, B (viz obr. 7.5).

- Dle některých zdrojů se pro ekvidistantu úsečky používá též termín *ovál*¹, v praxi se s touto množinou setkáme na některých sportovištích (běžecký ovál).



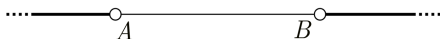
Obrázek 7.5: Ovál

7.2 Množina bodů, z nichž vidíme úsečku pod daným úhlem

Bodem, z něž *vidíme úsečku AB pod daným úhlem* α , rozumíme takový bod X , že $|\sphericalangle AXB| = \alpha$, přičemž ze dvou možných různých úhlů AXB uvažujeme ten menší, tedy $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$. Nejprve se podívejme na specifické případy, kdy $\alpha \in \{0^\circ; 90^\circ; 180^\circ\}$:

(a) $\alpha = 0^\circ$

Aby byl úhel AXB nulový, musí body A, X, B ležet v jedné přímce a zároveň bod X nesmí být bodem úsečky AB . Hledanou množinou je tedy sjednocení opačných polopřímek k polopřímkám AB a BA vyjma bodů A, B (obr. 7.6).

Obrázek 7.6: Množina bodů, z nichž je \overline{AB} vidět pod úhlem o velikosti 0°

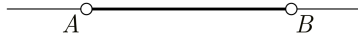
(b) $\alpha = 90^\circ$

Řešením tohoto problému je Thalétova kružnice nad úsečkou AB , viz věta 3.6 (str. 51).

(c) $\alpha = 180^\circ$

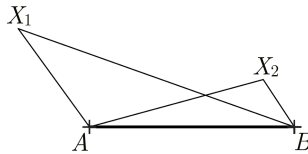
Aby byl úhel AXB přímý, musí být bod X vnitřním bodem úsečky AB . Hledanou množinou je v tomto případě úsečka AB bez jejích krajních bodů A, B (obr. 7.7).

¹V literatuře však lze nalézt různé definice oválu, které jsou v rozporu s naším pojetím, srovnej např. s (Sedláček a kol., 1981).



Obrázek 7.7: Množina bodů, z nichž je \overline{AB} vidět pod úhlem o velikosti 180°

Uvažujeme-li jiný bod X než ve výše uvedených případech (a) až (c), bude úhel AXB ostrý nebo tupý (obr. 7.8).



Obrázek 7.8: Různé body, z nichž je \overline{AB} vidět pod ostrým/tupým úhlem

Věta 7.1

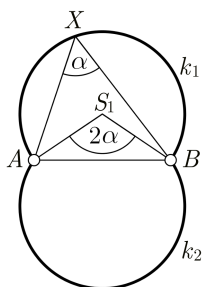
Nechť je dána úsečka AB a číslo $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$. Množinou bodů, z nichž je úsečka AB vidět pod úhlem o velikosti α , je sjednocení větších kružnicových oblouků AB kružnic $k_1(S_1, |S_1A|)$, $k_2(S_2, |S_2A|)$ vyjma bodů A, B , kde body S_1, S_2 leží na ose úsečky AB a zároveň $|\sphericalangle AS_1B| = |\sphericalangle AS_2B| = 2\alpha$.

Důkaz:

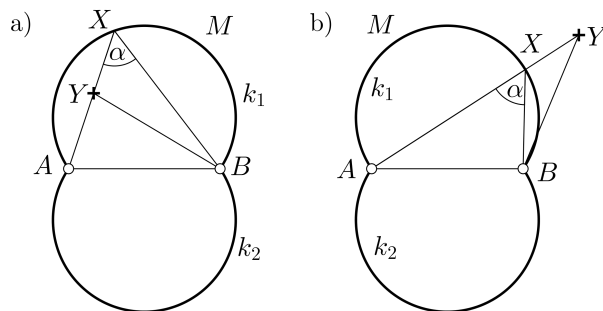
Označme M sjednocení větších kružnicových oblouků AB kružnic k_1, k_2 vyjma bodů A, B . Je třeba dokázat, že pro každý bod $X \in M$ je $|\sphericalangle AXB| = \alpha$ a také že pro libovolný bod $Y \notin M$ je $|\sphericalangle AYB| \neq \alpha$.

První část důkazu je přímým důsledkem věty 3.7 (str. 54), neboť pro libovolný bod $X \in M$ je úhel AXB obvodovým úhlem příslušejícím středovému úhlu AS_1B , resp. AS_2B (obr. 7.9).

Zvolme libovolný bod $Y \notin M$ ležící v oblasti omezené množinou M . Buď $Y \in \overline{AB}$ (tedy $|\sphericalangle AYB| = 180^\circ$), nebo existuje průsečík X polopřímky AY s množinou M (obr. 7.10a). Z první části důkazu víme, že $|\sphericalangle AXB| = \alpha$. Dle věty 2.3 (str. 28) je $|\sphericalangle AYB| = |\sphericalangle AXB| + |\sphericalangle XBY|$, tedy $|\sphericalangle AYB| > \alpha$.



Obrázek 7.9: Množina bodů, z nichž vidíme úsečku pod ostrým úhlem



Obrázek 7.10: K důkazu věty 7.1

Zvolíme-li libovolný bod $Y \notin M$ ležící vně oblasti omezené množinou M , tak buď $Y \in \overleftrightarrow{AB}$ (tedy $|\sphericalangle AYB| = 0^\circ$), nebo existuje průsečík X alespoň jedné z polopřímek AY , BY s množinou M . Búno předpokládejme, že $X = \overrightarrow{AY} \cap M$ (obr. 7.10b). Z první části důkazu víme, že $|\sphericalangle AXB| = \alpha$. Dle věty 2.3 (str. 28) je $|\sphericalangle AXB| = |\sphericalangle AYB| + |\sphericalangle XBY|$, tedy $|\sphericalangle AYB| < \alpha$.

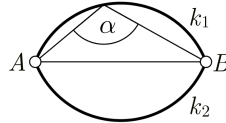
□

Věta 7.2

Nechť je dána úsečka AB a číslo $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$. Množinou bodů, z nichž je úsečka AB vidět pod úhlem o velikosti α , je sjednocení menších kružnicových

oblouků AB kružnic $k_1(S_1, |S_1A|)$, $k_2(S_2, |S_2A|)$ vyjma bodů A, B , kde body S_1, S_2 leží na ose \overline{AB} a zároveň $|\sphericalangle AS_1B| = |\sphericalangle AS_2B| = 360^\circ - 2\alpha$ (obr. 7.11).

Důkaz vyplývá z věty 4.12 (str. 76) a z důkazu věty 7.1. ☒

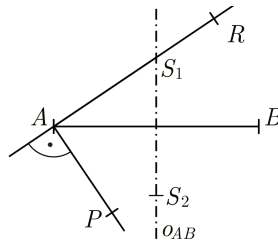


Obrázek 7.11: Množina bodů, z nichž vidíme úsečku pod tupým úhlem

Poznámka:

- V důkazu věty 7.1 (totéž bychom analogicky získali i v důkazu věty 7.2) jsme ukázali nejen, že pro libovolný bod $Y \notin M$ je $|\sphericalangle AYB| \neq \alpha$, ale také že pro vnitřní bod množiny M je $|\sphericalangle AYB| > \alpha$ a pro vnější bod je $|\sphericalangle AYB| < \alpha$.

Z vět 7.1 a 7.2 vyplývá, jak k dané úsečce AB sestrojiti množinu bodů, z nichž je tato úsečka vidět pod daným úhlem α . Klíčové je sestrojiti středy S_1, S_2 kružnic k_1, k_2 . Uvědomme si, že trojúhelníky ABS_1, ABS_2 jsou shodné a rovnoramenné. Jejich vnitřní úhly při základně AB jsou tedy shodné a jejich velikost je $90^\circ - \alpha$ pro $\alpha < 90^\circ$ a $\alpha - 90^\circ$ pro $\alpha > 90^\circ$. V obou případech tedy můžeme postupovat následovně (obr. 7.12): Sestrojíme polopřímku AP tak, aby $|\sphericalangle BAP| = \alpha$, poté přímku $AR \perp \rightarrow AP$ a osu o_{AB} úsečky AB . Bod S_1 je průsečíkem přímky AR a osy o_{AB} , bod S_2 je s bodem S_1 osově souměrný² podle osy \overline{AB} .



Obrázek 7.12: Konstrukce množiny bodů, z nichž vidíme \overline{AB} pod daným úhlem

²Osová souměrnost viz podkapitola 9.2.

7.3 Kuželosečky

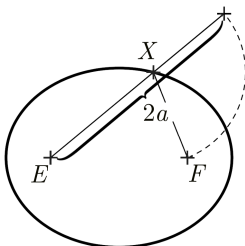
Křivky vznikající jako řezy rotační kuželové plochy rovinou, která neprochází vrcholem kuželové plochy, nazýváme *regulárními kuželosečkami*. Můžeme takto získat kružnici, elipsu, parabolu a hyperbolu. Kružnici jsme se již podrobně zabývali v kapitole 3, ostatním regulárním kuželosečkám se budeme věnovat zde.

Množinu bodů v rovině, které mají od dvou daných různých bodů E , F konstantní součet vzdáleností roven v , kde $v > |EF|$, nazveme *elipsou*.

Body E , F nazýváme *ohniska* elipsy.

Poznámka:

- ▶ Délka v v definici elipsy je délkou tzv. *hlavní osy* elipsy. Jelikož se v úlohách často pracuje pouze s délkou poloviční (délkou tzv. *hlavní poloosy* elipsy), bývá z praktických důvodů označována $2a$ (obr. 7.13). Označíme-li elipsu e , můžeme psát $e = \{X \in E_2; |EX| + |FX| = 2a\}$.
- ▶ Připustíme-li splynutí bodů E , F v definici elipsy, získáme kružnici se středem $E = F$ a průměrem v . Na kružnici lze tedy pohlížet jako na speciální případ elipsy.



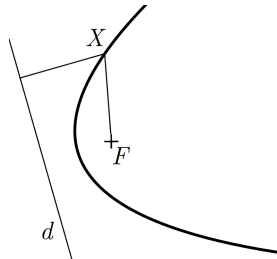
Obrázek 7.13: Elipsa

Množinu bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu F jako od dané přímky d , přičemž $F \notin d$, nazveme *parabolou* (obr. 7.14).

Bod F nazýváme *ohniskem* paraboly, přímku d *řídící přímkou* paraboly a $|Fd|$ *parametrem* paraboly.

Poznámka:

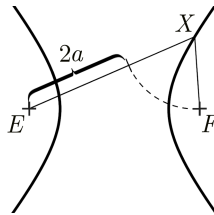
- Označíme-li parabolu p , můžeme psát $p = \{X \in E_2; |XF| = |Xd|\}$.



Obrázek 7.14: Parabola

Množinu bodů v rovině, které mají od dvou daných různých bodů E, F konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností rovnou v , kde $0 < v < |EF|$, nazveme *hyperbolou*.

Body E, F nazýváme *ohniska* hyperboly.



Obrázek 7.15: Hyperbola

Poznámky:

- Pokud bychom v definici hyperboly uvažovali rozdíl vzdáleností bez absolutní hodnoty, získali bychom jen jednu část, tzv. *větev*, hyperboly.
- Délka v v definici hyperboly je délkou tzv. *hlavní osy* hyperboly. Jelikož se v úlohách často pracuje s délkou poloviční (délkou tzv. *hlavní poloosy* hyperboly), bývá z praktických důvodů označována $2a$ (obr. 7.15). Označíme-li hyperbolu h , můžeme psát $h = \{X \in E_2; ||EX| - |FX|| = 2a\}$.

Regulární kuželosečky lze definovat i jinými způsoby. Zde zmíníme ještě tzv. *společnou definici kuželoseček*.

Je dána přímka d (*řídící přímka*), bod F (*ohnisko*), kde $F \notin d$, a konstanta $\varepsilon > 0$. Množinu bodů v rovině, pro které platí $\frac{|XF|}{|Xd|} = \varepsilon$, nazveme

- (a) *elipsou* pro $\varepsilon < 1$,
- (b) *parabolou* pro $\varepsilon = 1$,
- (c) *hyperbolou* pro $\varepsilon > 1$.

Poznámky:

- ▶ Poslední definice v části (b) odpovídá výše uvedené definici paraboly. Pro elipsu a hyperbolu je však přístup jiný a napovídá nám, že i tyto dvě kuželosečky mají řídící přímku (díky symetrii dokonce dvě).
- ▶ Společnou definicí kuželoseček nelze definovat kružnici.
- ▶ Kuželosečkami nazýváme všechny množiny bodů, které lze získat jako průnik rotační kuželové plochy rovinou. Vedle regulárních kuželoseček existují také tzv. *singulární kuželosečky*, které jsou průnikem kuželové plochy s rovinou procházející vrcholem kuželové plochy. Singulární kuželosečkou je například bod nebo dvojice různoběžných přímek.

7.4 Apollóniova kružnice

V podkapitole 7.3 jsme definovali elipsu, hyperbolu a parabolu mimo jiné jako křivky, jejichž podíl vzdáleností od pevně dané přímky a bodu na ní neležícího je konstantní. Můžeme se zamyslet nad tím, co získáme, budeme-li zkoumat množinu bodů, jejichž podíl vzdáleností od dvou různých pevných bodů je konstantní.

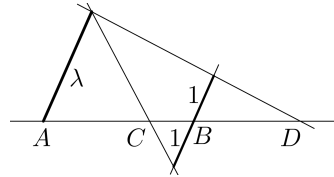
Věta 7.3

Nechť jsou dány dva různé body A, B a kladné číslo $\lambda \neq 1$. Množinou bodů X v rovině, pro něž platí $\frac{|AX|}{|BX|} = \lambda$, je kružnice k sestavená nad průměrem CD ,

kde C a D jsou body přímky AB splňující vztah $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \lambda$.

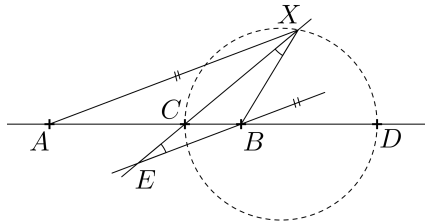
Důkaz:

Nejprve ukážeme, že splňuje-li bod X daný vztah, potom leží na kružnici k nad průměrem CD . Body C, D nalezneme na přímce AB pomocí podobných trojúhelníků (viz obr. 7.16, dělení úsečky v daném poměru podrobněji viz kapitola 8, str. 130). Mimochodem, jsou to body, jejichž dělicí poměr vzhledem k bodům A, B je roven λ , resp. $-\lambda$, a pro $\lambda \neq 1$ je lze vždy sestrojít.

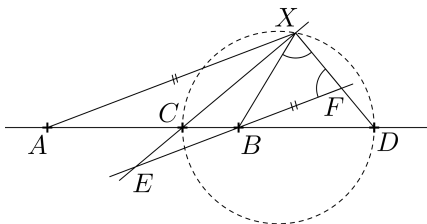
Obrázek 7.16: Konstrukce bodů C, D

Předpokládejme, že pro bod X různý od C, D platí $\frac{|AX|}{|BX|} = \lambda$.

Veďme bodem B přímkou rovnoběžnou s AX (obr. 7.17). Její průsečík s přímkou CX označme E . Z podobnosti trojúhelníků AXC a BEC (*uu*; shodnost dvojic úhlů plyne ze ZT 3, str. 16, a ZT 4, str. 17) plyne $\frac{|AX|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \lambda = \frac{|AX|}{|BX|} \Rightarrow |BE| = |BX|$. Trojúhelník BEX je tedy rovnoramenný a dle věty 2.5 (str. 32) platí $|\sphericalangle B X E| = |\sphericalangle B E X|$.

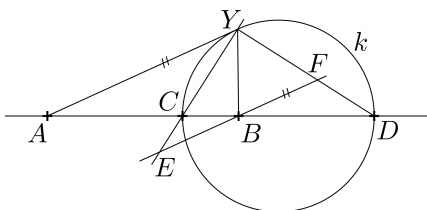
Obrázek 7.17: Rovnoramenný trojúhelník BEX

Obdobně z podobnosti trojúhelníků ADX a BDF , kde F je průsečíkem přímek BE a DX , odvodíme rovnost $|BF| = |BX|$ a poté rovnost velikostí úhlů při vrcholech F a X zvýrazněných na obrázku 7.18.

Obrázek 7.18: Rovnoramenný trojúhelník BFX

Dle věty 2.3 (str. 28) je $2|\sphericalangle BXC| + 2|\sphericalangle BXD| = |\sphericalangle FBX| + |\sphericalangle XBE|$. Úhly FBX a XBE jsou vedlejší, proto $|\sphericalangle FBX| + |\sphericalangle XBE| = 180^\circ$, a tedy $|\sphericalangle BXC| + |\sphericalangle BXD| = 90^\circ$. Bod X proto náleží Thalétově kružnici k nad úsečkou CD (viz věta 3.6, str. 51).

Dále je třeba ukázat, že každý bod kružnice k má požadovanou vlastnost. Uvažujme libovolný bod $Y \in k$, tedy $|\sphericalangle CYD| = 90^\circ$. Označme po řadě E, F průsečíky přímk CY, DY s přímkou vedenou bodem B rovnoběžně s přímkou AY (obr. 7.19).



Obrázek 7.19: K druhé části důkazu věty 7.3

Z podobnosti dvojic trojúhelníků ACY, BCE a ADY, BDF (uu) vyplývá rovnost poměrů $\frac{|AY|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \lambda = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AY|}{|BF|}$, a tedy $|BE| = |BF|$. Jelikož je $|\sphericalangle DYC| = 90^\circ = |\sphericalangle FYE|$, leží bod Y na Thalétově kružnici t nad \overline{EF} , a tedy $|BE| = |BY|$.

Již víme, že $\frac{|AY|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \lambda$. Dosadíme-li za $|BE|$ výraz $|BY|$, dostáváme požadovaný vztah $\frac{|AY|}{|BY|} = \lambda$.

□

Mějme dva různé body A, B a kladné číslo $\lambda \neq 1$. Množinu bodů X v rovině, pro něž platí $\frac{|AX|}{|BX|} = \lambda$, tj. kružnici z věty 7.3, nazýváme *Apollóniovou kružnicí*.

7.5 Úlohy

- 7.1** Sestrojte množinu středů všech kružnic, které se dotýkají dané přímky p v jejím daném bodě T .
- 7.2** Sestrojte množinu středů všech kružnic, které se dotýkají dané kružnice k v jejím daném bodě T .
- 7.3** Jsou dány soustředné kružnice $k(K, 5 \text{ cm})$, $l(K, 2 \text{ cm})$ a bod M tak, že $|KM| = 4 \text{ cm}$. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají kružnic k, l a prochází bodem M .
- 7.4** Je dána úsečka AB . Sestrojte množinu středů všech kosočtvců $ABCD$.
- 7.5** Je dána úsečka AB . Znázorněte množinu bodů, ze kterých je úsečka AB vidět pod úhlem o velikosti $\alpha \in (30^\circ; 60^\circ)$.
- 7.6** Znázorněte množinu bodů stejně vzdálených od ramen ostrého úhlu AVB .
- 7.7** Je dána přímka p a bod A , který na ní neleží. Sestrojte množinu středů všech úseček AX , jestliže X probíhá přímku p .
- 7.8** Jsou dány různé rovnoběžky a, b . Sestrojte množinu bodů, které mají od přímky a dvojnásobnou vzdálenost než od přímky b .
- 7.9** Určete množinu těžišť všech pravoúhlých trojúhelníků se společnou přeponou AB .
- 7.10** Sestrojte několik různých bodů
- elipsy, jsou-li dána ohniska E, F a konstanta $2a > |EF|$,
 - paraboly, je-li dána řídicí přímka d a ohnisko F , kde $F \notin d$,
 - hyperboly, jsou-li dána ohniska E, F a konstanta $2a < |EF|$.
- 7.11** Je dán trojúhelník ABC . V množině M sestrojte množinu bodů X majících vlastnost $|XA| > |XB|$, jestliže (a) $M = \longleftrightarrow AB$, (b) $M = E_2$, (c) $M = \triangle ABC$.

Kapitola 8

Konstrukční úlohy

Za konstrukční úlohu považujeme úlohu, v níž je požadováno sestrojení geometrického útvaru (přesněji všech geometrických útvarů) splňujícího dané podmínky. Podstatou řešení takové úlohy není samotná konstrukce, ale deduktivní úvaha vedoucí k řešení úlohy, neboli nalezení ideální posloupnosti vhodných elementárních kroků.

K řešení konstrukčních úloh využíváme zpravidla množiny bodů daných vlastností, tj. vycházíme z toho, co je zadáno, a nezadané body hledáme jako body splňující vzhledem k zadaným objektům nějaké vlastnosti. Ve specifických případech lze také využít metodu algebraického výpočtu.

8.1 Elementární eukleidovské konstrukce

Rozlišujeme dva základní typy konstrukcí – *eukleidovské* a *neeukleidovské*.

Eukleidovskou konstrukcí nazýváme takovou konstrukci, k jejímuž provedení nám stačí pouze pravítko (s jednou rovnou stranou a bez měřítka, tzv. *eukleidovské pravítko*) a kružítko.

Poznámky:

- ▶ S uvedenými pomůckami jsme schopni spojit dva dané body rovnou čarou (přímkou), rovnou čáru podle potřeby na obě strany prodloužit a sestrojít

kružnici se zadaným středem procházející daným bodem.¹

- Některé konstrukční úlohy nelze řešit eukleidovsky, k jejich řešení je zapotřebí využít další pomůcky (například křivítka aj.). V dalším textu se zabýváme pouze konstrukcemi eukleidovskými.

Uvědomme si, že některé běžné konstrukce, jako například vést daným bodem kolmicí k dané přímce, vést daným bodem rovnoběžku s danou přímkou aj., konstruujeme běžně pomocí trojúhelníku s ryskou, dvojice pravítek apod., tedy vlastně neeukleidovsky. Tyto elementární konstrukce však za eukleidovské považujeme, neboť je eukleidovsky řešit lze, pouze je pro jednoduchost v postupech složitějších konstrukcí jako posloupnost eukleidovských kroků nerozepisujeme. Rovněž pro jednoduchost připustíme zadání úloh (délek úseček, poloměrů kružnic aj.) v jednotkách délky.²

Eukleidovsky též můžeme sestrojít osu úhlu a osu úsečky, graficky sečíst či odečíst úsečky či úhly nebo přenést úhel. Dále lze eukleidovsky sestrojít úhly o velikostech 60° a 180° a následně pak úhly, které získáme jejich půlením či zdvojením.³

Vedle výše zmíněných elementárních konstrukcí lze z pohledu vysoké školy za elementární považovat i další úlohy, například konstrukce trojúhelníků dle vět *sss*, *sus*, *usu* a *Ssu*, konstrukce některých pravidelných mnohoúhelníků či dělení úsečky v daném racionálním poměru. V následujícím textu tyto konstrukce připomeneme.

Elementární konstrukce trojúhelníků

Za elementární konstrukce trojúhelníků považujeme následující čtyři úlohy:

- (1) Sestrojte trojúhelník zadaný délkami svých stran. (*sss*)
- (2) Sestrojte trojúhelník zadaný délkami dvou stran a velikostí úhlu, který tyto strany svírají. (*sus*)
- (3) Sestrojte trojúhelník zadaný délkou jedné strany a velikostmi úhlů, které k této straně přiléhají. (*usu*)

¹Tyto tři konstrukce vychází z Eukleidových postulátů (viz str. 212); dále se na ně odvoláváme jako na „eukleidovské kroky“.

²V duchu eukleidovských konstrukcí by bylo korektnější pracovat pouze s násobky či poměry daných délek, což by úlohy značně komplikovalo.

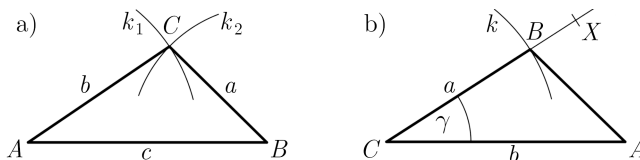
³Předpokládáme, že tyto konstrukce jsou čtenářům známé, popřípadě odkazujeme například na (Herman a kol., 2003).

- (4) Sestrojte trojúhelník zadaný délkami dvou stran a velikostí úhlu, který je protilehlý k delší straně. (*Ssu*)

Trojčlenné zkratky na koncích zadání záměrně připomínají věty o shodnosti trojúhelníků (zde formulované jako ZT 10 až 13, str. 29), již v podkapitole 2.2 jsme zmínili, že tyto věty souvisí s jednoznačným zadáním trojúhelníku.

V úloze (1) uvažujme trojúhelník ABC zadaný délkami a, b, c svých stran. Aby bylo zadání korektní, musí délky a, b, c splňovat trojúhelníkovou nerovnost (ZT 9, str. 25). Začneme libovolnou stranou, například stranou AB o délce c , vrchol C poté sestrojíme (obr. 8.1a) jako průsečík kružnic $k_1(A, b)$, $k_2(B, a)$. Úloha má jediné řešení.⁴

V úloze (2) uvažujme trojúhelník ABC zadaný délkami a, b stran BC, AC a velikostí γ úhlu ACB . Aby bylo zadání korektní, musí být $\gamma < 180^\circ$ (viz věta 2.2, str. 27). Začneme libovolnou z daných stran, například stranou AC . Vrchol B poté sestrojíme (obr. 8.1b) jako průsečík kružnice $k(C, a)$ s polopřímkou CX , která je ramenem úhlu ACX o velikosti γ (bod X je libovolný takový, že $|\sphericalangle BCX| = \gamma$). Úloha má jediné řešení.



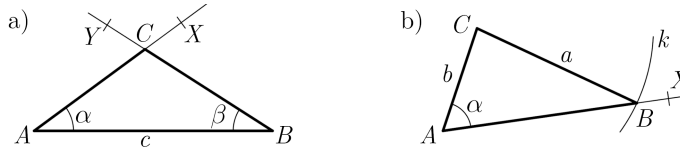
Obrázek 8.1: Konstrukce trojúhelníku sss a sus

V úloze (3) uvažujme trojúhelník ABC zadaný délkou c strany AB a velikostmi α, β úhlů BAC a ABC . Aby bylo zadání korektní, musí být $\alpha + \beta < 180^\circ$ (viz věta 2.2, str. 27). Začneme stranou AB . Vrchol C poté sestrojíme (obr. 8.2a) jako průsečík polopřímky AX s polopřímkou BY , kde $|\sphericalangle BAX| = \alpha$, $|\sphericalangle ABY| = \beta$ a body X, Y leží v téže polorovině s hraniční přímkou AB). Úloha má jediné řešení.

V úloze (4) uvažujme trojúhelník ABC zadaný délkami a, b stran BC, AC , kde $a > b$, a velikostí úhlu α . Aby bylo zadání korektní, musí být $\alpha < 180^\circ$ (viz věta 2.2, str. 27). Začneme kratší z daných stran, tedy stranou AC . Vrchol B

⁴Počet řešení konstrukční úlohy viz str. 142.

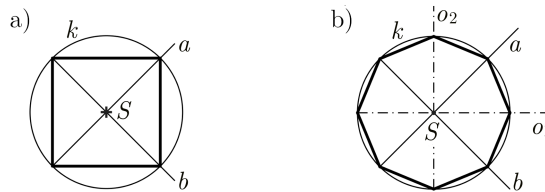
poté sestrojíme (obr. 8.2b) jako průsečík kružnice $k(C, a)$ s polopřímkou AX , která je ramenem úhlu CAX o velikosti α . Úloha má jediné řešení.



Obrázek 8.2: Konstrukce trojúhelníku *usu* a *Ssu*

Konstrukce pravidelných mnohoúhelníků

Pro jaká n je eukleidovsky sestrojitelný pravidelný n -úhelník formuluje věta 5.4 (str. 85). Pro $n \leq 10$ se jedná o pravidelný trojúhelník, čtyřúhelník, pětiúhelník, šestiúhelník, osmiúhelník a desetiúhelník. Z věty 5.3 (str. 84) víme, že pravidelnému n -úhelníku lze opsat kružnici. Uvedené mnohoúhelníky zde bůno⁵ sestrojíme tak, že je vepíšeme do dané kružnice.



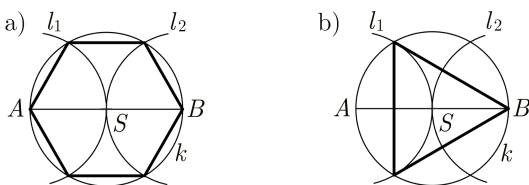
Obrázek 8.3: Pravidelný čtyřúhelník a osmiúhelník vepsaný do kružnice

Při konstrukci *pravidelného čtyřúhelníku* (tj. čtverce) a *osmiúhelníku* vepsaného do dané kružnice $k(S, r)$ si stačí uvědomit, že úhlopříčky obrazce dělí plný úhel s vrcholem S na čtyři, resp. osm shodných úhlů – pro čtverec mají tyto úhly velikost 90° , pro pravidelný osmiúhelník 45° . Vrcholy čtverce tedy získáme jako průsečíky kružnice k se dvěma libovolnými, navzájem kolnými přímkami a, b procházejícími středem S (obr. 8.3a). Čtyři z vrcholů pravidelného osmiúhelníku jsou totožné s vrcholy čtverce, zbývající čtyři vrcholy jsou průsečíky kružnice k s osami o_1, o_2 různoběžek a, b (obr. 8.3b).

⁵Je samozřejmě možné je přímo konstruovat také na základě zadané délky jejich strany, což je však v některých případech (například pro pravidelný pětiúhelník) komplikovanější. Vždy je však možné sestrojený obrazec zvětšit či zmenšit v daném poměru, náš postup je tedy univerzální.

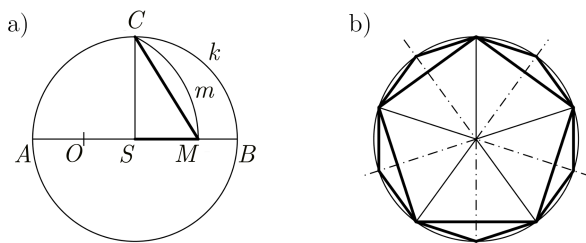
Úhlopříčky *pravidelného šestiúhelníku* dělí tento obrazec na šest navzájem shodných trojúhelníků a plný úhel při středu S kružnice opsané $k(S, r)$ na úhly o velikosti 60° . Tyto trojúhelníky jsou rovnoramenné, úhly při základně musí tedy být navzájem shodné (viz věta 2.5, str. 32) a velikost každého z nich je dle věty 2.2 (str. 27) rovna $\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$. Trojúhelníky jsou tedy rovnostranné, z čehož plyne, že dva z vrcholů šestiúhelníku jsou krajními body libovolného průměru AB kružnice k (obr. 8.4a) a zbývající body nalezneme jako průsečíky kružnice k s kružnicemi $l_1(A, r)$, $l_2(B, r)$.

Pravidelný (tedy rovnostranný) *trojúhelník* vepsaný do dané kružnice k získáme například tak, že sestrojíme vrcholy pravidelného šestiúhelníku vepsaného téže kružnici a spojíme je vždy „ob jeden“ (obr. 8.4b).



Obrázek 8.4: Pravidelný šestiúhelník a trojúhelník vepsaný do kružnice

Ke konstrukci *pravidelného pětiúhelníku* a *desetiúhelníku* zde uvedeme pouze návod, jeho správnost ukážeme až v podkapitole 8.4 (str. 138).



Obrázek 8.5: Pravidelný pětiúhelník a desetiúhelník vepsaný do kružnice

Mějme kružnici $k(S, r)$. Sestrojme její průměr AB , poloměr SC kolmý k \overline{AB} a střed O úsečky AS (obr. 8.5a). Dále sestrojme bod M jako průsečík úsečky AB s kružnicí $m(O, |OC|)$. Potom $|MC|$ je rovna délce strany pravidelného pě-

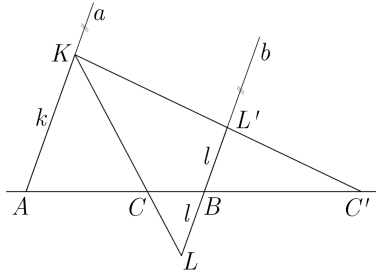
tiúhelníku a $|MS|$ je rovna délce strany pravidelného desetiúhelníku vepsaného do kružnice k . Stačí tedy od libovolného bodu kružnice k patřičnou vzdálenost opakovaně na kružnici k nanést, čímž získáme vrcholy požadovaného mnohoúhelníku. Pravidelný desetiúhelník můžeme samozřejmě také sestrojít pomocí os úhlů, na něž je plný úhel u středu S rozdělen rameny rovnoramenných trojúhelníků, jejichž základny jsou strany pravidelného pětiúhelníku (obr. 8.5b).

Chceme-li sestrojít n -úhelník, kde n je součinem některých z čísel 3, 5, 6, 2^k ($k \in \mathbb{N}$), kombinujeme podle potřeby výše uvedené postupy.

Dělení úsečky v racionálním poměru

Mějme úsečku AB . Je-li úkolem na ní sestrojít bod C tak, že $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{k}{l}$, kde $k, l \in \mathbb{N}$, pak můžeme postupovat následovně: Body A, B vedeme navzájem rovnoběžné přímky a, b různoběžné s přímkou AB . Na přímce a nanese od bodu A délku k , koncový bod označíme K . Do poloroviny opačné k \overrightarrow{ABK} nanese na přímce b od bodu B délku l , koncový bod označíme L (obr. 8.6). Bod C je průsečíkem přímky KL s úsečkou AB . Trojúhelníky AKC, BLC jsou totiž podobné (uu , shodnost odpovídajících si úhlů plyne ze ZT 3, str. 16, a ZT 4, str. 17), proto $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AK|}{|BL|} = \frac{k}{l}$.

Pokud bychom zadání mírně modifikovali a požadovali sestrojít bod C nikoliv na úsečce, ale na přímce AB , úloha by měla dvě řešení. Druhé řešení C' je průsečíkem přímek AB a KL' , kde $L' \in b \wedge |BL'| = |BL|$, přičemž $L' \neq L$ (obr. 8.6). Využili jsme podobnosti trojúhelníků AKC' a $BL'C'$.



Obrázek 8.6: Dělení úsečky v daném poměru a rozšíření zadání na přímku

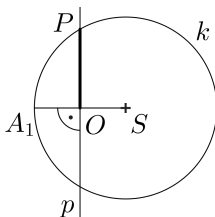
Uvedený postup lze využít i v případě, že poměr $\frac{k}{l}$ je iracionální. Musíme však být schopni sestrojít úsečky o délkách k a l (viz podkapitola 8.3).

8.2 Přibližné konstrukce neřešitelných úloh

Pro konstrukční úlohy, které nelze eukleidovsky sestrojít (např. trisekce úhlu, kvadratura kruhu, rektifikace kružnice či konstrukce některých pravidelných mnohoúhelníků) zpravidla existují různé přibližné postupy, které již eukleidovské jsou. Výsledek sice není zcela přesný, při rýsování rukou však tato malá nepřesnost nevádí a lze ji zanedbat. Ukážeme zde přibližné konstrukce pravidelného sedmiúhelníku a dvanáctiúhelníku vepsaného do dané kružnice a jeden z mnoha přibližných postupů, jak rektifikovat kružnici.⁶

Přibližná konstrukce pravidelného sedmiúhelníku⁷

Mějme kružnici $k(S, r)$. Sestrojme její libovolný poloměr A_1S a jeho střed O . Bodem O veďme kolmici p k úsečce A_1S . Jeden z průsečíků přímky p s kružnicí k označme P . Délka úsečky OP odpovídá přibližně délce strany vepsaného pravidelného sedmiúhelníku do kružnice k (obr. 8.7). Jejím opakovaným nanesením pomocí kružítka od bodu A_1 na kružnici k získáme postupně body A_2, A_3, \dots, A_8 , přičemž bod A_8 je poté velmi blízko bodu A_1 a lze připustit jeho ztotožnění s bodem A_1 .



Obrázek 8.7: Přibližná konstrukce pravidelného sedmiúhelníku

⁶Nepřesnost dále popsanych konstrukcí viz úloha 8.6 (str. 151).

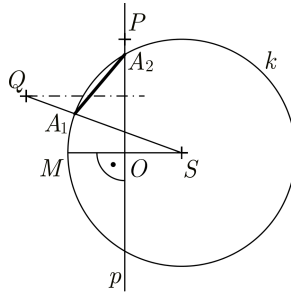
⁷Uvedená konstrukce se též nazývá *Dürerovou konstrukcí* podle jejího autora Albrechta Dürera. Albrecht Dürer (1471–1528) byl německý malíř, grafik a teoretik umění, mimo jiné také autor rozsáhlého pojednání *Underweysung der messung...* (1525) o geometrických konstrukcích a perspektivě.

Poznámka:

- V zájmu rozptřeni vznikající chyby doporučujeme postupovat od bodu A_1 v obou směrech, tedy získávat body v tomto pořadí: $A_2, A_7, A_3, A_6, A_4, A_5$. Analogický postup je vhodný i při konstrukcích jiných pravidelných mnohoúhelníků.

Přibližná konstrukce pravidelného devítiúhelníku

Mějme kružnici $k(S, r)$. Sestrojme její libovolný poloměr MS a jeho střed O . Bodem O veďme kolmici p k úsečce MS . Jeden z průsečíků přímky p s kružnicí k označme A_1 . Dále na přímce p nanesme od bodu O délku $|SM|$ (tedy poloměr kružnice k), získáme tak bod P . Ze dvou možných řešení volíme takové, aby bod A_1 ležel na úsečce OP . Sestrojme bod Q tak, aby trojúhelník OPQ byl rovnostranný a zároveň aby bod Q ležel v polorovině OPM . Průsečík úsečky SQ s kružnicí k označme A_2 . Úsečka A_1A_2 je přibližnou stranou hledaného devítiúhelníku (obr. 8.8).

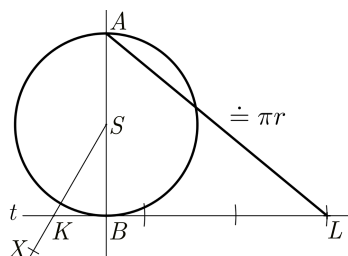


Obrázek 8.8: Přibližná konstrukce pravidelného devítiúhelníku

Kochaňského⁸ rektifikace kružnice

Mějme kružnici $k(S, r)$. Sestrojme libovolný průměr AB kružnice k a v bodě B tečnu t kružnice k . Dále označme K průsečík tečny t s přímkou SX , kde $|\sphericalangle BSX| = 30^\circ$ (obr. 8.9). Na polopřímce KB sestrojme bod L tak, že $|KL| = = 3r$. Nyní je délka úsečky AL přibližně rovna polovině délky kružnice k , tedy $|AL| \doteq \pi r$.

⁸Adam Adamandy Kochański (1631–1700) byl polský filosof, matematik a fyzik. Uvedenou konstrukci publikoval roku 1685 v časopise *Acta Eruditorum*.



Obrázek 8.9: Rektifikace kružnice

8.3 Užití algebraické metody

Úlohy prezentované v této podkapitole nalezneme v literatuře také pod názvem *konstrukce na základě výpočtu*. Jedná se v podstatě o jakékoliv konstrukční úlohy, v nichž si pomůžeme algebraickým výpočtem. Typickými příklady, které zde také formou řešených příkladů ukážeme, jsou konstrukce úseček iracionální délky nebo konstrukce obrazce o daném obsahu.

Příklad 8.1

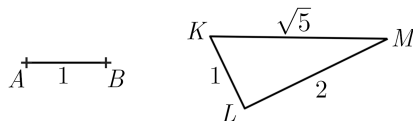
Je dána úsečka AB jako jednotka délky. Sestrojte úsečku délky $\sqrt{5}$.

Řešení:

Úlohu lze řešit užitím Pýthagorovy věty nebo některé z Eukleidových vět pro pravoúhlý trojúhelník. Ukážeme zde všechny tři postupy:

(a) Užití Pýthagorovy věty

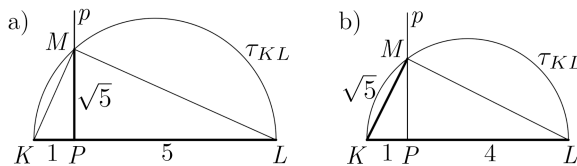
V pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami o délkách 1 a 2 má přepona délku $\sqrt{5}$, neboť $1^2 + 2^2 = (\sqrt{5})^2$ (viz věta 6.5, str. 100). Sestrojíme tedy navzájem kolmé úsečky KL , LM o délkách 1 a 2 (tj. $|AB|$ a $2|AB|$) se společným krajním bodem L (obr. 8.10). Úsečka KM má poté požadovanou délku.



Obrázek 8.10: Úsečka iracionální délky, řešení (a)

- (b) Užití Eukleidovy věty o výšce

Číslo 5 rozložíme na součin dvou „hezkých“ čísel, například $1 \cdot 5$ (stejně tak ale lze použít třeba $2 \cdot 2,5$). Sestrojíme úsečku KL délky 6 ($= 1 + 5$) a na ní bod P tak, aby $|KP| = 1$. Bodem P vedeme kolmici p k úsečce KL . Nad úsečkou KL sestrojíme Thalétovu kružnici τ_{KL} . Průsečík kružnice τ_{KL} s kolmicí p označíme M (obr. 8.11a). Úsečka MP má délku $\sqrt{5}$, neboť je to výška na přeponu v pravoúhlém trojúhelníku KLM a dělí přeponu na úseky o délkách 1 a 5, tedy podle věty 6.8 (str. 103) platí $(\sqrt{5})^2 = 1 \cdot 5$.



Obrázek 8.11: Úsečka iracionální délky, řešení (b), (c)

- (c) Užití Eukleidovy věty o odvěsně

Číslo 5 rozložíme na součin dvou hezkých čísel, například $1 \cdot 5$ (stejně tak ale lze použít třeba $2 \cdot 2,5$). Sestrojíme úsečku KL délky 5 (větší činitel součinu) a na ní bod P tak, aby $|KP| = 1$ (menší činitel součinu). Bodem P vedeme kolmici p k úsečce KL . Nad úsečkou KL sestrojíme Thalétovu kružnici τ_{KL} . Průsečík kružnice τ_{KL} s kolmicí p označíme M (obr. 8.11b). Úsečka MP má délku $\sqrt{5}$, neboť je to odvěsna nad přílehlým úsekem přepony v pravoúhlém trojúhelníku KLM , a tedy podle věty 6.9 (str. 104) platí $(\sqrt{5})^2 = 1 \cdot 5$.

Poznámky:

- ▶ Pýthagorovu větu lze aplikovat i tak, že hledaná úsečka bude odvěsnou (vhodné například pro konstrukci úsečky délky $\sqrt{3}$, neboť $1^2 + (\sqrt{3})^2 = 2^2$).
- ▶ Výše uvedené postupy konstrukce úsečky délky \sqrt{a} , kde $a \in \mathbb{N}$, pomocí Eukleidových vět lze aplikovat vždy, zatímco Pýthagorovu větu je někdy třeba použít opakovaně. Například pro úsečku délky $\sqrt{6}$ neexistuje vhodný pravoúhlý trojúhelník, můžeme však sestrojit nejprve trojúhelník se stranami o délkách 1, 1, $\sqrt{2}$ a poté trojúhelník se stranami délek $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{6}$.

Příklad 8.2

Je dán čtverec o straně délky 6 cm a úsečka AB o délce 8 cm. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB , jehož obsah je stejný jako obsah daného čtverce.

Řešení:

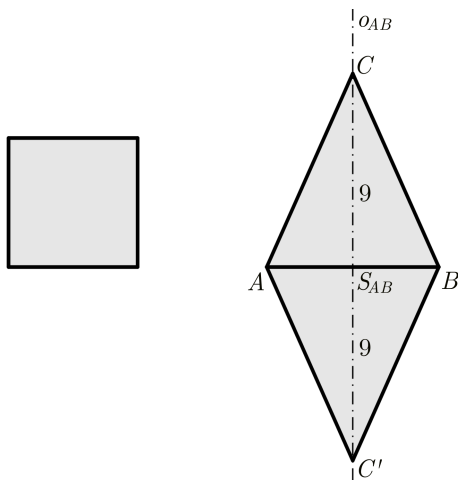
Využijeme rovnost vztahů pro obsah S_{\square} čtverce o straně x (str. 91) a obsah S_{\triangle} trojúhelníku o straně z a příslušné výšce v_z (vztah 6.1), tedy

$$x^2 = \frac{zv_z}{2}.$$

Po dosazení daných délek získáme rovnici

$$6^2 = \frac{8v_z}{2}$$

s jednou neznámou v_z , jejímž řešením je $v_z = 9$ cm. Nyní můžeme sestavit hledaný trojúhelník, o bodu C víme, že leží na ose úsečky AB ve vzdálenosti 9 cm od AB (obr. 8.12). Podotkněme, že úloha má dvě řešení (viz počet řešení polohové úlohy, str. 142).



Obrázek 8.12: Řešení příkladu 8.2

8.4 Zlatý řez

Zlatý řez byl popsán již ve starověku, v období renesance byl nazýván „božským poměrem“. Je považován za ideální poměr ve smyslu „ani moc, ani málo“. V matematice vystupuje v mnoha oblastech, kromě geometrie (jak dále uvidíme) se s ním můžeme setkat třeba v souvislosti s Fibonacciho⁹ posloupností.

Dělí-li bod C danou úsečku AB délky a na dvě úsečky o délkách x a $a - x$ ($x > a - x$) tak, že $\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$, říkáme, že úsečka AB je dělena bodem C ve *zlatém řezu*.

Poznámka:

- Jednoduše lze říci, že bod C dělí úsečku na dvě části tak, že delší část ku kratší se má stejně jako celá úsečka k její delší části.

Na základě výše uvedené definice můžeme odvodit hodnotu zlatého řezu:

$$\begin{aligned} \frac{a}{x} &= \frac{x}{a - x} \\ 0 &= x^2 + ax - a^2, \quad D = 5a^2 \\ x_{1,2} &= \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Víme, že x představuje délku úsečky, vybereme tedy pouze kladný výsledek:

$$x = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2}.$$

Hledaný poměr je roven $\frac{a}{x} = \frac{a}{\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Tento poměr se obvykle v literatuře značí řeckým písmenem φ a nazývá se *zlaté číslo*.

Chceme-li na dané úsečce AB délky a sestrojít bod C tak, aby ji dělil ve zlatém řezu, můžeme postupovat následovně (obr. 8.13). Bodem B vedeme kol-

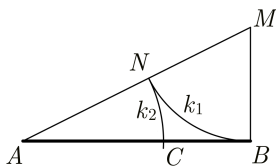
⁹Leonardo Pisánský zvaný Fibonacci (~1180–1250) byl italský matematik. Je autorem díla *Liber Abaci* (1202), v němž mimo jiné představil Evropě arabský číselný systém a popsal posloupnost dnes zvanou *Fibonacciho*.

míci k úsečce AB a nanese na ni bod M tak, aby $|BM| = \frac{|AB|}{2}$. Průsečík úsečky AM s kružnicí $k_1(M, |MB|)$ označíme N . Bod C je průsečíkem úsečky AB s kružnicí $k_2(A, |AN|)$, neboť

$$\begin{aligned} |AC| &= |AN| = |AM| - |MN| = \sqrt{|AB|^2 + |BM|^2} - |BM| = \\ &= \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2} = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}, \end{aligned}$$

a tedy

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{a}{\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$



Obrázek 8.13: Zlatý řez úsečky

Věta 8.1

V pravidelném pětiúhelníku dělí průsečík úhlopříček, které nemají společný krajní bod, každou z nich ve zlatém řezu.

Důkaz:

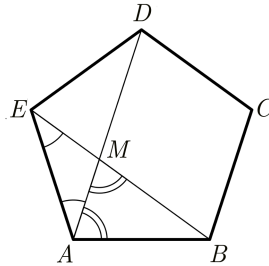
Mějme pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ a označme M průsečík úhlopříček AD , BE . Chceme dokázat, že $\frac{|BE|}{|BM|} = \frac{|BM|}{|ME|}$.

Z věty 5.2 (str. 83) plyne, že velikost každého vnitřního úhlu pravidelného pětiúhelníku je 108° . Trojúhelníky BEA a ADE jsou shodné (*sus*) a rovnoramenné (obr. 8.14). Z vět 2.2 (str. 27) a 2.5 (str. 32) plyne, že $|\sphericalangle BEA| = |\sphericalangle EAD| = 36^\circ$, a tedy také $\triangle AEM$ je rovnoramenný se základnou AE a podobný $\triangle BEA$ (*uu*). Z této podobnosti vyplývá, že

$$\frac{|BE|}{|AE|} = \frac{|AE|}{|ME|}. \quad (8.1)$$

Pro velikost úhlu BAM platí $|\sphericalangle BAM| = |\sphericalangle BAE| - |\sphericalangle EAM| = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$. Dále dle věty 2.3 (str. 28) aplikované na $\triangle AEM$ je $|\sphericalangle AMB| = 72^\circ$. Trojúhelník AMB je tedy také rovnoramenný a $|AE| = |AB| = |BM|$. Dosazením $|BM|$ za $|AE|$ do vztahu (8.1) získáváme

$$\frac{|BE|}{|BM|} = \frac{|BM|}{|ME|}. \quad \boxtimes$$



Obrázek 8.14: K důkazu věty 8.1

Věta 8.2

Poměr délky úhlopříčky a délky strany pravidelného pětiúhelníku je roven zlatému číslu.

Důkaz:

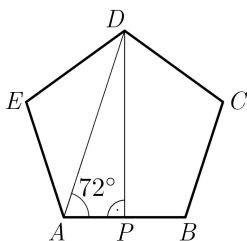
Věta je přímým důsledkem věty 8.1. \boxtimes

Nyní můžeme ukázat, že konstrukce pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku popsaná na str. 129 je teoreticky správná a že případná nepřesnost je způsobena jen nepřesností rýsování.

Nejprve odvodíme hodnotu $\cos 72^\circ$. V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ s jednotkovou délkou strany uvažujeme trojúhelník APD , kde P je střed strany AB (obr. 8.15). Trojúhelník APD je tedy pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu P . Z důkazu věty 8.1 víme, že $|\sphericalangle PAD| = 72^\circ$. Platí

$$\cos 72^\circ = \frac{|AP|}{|AD|} = \frac{\frac{|AB|}{2}}{|AD|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{|AD|}{|AB|}},$$

příčemž dle věty 8.2 je $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, tedy po úpravě je $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

Obrázek 8.15: Odvození hodnoty $\cos 72^\circ$

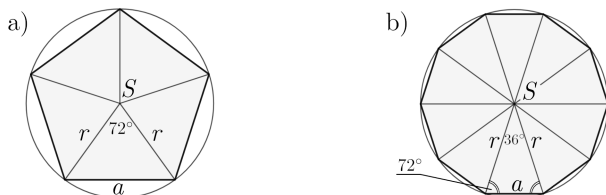
Pravidelný pětiúhelník o straně délky a vepsaný do kružnice $k(S, r)$ lze rozdělit na pět navzájem shodných rovnoramenných trojúhelníků (obr. 8.16a), jejichž vnitřní úhel při hlavním vrcholu S má velikost 72° . Podle kosinové věty¹⁰ pro délku a platí

$$a^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos 72^\circ = \frac{r^2}{2} (5 - \sqrt{5}).$$

V konstrukci na str. 129 (obr. 8.5a) jsme za délku strany pravidelného pětiúhelníku označili délku úsečky CM . Chceme ověřit, že $|CM| = a$. Z popsané konstrukce a věty 6.5 (str. 100) plyne, že

$$\begin{aligned} |CM|^2 &= |CS|^2 + |SM|^2 = |CS|^2 + (|OM| - |OS|)^2 = |CS|^2 + (|OC| - |OS|)^2 = \\ &= |CS|^2 + \left(\sqrt{|OS|^2 + |SC|^2} - |OS| \right)^2 = r^2 + \left(\sqrt{\left(\frac{r}{2} \right)^2 + r^2} - \frac{r}{2} \right)^2 = \frac{r^2}{2} (5 - \sqrt{5}), \end{aligned}$$

a tedy $a = |CM|$.



Obrázek 8.16: Konstrukce pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku

¹⁰Jedna ze základních vět trigonometrie, viz např. (Halas, 2016).

Obdobně *pravidelný desetiúhelník* o straně délky a vepsaný do kružnice $k(S, r)$ lze rozdělit na deset navzájem shodných rovnoramenných trojúhelníků, jejichž vnitřní úhel při hlavním vrcholu S má velikost 36° a úhly při základně jsou shodně velké 72° (obr. 8.16b). Rozdělíme-li jeden z těchto trojúhelníků výškou k základně na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky, pak v každém z nich platí

$$\cos 72^\circ = \frac{a}{2r}.$$

Zároveň však víme, že $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, odtud

$$a = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1).$$

V konstrukci na str. 129 (obr. 8.5a) jsme za délku strany pravidelného desetiúhelníku označili délku úsečky SM . Chceme ověřit, že $|SM| = a$. Z popsané konstrukce a věty 6.5 (str. 100) plyne, že

$$\begin{aligned} |SM| &= |OM| - |OS| = |OC| - |OS| = \sqrt{|OS|^2 + |SC|^2} - |OS| = \\ &= \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1), \end{aligned}$$

a tedy $a = |SM|$.

8.5 Klasifikace konstrukcí geometrických obrazců

V této a dalších dvou podkapitolách se budeme zabývat složitějšími konstrukcemi geometrických obrazců, především trojúhelníků. Tyto konstrukce lze podle typu zadání rozdělit do dvou disjunktních skupin dle dvou různých hledisek.

Dle „volnosti zadání“ rozlišujeme konstrukční úlohy *bez parametru* a *s parametrem/y*. Úlohy bez parametru jsou zadány konkrétními údaji (délkami stran, velikostmi úhlů apod.) potřebnými k tomu, aby požadovaný obrazec mohl být sestrojen. V úlohách s parametrem/y je alespoň jeden údaj zadán obecně, úkolem pak není obrazec sestrojít, ale rozhodnout o počtu řešení pro každou (přípustnou) hodnotu parametru/ů. To, zda je úloha zadána bez parametru, nebo s parametrem/y má vliv zejména na jednotlivé dílčí kroky, které jsou součástí řešení (viz dále podkapitoly 8.6 a 8.7).

Dle „vstupních předpokladů“ dělíme konstrukční úlohy na *polohové* a *nepolohové*. Zadání nepolohové konstrukční úlohy obsahuje pouze vlastnosti hledaného obrazce, jeho umístění volíme libovolně. Oproti tomu součástí zadání polohové konstrukční úlohy je, kromě vlastností (rozměrů apod.) hledaného objektu, také umístění některých částí objektu. To, zda je úloha polohová, nebo nepolohová, má vliv na postup jejího řešení a zpravidla také na počet řešení.

Pro snazší pochopení uveďme příklady zadání jednotlivých typů konstrukčních úloh:

(a) *nepolohová úloha bez parametru*

Sestrojte trojúhelník ABC , jestliže $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 4$ cm, $|AC| = 5$ cm.

(b) *polohová úloha bez parametru*

Je dána úsečka AB o délce 6 cm. Sestrojte trojúhelník ABC takový, aby $|BC| = 4$ cm, $|AC| = 5$ cm.

(c) *nepolohová úloha s parametrem*

V trojúhelníku ABC je strana AB dlouhá 6 cm a strana AC má délku 5 cm. Diskutujte počet řešení konstrukce trojúhelníku ABC v závislosti na délce strany BC .

(d) *polohová úloha s parametrem*

Je dána úsečka AB délky 6 cm. Diskutujte počet řešení konstrukce trojúhelníku ABC v závislosti na délce strany BC , je-li $|AC| = 5$ cm.

Poznámky:

- ▶ V polohové úloze by zadání mělo být v takové podobě, že daný objekt (v příkladech výše úsečka AB) již bude sestaven a naším úkolem bude do-rýsovat chybějící útvary (v příkladech výše bod C , resp. trojúhelník ABC). V praxi se však, patrně kvůli úspoře místa, úlohy zadávají pouze textem. Řešitel úlohy je pak povinen jako první krok konstrukce sestavit právě daný objekt. Tím vlastně nasimuluje správné zadání a může teprve začít úlohu řešit.
- ▶ Uvedené příklady polohových a nepolohových úloh – tedy příklady (a), (b), resp. (c), (d) – se zdánlivě neliší a výsledkem jsou stejné trojúhelníky. Jak si ale ukážeme dále, rozdíl spočívá v možných postupech a v počtu řešení.

Počet řešení konstrukční úlohy

Při řešení nepolohové konstrukční úlohy můžeme začít libovolným zadaným údajem a umístit jej kdekoliv na papír. Poté na základě množin bodů daných vlastností hledáme zbývající vrcholy daného obrazce. Vyjde-li nám více geometrických obrazců vyhovujících danému zadání, jako řešení započítáme jen ty, které nejsou navzájem shodné.

V zadání polohové úlohy je však, jak již bylo uvedeno výše, dáno umístění nějaké části hledaného geometrického obrazce. Počet řešení se pak neodvívá od počtu navzájem neshodných obrazců splňujících dané požadavky, ale od počtu různých umístění obrazce vzhledem k jeho dané části. Shodné obrazce lišící se umístěním tedy počítáme jako různá řešení.

V dalších dvou podkapitolách jsou uvedeny řešené příklady ilustrující určení počtu řešení polohové i nepolohové konstrukční úlohy.

Poznámky:

- ▶ Lze vyzorovat, že počet řešení polohové úlohy je \geq počet řešení analogické nepolohové úlohy.
- ▶ To, zda zadáme úlohu polohově nebo nepolohově, ovlivní nejen počet jejích řešení, ale i její obtížnost. Polohové zadání je do určité míry nápovědou, protože víme jistě, jaký je první krok konstrukce. Na druhou stranu lze úlohu vytvořit záměrně tak, že při volbě jiného prvního kroku by byl postup daleko snazší.

8.6 Geometrické obrazce zadané bez parametru

Kompletní řešení konstrukční úlohy bez parametru sestává ze čtyř částí: rozboru, konstrukce, zkoušky a závěru.

(a) Rozbor

Účelem rozboru je rozmyslet, jak úlohu vyřešit. Klademe si otázky typu: „Čím můžeme začít?“, „Jaké vlastnosti mají body, které potřebujeme nalézt?“, „Na jakých množinách tyto body leží?“ Kromě otázek *jak*, je třeba zároveň klást i otázky *proč*, aneb hledat zdůvodnění zamýšleného postupu, utvrdit se v tom, že je správný.

Rozbor obsahuje standardně náčrt, u složitějších úloh také zápis klíčových myšlenek, tedy uvedení, čím začneme a jak nalezneme chybějící body

(vrcholy) hledaného objektu. V náčrtu je vhodné vyznačit barevně zadané údaje a načrtnout i pomocné kružnice, přímky apod., které chceme využít.

(b) *Konstrukce a její zápis*

Konstrukce a zápis konstrukce jsou dvě neodlučitelné součásti; není podstatné, zda jednu z nich provedeme dříve či zda obě vznikají paralelně. Obvykle je obtížnější sepsat jako první zápis konstrukce bez samotné konstrukce, tedy jen na základě geometrické představivosti.

Konstrukce musí obsahovat (zobrazovat) všechna různá řešení úlohy.

Zápis provádíme zpravidla pomocí matematické symboliky (ale pokud si nejsme jistí vhodným symbolem, můžeme využít i slovní popis). Zápisem rozumíme jednoznačně popsany návod, algoritmus, kde se jednotlivé kroky nesmí předbíhat. V každém kroku zapíšeme nejprve název objektu, který tímto krokem chceme popsat, a následně instrukci, jak tento objekt získáme (viz řešené příklady dále).

Pokud má úloha různá řešení, můžeme je rozepsat i v zápisu, avšak za jednodušší považujeme přístup, kdy v zápisu různá řešení nerozepisujeme, ale uvedeme je až v závěru (viz příklady dále).

Správně sepsaný zápis konstrukce poznáme tak, že podle něj sestrojíme požadovaný obrazec, aniž bychom znali zadání či rozbor úlohy.

(c) *Zkouška a závěr*

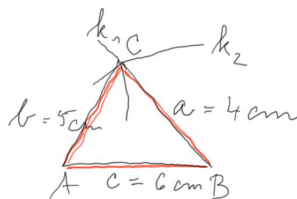
V rámci zkoušky bychom měli zkontrolovat, zda a které sestrojené obrazce splňují požadované vlastnosti a poté učinit závěr, tj. uvést, kolik má úloha řešení a které z obrazců jsou těmito řešeními, neboť je možné, že v provedené konstrukci je sestrojených útvarů více (viz příklady dále).

Příklad 8.3

Sestrojte trojúhelník ABC , jestliže $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm.

Řešení:

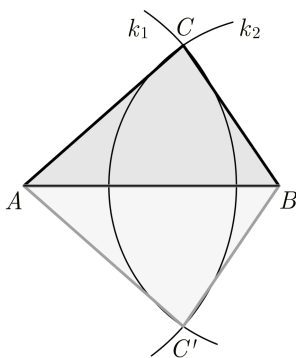
Rozbor: Začneme (například¹¹) stranou c , tedy úsečkou AB . Zbývá sestrojít bod C , který je od bodu A vzdálen 5 cm a od bodu B 4 cm. Bod C tedy nalezneme jako průsečík $k_1(A; 5$ cm) a $k_2(B; 4$ cm).



¹¹Úloha je nepolohová, můžeme si vybrat, kterou stranou začneme.

Konstrukce (obr. 8.17) a zápis:

- (1) \overline{AB} ; $|AB| = 6 \text{ cm}$
- (2) k_1 ; $k_1(A; 5 \text{ cm})$
- (3) k_2 ; $k_2(B; 4 \text{ cm})$
- (4) C ; $C \in k_1 \cap k_2$
- (5) $\triangle ABC$



Obrázek 8.17: Konstrukce k příkladu 8.3

Závěr: Úloha má jedno řešení: $\triangle ABC$.

Poznámky:

- V zápisu lze prohodit kroky (2) a (3), neboť jsou na sobě nezávislé. Nelze však zaměnit například pořadí kroků (3) a (4), neboť abychom mohli vysvětlit konstrukci bodu C , musíme mít sestrojenou kružnici k_2 .
- Posledním krokem (5) říkáme „spoj body ABC “, aby byl zvýrazněn výsledný trojúhelník.¹² Také tímto závěrečným bodem dáváme najevo, že jsme našli všechny vrcholy hledaného útvaru a zápis je tedy ukončen.
- V obrázku s konstrukcí (obr. 8.17) je úmyslně zakreslen i bod C' jako druhý průsečík kružnic k_1 , k_2 . Za výsledek lze považovat jak trojúhelník ABC , tak ABC' , oba splňují požadované vlastnosti. Nelze však říci, že úloha má dvě řešení, neboť $\triangle ABC \simeq \triangle ABC'$.

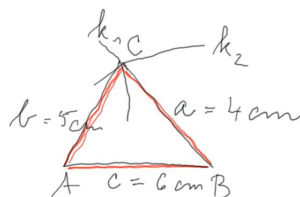
¹²Poznamenejme, že trojúhelníkem je ve skutečnosti plocha ohraničená uzavřenou lomenou čarou $ABCA$ (včetně této čáry), avšak v praxi tuto plochu běžně nijak nezvýrazňujeme.

Příklad 8.4

Je dána úsečka AB délky 6 cm. Sestrojte trojúhelník ABC , jestliže $a = 4$ cm, $b = 5$ cm.

Řešení:

Rozbor: Jedná se o polohovou úlohu, musíme začít úsečkou AB . Zbývá sestrojít bod C , který je od bodu A vzdálen 5 cm a od bodu B 4 cm. Bod C tedy nalezneme jako průsečík $k_1(A; 5 \text{ cm})$ a $k_2(B; 4 \text{ cm})$.



Konstrukce a zápis budou v tomto případě totožné s konstrukcí (obr. 8.17) a zápisem příkladu 8.3 (str. 143).

Závěr: Úloha má dvě řešení: $\triangle ABC$, $\triangle ABC'$.

Poznámky:

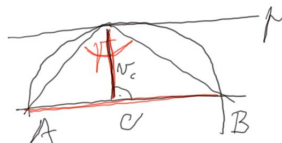
- ▶ Příklad 8.4 je polohovou variantou příkladu 8.3 (str. 143). Zatímco v příkladu 8.3 jsme si mohli vybrat, kterou stranou začneme, zde byl začátek postupu jasně daný zadáním.
- ▶ Trojúhelníky ABC , ABC' jsou sice shodné, avšak liší se svým umístěním vůči dané úsečce AB . Za výsledek tedy považujeme oba a úloha má, na rozdíl od příkladu 8.3 (str. 143), dvě řešení.

Příklad 8.5

Sestrojte trojúhelník ABC , je-li $c = 6$ cm, $v_c = 1,5$ cm, $\gamma = 120^\circ$.

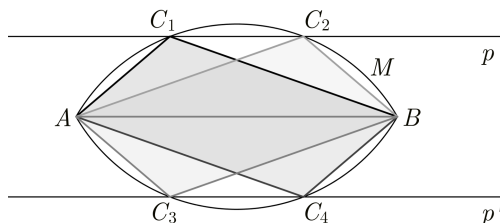
Řešení:

Rozbor: Začneme stranou AB . Bod C najdeme na rovnoběžce se stranou AB vzdálené 1,5 cm od AB a zároveň leží na kruhovém oblouku, který je množinou bodů, z nichž je AB vidět pod úhlem o velikosti 120° .



Konstrukce (obr. 8.18)¹³ a zápis:

- (1) \overline{AB} ; $|AB| = 6 \text{ cm}$
- (2) M ; $M = \{X \in E_2; |\sphericalangle AXB| = 120^\circ\}$
- (3) p ; $p \parallel \overline{AB} \wedge |p, \longleftrightarrow AB| = 1,5 \text{ cm}$
- (4) C ; $C \in M \cap p$
- (5) $\triangle ABC$



Obrázek 8.18: Konstrukce k příkladu 8.5

Závěr: Úloha má 2 řešení: $\triangle ABC_1$, $\triangle ABC_2$.

Poznámky:

- Bod (2) zápisu konstrukce příkladu 8.5 není elementární konstrukcí a je na dohodě, zda jej můžeme zapsat takto jedním krokem, nebo zda trváme na rozepsání do více kroků.
- Bod (3) zápisu konstrukce příkladu 8.5 lze zapsat též pomocí množiny: P ; $P = \{X \in E_2; |X, \longleftrightarrow AB| = 1,5 \text{ cm}\}$. Množina P je potom sjednocením přímek p , p' .
- Dvojice trojúhelníků ABC_1 , ABC_4 a ABC_2 , ABC_3 (obr. 8.18) jsou shodné a úloha z příkladu 8.5 není polohová, proto do výsledku počítáme vždy jen jeden z nich. Dvojice trojúhelníků ABC_1 , ABC_2 , resp. ABC_3 , ABC_4 , však shodné nejsou, neboť u shodnosti obrazců záleží na jejich pojmenování, tedy musí mít shodné odpovídající si strany, úhly atd. Například úhel α_1 v trojúhelníku ABC_1 je evidentně větší než „odpovídající“ úhel α_2 v trojúhelníku ABC_2 , nelze tedy zapsat, že $\triangle ABC_1 \simeq \triangle ABC_2$. O těchto

¹³V některých konstrukcích jsou zde v zájmu přehlednosti skryty pomocné body a čáry, při rýsování však standardně veškeré objekty v obrázku necháváme, aby bylo možné sledovat správnost postupu.

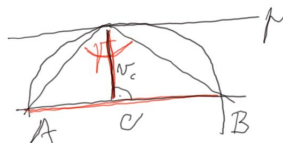
trojúhelníků bychom mohli říci, že jsou shodné, pouze pokud by nezáleželo na jejich pojmenování.¹⁴

Příklad 8.6

Je dána úsečka AB délky 6 cm. Sestrojte trojúhelník ABC , jestliže $v_c = 1,5$ cm, $\gamma = 120^\circ$.

Řešení:

Rozbor: Jedná se o polohovou úlohu, musíme začít stranou AB . Bod C najdeme na rovnoběžce se stranou AB vzdálené 1,5 cm od přímky AB a zároveň C leží na kruhovém oblouku, který je množinou bodů, z nichž je \overline{AB} vidět pod úhlem o velikosti 120° .



Konstrukce a zápis budou v tomto případě stejné jako konstrukce (obr. 8.18) a zápis v řešení příkladu 8.5 (str. 145).

Závěr: Úloha má 4 řešení: $\triangle ABC_1$, $\triangle ABC_2$, $\triangle ABC_3$, $\triangle ABC_4$.

Poznámky:

- ▶ Řešením příkladu 8.6 jsou všechny čtyři sestavené trojúhelníky, neboť se liší svým umístěním vůči *dané* úsečce AB a úloha je polohová.
- ▶ V příkladu 8.5 (str. 145) jsme si mohli vybrat, kterým z daných objektů začneme. Bylo také možné začít výškou trojúhelníku nebo úhlem o velikosti γ . Začít stranou AB je však v této úloze nejsnazší. V příkladu 8.6 jsme stranou AB začít museli. Pokud bychom zadání příkladu 8.6 upravili tak, aby byla dána výška nebo úhel, postup by se zkomplikoval.

¹⁴Shodnost, resp. neshodnost, sestavených obrazců je třeba rozlišit s ohledem na to, zda je útvar zadán včetně svého názvu, či jen obecně. Uveďme protipříklad k příkladu 8.5: „Sestrojte trojúhelník, jehož jedna strana má délku 6 cm, výška k této straně má délku 1,5 cm a daná strana je z protilehlého vrcholu vidět pod úhlem o velikosti 120° .“ Pro snadný zápis rozboru a zápisu konstrukce můžeme zadaný trojúhelník pojmenovat. Potom se úloha zdánlivě nebude lišit od úlohy v příkladu 8.5, avšak řešení bude mít jen jedno, neboť, nejsme-li ze zadání fixováni na názvy jednotlivých vrcholů, můžeme říci, že všechny čtyři sestavené trojúhelníky v obrázku konstrukce příkladu 8.5 jsou shodné (tj. lze je na sebe přemístit tak, že se kryjí); srovnej s (Kuřina, 2000). S takto obecně zadanými úlohami se ve školské matematice běžně nesetkáme. Mohou mít však svůj význam v praxi.

Pro porovnání ještě uvedeme alternativní zápis a závěr příkladu 8.6 obsahující výpis jednotlivých řešení:¹⁵

Zápis konstrukce:

- (1) \overline{AB} ; $|AB| = 6 \text{ cm}$
- (2) M ; $M = \{X \in E_2; |\sphericalangle AXB| = 120^\circ\}$
- (3) p ; $p \parallel \overline{AB} \wedge |p, \longleftrightarrow AB| = 1,5 \text{ cm}$
- (4) p' ; $p' \parallel \overline{AB} \wedge |p', \longleftrightarrow AB| = 1,5 \text{ cm} \wedge p \neq p'$
- (5) C_1, C_2 ; $\{C_1, C_2\} = M \cap p$
- (6) C_3, C_4 ; $\{C_3, C_4\} = M \cap p'$
- (7) $\triangle ABC_1, \triangle ABC_2, \triangle ABC_3, \triangle ABC_4$

Závěr: Úloha má 4 řešení.

Poznámky:

- V některých učebnicích pro základní školy je zavedena konvence směru popisu vrcholů obrazce podle abecedy proti smyslu otáčení hodinových ručiček. Tuto konvenci považujeme za nevhodnou. Pokud bychom na ní trvali, nemůžeme například popsat odpovídajícími písmeny vrcholy obrazce získaného v osově souměrnosti¹⁶ (obr. 8.19). Dále bychom se mohli dostat do sporu při určení počtu řešení konstrukčních úloh, při popisu stěn těles v prostoru, při konstrukcích v deskriptivní geometrii aj.
- Za další nešvar pokládáme uvádění počtu řešení pouze v „polorovině“.¹⁷ U nepolohových úloh typu příklad 8.3 (str. 143) je tato poznámka zcela nadbytečná, neboť takové úlohy skutečně mají pouze jedno řešení (v celé rovině, nikoliv jen v polorovině). Dodatek „v polorovině“ může nesprávně nabádat k tomu, že v polorovině je sice jedno řešení, ale v rovině dvě, což by popíralo princip vět o jednoznačnosti zadání trojúhelníku (*sss, sus,*

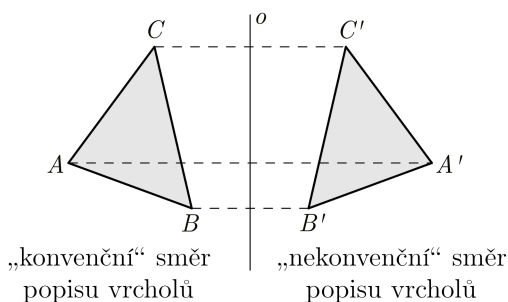
¹⁵Tento způsob zápisu zde uvádíme, neboť je prezentován v některých středoškolských učebnicích a nelze říci, že je špatně. Považujeme jej však za zbytečně komplikovaný a nevýhodný; již v zápisu je třeba si uvědomit, ve které situaci vzniká kolik přímk, průsečíků atd., a v posledním kroku vypisujeme jednotlivá řešení, tedy závěr pak ztrácí svůj význam. Navíc je tento způsob zápisu těžko proveditelný, pokud bychom chtěli nejprve (nebo pouze) zapsat zápis konstrukce a až následně konstrukci provést.

¹⁶Osová souměrnost viz podkapitola 9.2.

¹⁷Uvozovky proto, že většinou z této formulace navíc není ani jasné, kterou polorovinu máme na mysli.

usu, Ssu). Navíc fixace na „polorovinu“ může vést k tomu, že opomeneme řešení, které leží v „opačné polorovině“ a přitom není shodné s řešením již nalezeným.

- Zadání polohových úloh by bylo vhodnější formulovat tak, aby bylo zřejmé, že hledáme všechna umístění útvaru (např. zadání příkladu 8.6 by mohlo znít: „Je dána úsečka AB . Sestrojte všechny body C tak, aby trojúhelník ABC měl výšku v_c dlouhou 1,5 cm a úhel γ o velikosti 120° .“). Taková zadání se v učebnicích občas vyskytují, nicméně i formulace uvedené výše jsou korektní.¹⁸



Obrázek 8.19: Problém konvence popisu vrcholů obrazce

8.7 Geometrické obrazce zadané s parametrem/y

Kompletní řešení konstrukční úlohy s parametrem/y sestává ze tří částí: rozboru, diskuse a závěru.

1) Rozbor

Rozbor úlohy s parametrem se neliší od rozboru úlohy bez parametru (viz str. 142). Předpokládáme, že úloha má řešení, a v rámci rozboru rozmyslíme, jak a proč toto řešení nalezneme.

2) Diskuse

Okomentujeme podmínky, které ovlivní počet řešení. Zpravidla si lze uvědomit počty možných řešení již při rozboru, občas je třeba provést určitý výpočet. Pokud si nejsme jistí, můžeme zkusit s nějakými konkrétními hodnotami parametru/ů provést konstrukci a tak ověřit naše hypotézy.

¹⁸V matematice (i v geometrii) automaticky hledáme všechna řešení dané úlohy, nespokojíme se jen s jedním, pokud jich má úloha více.

3) *Závěr*

Pro všechny možné hodnoty parametru uvedeme, kolik má úloha řešení.

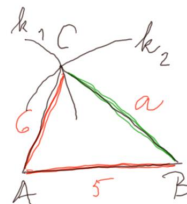
Řešení úlohy s parametrem opět předvedeme na vzorovém příkladu.

Příklad 8.7

V trojúhelníku ABC je strana AB dlouhá 5 cm a strana AC má délku 6 cm. Diskutujte počet řešení konstrukce trojúhelníku ABC v závislosti na délce strany BC .

Řešení:

Rozbor: Jedná se o nepolohovou úlohu odpovídající konstrukci trojúhelníku typu *sss*. Začneme například stranou AB , bod C poté nalezneme jako průsečík kružnic $k_1(A; 6 \text{ cm})$, $k_2(B; a)$. Shodné útvary počítáme jako jedno řešení.



Diskuse: Kružnice k_1 , k_2 se mohou protínat, dotýkat, nebo nemají žádný společný bod. Bod C jako vrchol trojúhelníku získáme pouze v prvním případě, který nastane, pokud je splněna trojúhelníková nerovnost (ZT 9, str. 25, resp. věta 2.1, str. 25), tedy $a + 5 > 6 \wedge a + 5 + 6 > a$, neboli $a \in (1; 11)$.

Závěr: Pro $a \in (1; 11)$ má úloha 1 řešení, pro $a \in (0; 1] \cup [11; \infty)$ úloha nemá řešení, jednotky uvádíme v cm.¹⁹

Poznámky:

- Zadání příkladu 8.7 můžeme přeformulovat jako polohovou úlohu (např. „Je dána úsečka AB délky 5 cm. Diskutujte počet řešení trojúhelníku ABC , jestliže...“). Potom pro $a \in (1; 11)$ má úloha 2 řešení, zatímco pro $a \in (0; 1] \cup [11; \infty)$, stejně jako její nepolohová varianta, řešení nemá.

Závěrem kapitoly podotkněme, že význam konstrukčních úloh spatřujeme, kromě rozvoje jemné motoriky při manipulaci s rýsovacími pomůckami a rozvoje geometrické představivosti jako takové, v učení se algoritimizaci a analýze a syntéze (tj. rozložení úkolu na posloupnost dílčích podúkolů a jejich následné provedení

¹⁹Záporné a nulové hodnoty parametru můžeme v geometrii zanedbat, nepředpokládáme, že bychom pracovali s nulovými/zápornými délkami, velikostmi úhlů apod.

ve správném pořadí, abychom se dostali k cíli) problému. Algoritmizaci trénujeme zejména při zápisu konstrukce, zatímco analýzu a syntézu problému při rozboru konstrukční úlohy. Obě tyto části (které bývají často mylně pokládány za jedno a totéž a zaměňovány) mají tedy svou nezastupitelnou roli.

8.8 Úlohy

- 8.1** Jsou dány ostré úhly o velikostech α a β , přičemž $\alpha > \beta$. Graficky sestrojte úhel o velikosti a) $\alpha + \beta$, b) $\alpha - \beta$.
- 8.2** Na přímce AB sestrojte bod C tak, aby:
- (a) $|AC| : |CB| = 5 : 2$,
 - (b) $|AC| : |AB| = 5 : 2$.
- 8.3** Je dána přímka a a body A, B tak, že $A \notin a \wedge B \in a$. Pomocí eukleidovského pravítka a kružítka sestrojte:
- (a) v bodě B kolmici m k přímce a ,
 - (b) bodem A kolmici q k přímce a ,
 - (c) bodem A rovnoběžku r s přímkou a ,
 - (d) polopřímku BX tak, aby velikost úhlu ABX byla 60° .
- 8.4** Sestrojte pravidelný patnáctiúhelník vepsaný do dané kružnice.
- 8.5** Dokažte, že přibližná délka strany pravidelného sedmiúhelníku (viz str. 131) je rovna polovině délky strany rovnostranného trojúhelníku vepsaného téže kružnici.
- 8.6** Početně určete, jak moc jsou popsané přibližné konstrukce pravidelného sedmiúhelníku (str. 131), pravidelného devítiúhelníku (str. 132) a rektifikace kružnice (str. 132) nepřesné.
- 8.7** Je dána úsečka AB délky 6 cm. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li $v_c = 2$ cm a $r = 4$ cm, kde r značí poloměr kružnice opsané.
- 8.8** Je dána úsečka AB délky 5 cm. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li $b = 6$ cm, $\gamma = 60^\circ$.
- 8.9** Jen na základě rozboru nejprve odhadněte počet řešení úlohy, poté, pokud to lze, ověřte svůj odhad konstrukcí:

- (a) Je dán bod A . Sestrojte trojúhelník ABC , jestliže $a = 4$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm.
- (b) Je dána kružnice $k(S, 4$ cm) a bod $A \in k$. Sestrojte trojúhelník ABC , jestliže $v_c = 1$ cm, $c = 6$ cm a k je kružnice trojúhelníku ABC opsaná.

8.10 Sestrojte trojúhelník ABC , jestliže:

- (a) $c = 6$ cm, $v_c = 2$ cm, $r = 4$ cm;
 (b) $\gamma = 90^\circ$, $\alpha = 60^\circ$, $\rho = 1,5$ cm;
 (c) $c = 5$ cm, $t_a = 6$ cm, $t_b = 3$ cm;
 (d) $c = 7$ cm, $v_a = 6,5$ cm, $\alpha = 30^\circ$;
 (e) $c = 8$ cm, $v_c = 1,5$ cm, $\gamma = 120^\circ$.

8.11 Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, jestliže $b = 4$ cm, $f = 5$ cm, $|\sphericalangle ASB| = 45^\circ$.

8.12 Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$, je-li $c = 4$ cm, $d = 5$ cm, $e = 6$ cm, $|\sphericalangle ASB| = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$.

8.13 Je dána úsečka BB_1 , jejíž délka je 6 cm. Proveďte diskuzi konstrukce trojúhelníku ABC , pro který je $\overline{BB_1}$ těžnicí t_b , $a = 8$ cm a $|AC| = b$ cm, kde $b \in \mathbb{R}^+$.

8.14 Je dána úsečka AB délky 6 cm. Proveďte diskuzi konstrukce trojúhelníku ABC , pro který platí: $t_b = 3$ cm, $\alpha \in (0; 180^\circ)$.

8.15 Je dána jednotková úsečka OP a úsečky o délkách a, b ($a > b > |OP|$). Sestrojte úsečku AB o délce:

- (a) $\sqrt{a^2 + b^2}$,
 (b) $\sqrt{a^2 - b^2}$,
 (c) \sqrt{ab} ,
 (d) $\frac{a}{b}$,
 (e) ab .

8.16 Sestrojte čtverec $ABCD$ o stejném obsahu, jako má daný různostranný ostroúhlý trojúhelník KLM .

8.17 Sestrojte pravidelný pětiúhelník $ABCDE$, je-li $|AC| = 6$ cm.

Kapitola 9

Shodnosti

9.1 Základní pojmy a vlastnosti

Zobrazení Z roviny je předpis (pravidlo), který každému bodu X dané roviny přiřazuje právě jeden bod X' této roviny.

*Bod X nazýváme *vzor*, bod X' jeho *obraz*.*

Poznámky:

- ▶ Obvykle píšeme: $Z: X \rightarrow X'$, popřípadě¹ $Z(X) = X'$.
- ▶ Množinu obrazů všech bodů útvaru U značíme obvykle U' a nazýváme ji *obraz útvaru U* .

Mějme zobrazení $Z: X \rightarrow X'$. Bod, pro který platí, že $X' = X$, nazýváme *samodružným bodem* zobrazení Z . Podobně, pokud je $U' = U$, nazýváme útvar U *samodružným útvarem* zobrazení Z .

Poznámka:

- ▶ U samodružných útvarů rozlišujeme, zda jsou *silně samodružné* nebo též *bodově samodružné* (tzn. že každý bod daného útvaru je samodružný),

¹Tento zápis odpovídá zápisu funkce.

nebo *slabě samodružné* nebo též *samodružné jako celek* (tzn., že sice obraz útvaru splývá s daným útvarom, avšak existuje bod útvaru, který není samodružný).

Zobrazení Z roviny nazveme *shodností*, pokud $\forall A, \forall B$ platí: $|AB| = |A'B'|$, kde $Z: A \rightarrow A', Z: B \rightarrow B'$.

Dále definujeme jednotlivé konkrétní shodnosti roviny v tom pořadí, jak jsou obvykle zaváděny ve školské matematice (tj. osová souměrnost, středová souměrnost, posunutí, otočení, identita), a uvedeme jejich základní vlastnosti. S prvními dvěma shodnostmi se setkají již žáci na základní škole, další dvě bývají zavedeny na střední škole a poslední, paradoxně nejsnazší, až na vysoké škole.

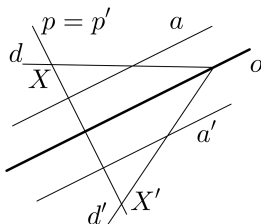
9.2 Osová souměrnost

Je dána přímka o . *Osová souměrnost* \mathcal{O} s osou o je zobrazení, které přiřazuje

- 1) $\forall X \notin o$ bod X' tak, že přímka XX' je kolmá k přímce o a střed úsečky XX' leží na přímce o ,
- 2) $\forall Y \in o$ bod $Y' = Y$.

Poznámky:

- ▶ Osová souměrnost je tedy zadána přímkou, tzv. *osou souměrnosti*.
- ▶ K označení osové souměrnosti obvykle do závorky připsujeme označení přímky, která je osou souměrnosti. V tomto případě bychom psali $\mathcal{O}(o)$.
- ▶ Každý bod ležící na ose souměrnosti je samodružný a žádný jiný bod v rovině samodružný není, osa je tedy množinou (všech) samodružných bodů osové souměrnosti. Zároveň je osa silně samodružným útvarom v osové souměrnosti.
- ▶ Každá přímka, která je kolmá k ose, je slabě samodružným útvarom, neboť jednotlivé body takové přímky až na průsečík s osou souměrnosti samodružné nejsou (viz přímka p v obr. 9.1).
- ▶ Obrazem přímky rovnoběžné s osou souměrnosti je opět rovnoběžka s osou souměrnosti (viz přímka a v obr. 9.1).
- ▶ Vzor a obraz přímky různoběžné s osou souměrnosti se spolu protínají na ose souměrnosti (viz přímka d v obr. 9.1).



Obrázek 9.1: Osová souměrnost

Věta 9.1

Osová souměrnost je shodnost.

Důkaz:

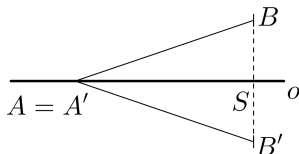
Mějme dva různé body A, B a osu o (pro $A = B$ je $|AB| = |A'B'| = 0$ a podmínka pro shodnost je tedy splněna). V osově souměrnosti s osou o podle definice sestrojíme obrazy A', B' bodů A, B . Chceme dokázat, že $|AB| = |A'B'|$. Vzhledem k poloze daných objektů (A, B, o) je třeba uvažovat čtyři situace:

- (a) $A \in o, B \in o$

Body A i B jsou samodružné, tedy $A = A', B = B'$ a také $|AB| = |A'B'|$.

- (b) $A \in o, B \notin o$

Bod A je samodružný, tedy $A = A'$. Podle definice sestrojíme obraz B' bodu B a průsečík $\overline{BB'}$ s osou o , což je střed úsečky BB' , označíme S (obr. 9.2). Trojúhelníky ASB a $A'SB'$ jsou shodné podle věty *sus*, neboť $|AS| = |A'S|$, $|BS| = |B'S|$ a $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle A'SB'| = 90^\circ$. Proto jsou shodné i úsečky AB a $A'B'$.



Obrázek 9.2: K důkazu věty 9.1, část (b)

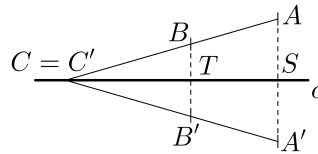
(c) $A \notin o, B \notin o, B \in \overrightarrow{oA}$

Podle definice sestrojíme obrazy A', B' bodů A, B a průsečík $\overline{AA'}$, resp. $\overline{BB'}$, s osou o označíme S , resp. T .

Pokud je $\longleftrightarrow AB \parallel o$, je i $\longleftrightarrow A'B' \parallel o$ a čtyřúhelník $ABB'A'$ je pravoúhelníkem, tedy $|AB| = |A'B'|$.

Pokud je $\longleftrightarrow AB \times o$, označíme C průsečík $\longleftrightarrow AB$ s osou o . Bod C je samodružný, tedy $C = C'$ (obr. 9.3).

Ze shodnosti trojúhelníků $CTB, C'TB'$ (*sus*) vyplývá, že $|CB| = |C'B'|$; ze shodnosti trojúhelníků $CSA, C'SA'$ (*sus*) vyplývá, že $|CA| = |C'A'|$. Jelikož je $|AB| = ||AC| - |BC||$ a $|A'B'| = ||A'C'| - |B'C'||$, je i $|AB| = |A'B'|$.

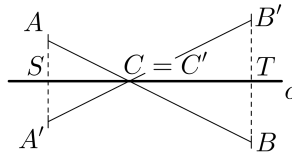


Obrázek 9.3: K důkazu věty 9.1, část (c)

(d) $A \notin o, B \notin o, B \notin \overrightarrow{oA}$

Postup je analogický jako v části (c); využijeme průsečíku C úsečky AB s osou o a shodných dvojic trojúhelníků: $\triangle ASC \simeq \triangle A'SC'$, $\triangle BTC \simeq \triangle B'TC'$ (obr. 9.4). Nakonec sečteme délky úseček AC a CB , resp. $A'C'$ a $C'B'$.

☒



Obrázek 9.4: K důkazu věty 9.1, část (d)

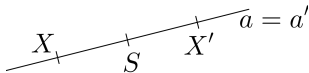
9.3 Středová souměrnost

Je dán bod S . *Středová souměrnost* \mathcal{J} se středem S je zobrazení, které přiřazuje

- 1) $\forall X \neq S$ bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX' ,
- 2) bodu S bod $S' = S$.

Poznámky:

- ▶ Středová souměrnost je tedy určena bodem, tzv. *středem souměrnosti*.
- ▶ K označení středové souměrnosti obvykle do závorčky připisujeme označení středu, tedy v tomto případě bychom psali $\mathcal{J}(S)$.
- ▶ Samodružným bodem je pouze střed souměrnosti.
- ▶ Žádná přímka není ve středové souměrnosti silně samodružná.
- ▶ Každá přímka, která prochází středem souměrnosti, je slabě samodružná (viz přímka a v obr. 9.5).



Obrázek 9.5: Středová souměrnost

Věta 9.2

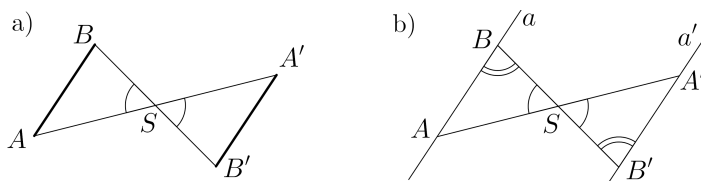
Středová souměrnost je shodnost.

Důkaz:

Mějme dva různé body A, B a střed S (pro $A = B$ je $|AB| = |A'B'| = 0$ a podmínka pro shodnost je tedy splněna). Ve středové souměrnosti se středem S sestrojíme podle definice obrazy A', B' bodů A, B . Chceme dokázat, že $|AB| = |A'B'|$. Vzhledem k poloze daných objektů (A, B, S) je třeba uvažovat dvě situace: Jeden z bodů A, B je roven bodu S , nebo jsou oba různé od bodu S .

První situace je triviální a rovnost $|AB| = |A'B'|$ plyne přímo z definice středové souměrnosti.

Ve druhé situaci (obr. 9.6a) získáme shodné trojúhelníky $ABS, A'B'S$ podle věty *sus* ($|AS| = |A'S|, |BS| = |B'S|, \sphericalangle ASB = \sphericalangle A'SB'$), tedy i $|AB| = |A'B'|$. ☒



Obrázek 9.6: K důkazům vět 9.2 a 9.3

Věta 9.3

Vě středové souměrnosti jsou vzor a obraz libovolné přímky navzájem rovnoběžné.

Důkaz:

Mějme středovou souměrnost se středem S . Pokud přímka a prochází bodem S , je totožná se svým obrazem a' , a tedy $a \parallel a'$ (totožnost přímek je speciálním případem rovnoběžnosti, viz str. 10).

Pokud přímka a neprochází bodem S , sestrojíme její obraz a' tak, že na ní zvolíme dva libovolné body A, B , najdeme jejich obrazy A', B' , a potom $a' = \leftrightarrow A'B'$ (obr. 9.6b). Trojúhelníky $ABS, A'B'S$ jsou shodné (*sus*). Díky tomu jsou shodné i velikosti úhlů ABS a $A'B'S$ a ze ZT 4 (str. 17) vyplývá rovnoběžnost přímek a, a' . \square

9.4 Posunutí

Posunutí zavedeme pomocí pojmu *orientovaná úsečka*.²

Orientovanou úsečkou AB rozumíme úsečku AB , jejíž krajní body mají určené pořadí, tedy tvoří uspořádanou dvojici $[A, B]$. Bod A nazýváme *počátečním bodem*, bod B *koncovým bodem* orientované úsečky AB .

Délkou orientované úsečky AB rozumíme délku úsečky AB .

Poznámky:

- Jinak řečeno, orientovaná úsečka je úsečka, u níž kromě délky uvažujeme také *orientovaný směr*. Dvě nenulové orientované úsečky AB a CD mají

²Alternativním přístupem je definovat pojem *vektor*.

stejný orientovaný směr, jestliže jsou rovnoběžné a buď jedna z polopřímek AB , CD obsahuje druhou, nebo polopřímky AB , CD leží na různých přímkách, ale v téže polovině s hraniční přímkou AC . Nemají-li rovnoběžné orientované úsečky AB a CD stejný orientovaný směr, říkáme, že mají *opačný směr*.

Je dána nenulová orientovaná úsečka KL . *Posunutí* neboli *translace* je zobrazení \mathcal{T} , které každému bodu X přiřadí bod X' tak, že orientované úsečky XX' , KL mají stejnou délku a stejný orientovaný směr.

Poznámky:

- ▶ K označení posunutí obvykle do závorky připisujeme také příslušnou orientovanou úsečku, kterou je posunutí určeno, tedy $\mathcal{T}(KL)$.
- ▶ Délka orientované úsečky udává tzv. *délku posunutí*, směr a orientace orientované úsečky udávají tzv. *orientovaný směr posunutí*.
- ▶ V posunutí není žádný bod samodružný. Tím pádem ani žádná přímka nemůže být bodově samodružná.
- ▶ Slabě samodružnými přímkami jsou ty přímky, které jsou rovnoběžné s orientovanou úsečkou určující dané posunutí.

Věta 9.4

Posunutí je shodnost.

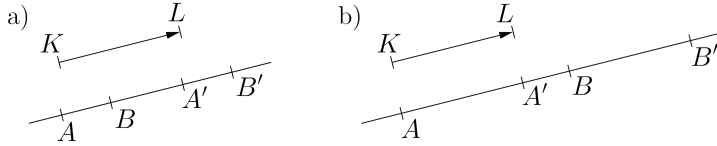
Důkaz:

Zvolme dva libovolné různé body A , B (pro totožné body je situace triviální a věta evidentně platná) a zobrazme je v daném posunutí určeném nenulovou orientovanou úsečkou KL . Bod A' je obrazem bodu A , bod B' je obrazem bodu B , přičemž $|AA'| = |BB'| = |KL|$ a úsečky AA' , BB' mají stejný orientovaný směr jako úsečka KL . Chceme ukázat, že $|AB| = |A'B'|$. Rozlišíme dvě situace:

(a) $\overline{AB} \parallel \overline{KL}$

V tomto případě ještě záleží na vzdálenosti bodů A , B vzhledem k délce orientované úsečky KL . Je-li $|AB| = |KL|$, pak $B = A'$ a tedy $|A'B'| = |BB'| = |KL| = |AB|$. Je-li $|AB| > |KL|$, platí vztah (9.1) se znaménky plus (obr. 9.7a), je-li $|AB| < |KL|$, platí tentýž vztah se znaménky mínus (obr. 9.7b):

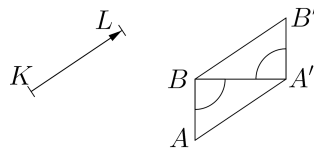
$$|AB| = |AA'| \pm |A'B| = |BB'| \pm |A'B| = |A'B'| \quad (9.1)$$



Obrázek 9.7: K důkazu věty 9.4, část (a)

(b) $\longleftrightarrow AB \times \longleftrightarrow KL$

Jelikož jsou přímky AB a KL různoběžné, vzniká čtyřúhelník $AA'B'B$. Sestrojíme jeho úhlopříčku $A'B$ (obr. 9.8). Trojúhelníky $AA'B$, $B'BA'$ jsou shodné podle věty *sus*, neboť $|AA'| = |B'B|$, stranu $A'B$ mají společnou a $|\sphericalangle AA'B| = |\sphericalangle B'BA'|$ (dle ZT4, str. 17). Ze shodnosti trojúhelníků plyne shodnost úseček AB , $A'B'$. \boxtimes



Obrázek 9.8: K důkazu věty 9.4, část (b)

Věta 9.5

Vzor a obraz přímky v posunutí jsou navzájem rovnoběžné.

Důkaz:

Věta je důsledkem věty 9.4, konkrétně důkaz vyplývá z části (b) důkazu věty 9.4. \boxtimes

9.5 Otočení

Pro definici otočení potřebujeme nejprve zavést pojem *orientovaný úhel*.

Orientovaný úhel \widehat{AVB} definujeme jako uspořádanou dvojici polopřímek $[VA, VB]$ se společným počátkem V , kde první polopřímku VA nazýváme *počátečním ramenem* a druhou polopřímku VB *koncovým ramenem*.

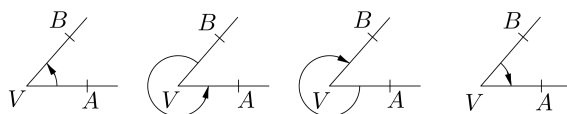
Velikostí orientovaného úhlu \widehat{AVB} nazýváme každé reálné číslo $\alpha + k \cdot 360^\circ$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a pro číslo α platí:

- 1) je-li $\rightarrow VA = \rightarrow VB$, je $\alpha = 0^\circ$,
- 2) je-li $\rightarrow VA \neq \rightarrow VB$, je α velikostí neorientovaného úhlu, který vznikne otočením počátečního ramene VA do polohy koncového ramene VB v kladném smyslu (tj. proti smyslu otáčení hodinových ručiček).

Číslo α nazýváme *základní velikostí* orientovaného úhlu.

Poznámky:

- ▶ Základní velikost orientovaného úhlu je číslo z intervalu $[0^\circ; 360^\circ)$.
- ▶ Každé reálné číslo je velikostí některého orientovaného úhlu.
- ▶ Zápisem $-\widehat{AVB}$ rozumíme orientovaný úhel, který vznikne otočením počátečního ramene VA do polohy koncového ramene VB v záporném smyslu. Na obrázku 9.9 jsou zleva doprava znázorněny orientované úhly \widehat{AVB} , \widehat{BVA} , $-\widehat{AVB}$, $-\widehat{BVA}$ zadané stejnou dvojicí polopřímek VA , VB . V obrázcích orientovaný úhel zvýrazňujeme šipkou.



Obrázek 9.9: Orientovaný úhel

Je dán orientovaný úhel, jehož jedna velikost je φ , a bod S . *Otočení* neboli *rotace* je zobrazení \mathcal{R} , které přiřazuje

- 1) $\forall X \neq S$ bod X' tak, že $|X'S| = |XS|$ a orientovaný úhel $\widehat{X'SX'}$ má velikost φ ,
- 2) bodu S bod $S' = S$.

Poznámky:

- ▶ Bod S nazýváme *středem otočení*, orientovaný úhel definující otočení je nazýván *úhlem otočení*.

- ▶ K označení otočení obvykle do závorky připisujeme také příslušný střed a velikost úhlu otočení, tedy $\mathcal{R}(S, \varphi)$.
- ▶ Je-li velikost úhlu otočení rovna celočíselnému násobku 360° , je každý bod samodružným bodem. V ostatních případech je samodružným bodem jen střed otočení.
- ▶ Otočení $\mathcal{R}(S, \varphi)$, kde $\varphi = 180^\circ + k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$), je vlastně středovou souměrností. Lze tedy říci, že středová souměrnost je speciálním případem otočení.

Věta 9.6

Otočení je shodnost.

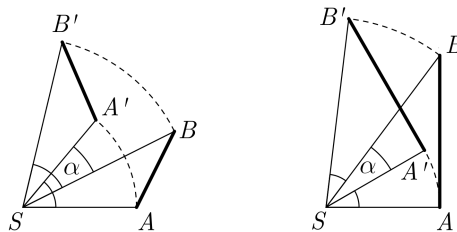
Důkaz:

Mějme otočení $\mathcal{R}(S, \varphi)$ a různé body A, B , které se v daném otočení zobrazí na body A', B' (pro totožné body je $|AB| = |A'B'| = 0$, čili věta platí). Bůno předpokládejme, že velikost φ úhlu otočení je základní, tedy z intervalu $[0^\circ; 360^\circ)$. Podle definice platí: $|A'S| = |AS|$, $|B'S| = |BS|$, $|\sphericalangle ASA'| = |\sphericalangle BSB'| = \varphi$. Pro vzájemnou polohu daných objektů může nastat několik situací:

- (a) Body A, B, S jsou kolineární. Potom platí:

$$|A'B'| = ||B'S| \pm |A'S|| = ||BS| \pm |AS|| = |AB|.$$

- (b) Body A, B, S nejsou kolineární. Označme $\alpha = |\sphericalangle BSA'|$. Potom $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle A'SB'| = \varphi - \alpha$ pro $\varphi > \alpha$ (obr. 9.10a) a $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle A'SB'| = \varphi + \alpha$ pro $\varphi \leq \alpha$ (obr. 9.10b). Trojúhelníky $ASB, A'SB'$ jsou tedy shodné podle věty *sus* a díky tomu jsou shodné i délky úseček $AB, A'B'$. ⊠



Obrázek 9.10: K důkazu věty 9.6, část (b)

9.6 Identita

Identitou nazýváme takové zobrazení, kde $\forall X$ je $X' = X$.

Poznámky:

- ▶ Jednoduše řečeno, identita je takové zobrazení, při němž je každý bod samodružný (a tedy každý útvar je silně samodružný).
- ▶ Pro identitu se zpravidla používá označení *Id*.
- ▶ Identitu můžeme získat jako speciální případ posunutí, pokud připustíme orientovanou úsečku nulové délky, nebo jako speciální případ otočení, kdy velikost orientovaného úhlu bude rovna celočíselnému násobku 360° .

Identita se může na první pohled jevit jako zcela zbytečné zobrazení, význam však má například při skládání zobrazení (viz dále) a v teorii grup.³

9.7 Přímá a nepřímá shodnost

Shodnosti dělíme na přímé a nepřímé. Mezi *přímé shodnosti* patří identita, středová souměrnost, posunutí a otočení. Osová souměrnost je *nepřímou shodností*.

Rozdíl mezi přímou a nepřímou shodností lze objasnit následovně: Představme si, že v jednotlivých shodných zobrazeních sestrojíme obraz trojúhelníku ABC , který je popsán podle abecedy proti smyslu otáčení hodinových ručiček. Obrazem bude vždy shodný trojúhelník $A'B'C'$. Byl-li obraz sestrojen v přímé shodnosti, je též popsán proti smyslu otáčení hodinových ručiček. Pokud však byl sestrojen v nepřímé shodnosti, jsou jeho vrcholy popsány ve smyslu otáčení hodinových ručiček, nepřímá shodnost tedy mění orientaci popisu vrcholů.

V učebnicích se můžete setkat ještě s jiným (avšak v podstatě analogickým) vysvětlením: Představme si, že máme dva shodné útvary vystřižené například z papíru. Pokud lze jeden přemístit na druhý tak, aby se překrývaly, pouze kombinací posunutí a otočení, jsou útvary přímo shodné. Pokud však překrytí útvarů docílíme jedině tak, že jeden z nich zvedneme z podložky a překlopíme (tedy je nutné „vystoupit z roviny do prostoru“), jsou útvary nepřímo shodné.

³V grupě symetrií má identita roli neutrálního prvku.

9.8 Skládání shodností

Jsou dána dvě zobrazení roviny Z_1, Z_2 a X je libovolný bod. Označme X' obraz bodu X v zobrazení Z_1 a X'' obraz bodu X' v zobrazení Z_2 . Potom zobrazení $Z: X \rightarrow X''$ nazveme *složeným zobrazením* ze zobrazení Z_1, Z_2 v tomto pořadí.

Poznámky:

- ▶ Obvykle používáme zápis $Z = Z_2 \circ Z_1$, přestože první provádíme zobrazení Z_1 . Toto značení vychází ze značení pro skládání funkcí.⁴
- ▶ Obecně na pořadí skládaných zobrazení záleží, tedy $Z_1 \circ Z_2 \neq Z_2 \circ Z_1$, rovnost nastává pouze ve specifických situacích.

Věta 9.7

Jsou-li zobrazení Z_1 a Z_2 shodnostmi, je zobrazení $Z = Z_2 \circ Z_1$ také shodností.

Důkaz:

Zvolme dva různé body A, B . Zobrazme tyto body v zobrazení Z_1 , tedy $Z_1: A \rightarrow A', B \rightarrow B'$. Jelikož je zobrazení Z_1 shodností, platí $|AB| = |A'B'|$. Zobrazme dále body A', B' v zobrazení Z_2 , tedy $Z_2: A' \rightarrow A'', B' \rightarrow B''$. Jelikož je zobrazení Z_2 také shodností, platí $|A'B'| = |A''B''|$, a tedy $|AB| = |A''B''|$. ☒

Dále se podrobněji zaměříme na to, jaké shodnosti můžeme získat, složíme-li spolu shodnosti definované v podkapitolách 9.2 až 9.5. Nejprve ukážeme jedno konkrétní složené zobrazení, které získáme složením osové souměrnosti a posunutí. Nazývá se *posunutá souměrnost* nebo též *posunutá symetrie*. Než však toto zobrazení zavedeme, je třeba dokázat následující větu.

Věta 9.8

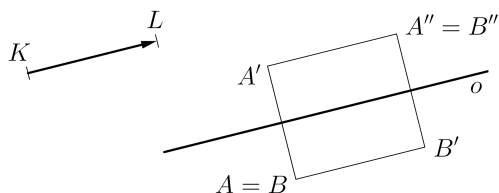
Na pořadí skládání osové souměrnosti $\mathcal{O}(o)$ a posunutí $\mathcal{T}(\text{KL})$, kde $o \parallel \text{KL}$, nezáleží.

Důkaz:

Na obrázku 9.11 je zakreslen bod A , jeho obraz A' v osové souměrnosti s osou o a obraz A'' bodu A' v posunutí určeném orien-

⁴Chceme-li složit funkce f a g v tomto pořadí, složenou funkci můžeme zapsat jako $g(f(x))$, tedy písmeno g je v zápisu první a písmeno f druhé. Odtud zápis $g \circ f$.

tovanou úsečkou KL . Bod A'' je tedy obrazem bodu A v zobrazení $\mathcal{T}(KL) \circ \mathcal{O}(o)$. Bod A je dále ztotožněn s bodem B a bod B' je obrazem bodu B v posunutí $\mathcal{T}(KL)$. Z vlastností použitých zobrazení víme, že $\overline{AA'} \perp \overline{A'A''}$, $\overline{A'A''} \parallel \overline{AB'}$, $|A'A''| = |AB'|$ a $B' \in \overline{AA'A''}$ (neboť úsečky AB' , $A'A''$ mají stejný orientovaný směr). Odtud vyplývá, že B' je čtvrtý vrchol pravoúhelníku s vrcholy A , A' , A'' , a tedy bod B'' , který je obrazem bodu B' v osové souměrnosti $\mathcal{O}(o)$, splyne s bodem A'' , neboli $\mathcal{O}(o) \circ \mathcal{T}(KL) = \mathcal{T}(KL) \circ \mathcal{O}(o)$. \square



Obrázek 9.11: Složení osové souměrnosti a posunutí

Je dána přímka o a nenulová orientovaná úsečka KL , která je rovnoběžná s přímkou o . Zobrazení \mathcal{P} , které vznikne složením osové souměrnosti $\mathcal{O}(o)$ a posunutí $\mathcal{T}(KL)$ v libovolném pořadí, se nazývá *posunutá souměrnost*.

Přímku o nazýváme *osou* a úsečku KL *orientovanou úsečkou* posunuté souměrnosti.

Poznámka:

- Z vlastností osové souměrnosti a posunutí plyne, že žádný bod není v posunuté souměrnosti samodružný a pouze jediná přímka, osa o , je slabě samodružná.

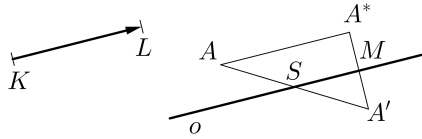
Věta 9.9

Je dána posunutá souměrnost \mathcal{P} s osou o a orientovanou úsečkou KL . Potom pro každou úsečku AA' , kde $\mathcal{O}: A \rightarrow A'$, platí, že její střed S leží na ose o .

Důkaz:

Sestrojíme obraz A^* libovolného bodu A v translaci $\mathcal{O}(KL)$ a obraz A' bodu A^* v osové souměrnosti $\mathcal{O}(o)$ (obr. 9.12). Označme M průsečík úsečky A^*A' s osou o a S průsečík úsečky AA' s osou o . Chceme

ukázat, že S je středem úsečky AA' . Víme, že M je středem úsečky A^*A' (osová souměrnost) a že $\overline{AA^*} \parallel o$ (definice posunuté souměrnosti). Proto je úsečka MS střední příčkou trojúhelníku AA^*A' (viz věta 2.7, str. 34) a bod S je středem úsečky AA' . ☒



Obrázek 9.12: K důkazu věty 9.9

Věta 9.10

Jsou dány dva přímo shodné trojúhelníky ABC a $A'B'C'$. Potom existuje posunutí nebo otočení, v němž je trojúhelník $A'B'C'$ obrazem trojúhelníku ABC .

*Důkaz:*⁵

Pokud je $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$, jedná se o identitu, tedy speciální případ otočení (resp. posunutí, připustíme-li orientovanou úsečku nulové délky).

Je-li $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$ a zároveň $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \parallel \overline{CC'}$, už musí být nutně $|AA'| = |BB'| = |CC'|$, neboť čtyřúhelníky $AA'B'B$, $AA'C'C$, $BB'C'C$ jsou rovnoběžníky, popřípadě jeden či více z těchto čtyřúhelníků „degeneruje“ na úsečku, a jedná se o posunutí.

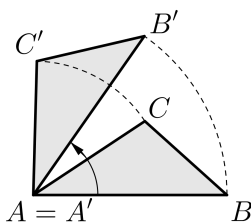
Jsou-li trojúhelníky ABC , $A'B'C'$ přímo shodné, nemůže nastat situace, že by dva vzory splynuly se svými obrazy a třetí nikoliv (např. že by bylo $A = A'$, $B = B'$, $C \neq C'$), ani že by dvě spojnice (např. AA' a BB') byly rovnoběžné a třetí (CC') s nimi různoběžná. Zbývá tedy prověřit situace, kdy právě jeden vzor a obraz splývají (např.

⁵Jelikož se zabýváme syntetickou geometrií, budou tento a další důkazy založeny na konstrukčním postupu. Principem je, že existenci zobrazení dokážeme tak, že jej konstrukčně objevíme, nezávisle na poloze zadaných objektů. Je však obtížné potom takové důkazy precizně matematicky zapsat, proto se omezíme jen na objasnění jejich základních myšlenek, cílem nebude rozebrat zde do detailu každou možnou situaci. Hlavním smyslem předložených důkazů je poskytnout čtenáři návod, jak v dané konkrétní situaci konstrukčně nalézt požadované/á zobrazení a poskytnout alespoň náznak argumentů, proč je tento postup správný.

$A = A', B \neq B', C \neq C'$) nebo kdy jsou všechny obrazy různé od svých vzorů a zároveň spojnice vzor-obraz nejsou navzájem rovnoběžné.

(a) Nechť $A = A', B \neq B', C \neq C'$ (obr. 9.13).

Ze shodnosti daných trojúhelníků víme, že $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$ a $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle C'A'B'|$. V obrázku 9.13 dále vidíme, že $|\sphericalangle BAB'| = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAB'| = |\sphericalangle B'AC'| + |\sphericalangle CAB'| = |\sphericalangle CAC'|$. Odtud vyplývá, že trojúhelník $A'B'C'$ získáme otočením trojúhelníku ABC okolo středu $A = A'$ o orientovaný úhel \widehat{BAB}' .



Obrázek 9.13: K důkazu věty 9.10, část (a)

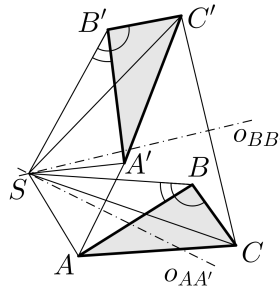
(b) Nechť $A \neq A', B \neq B', C \neq C'$ a zároveň přímky AA', BB', CC' nejsou navzájem rovnoběžné.

Takto zadané trojúhelníky $ABC, A'B'C'$ mohou být středově souměrné, středová souměrnost je však speciálním případem otočení.

Pokud dané trojúhelníky středově souměrné nejsou, sestrojíme osy $o_{AA'}, o_{BB'}$ úseček AA', BB' a jejich průsečík označíme S (obr. 9.14). Trojúhelníky $ABS, A'B'S$ jsou shodné (*sss*), tedy i $|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle A'B'S|$. Trojúhelníky $CSB, C'SB'$ jsou potom shodné⁶ podle věty *sus*, neboť $|SB| = |SB'|$, $|BC| = |B'C'|$ a $|\sphericalangle SBC| = |\sphericalangle SBA| + |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle SB'A'| + |\sphericalangle A'B'C'| = |\sphericalangle SB'C'|$. Tedy $|SC| = |SC'|$, tj. osa úsečky CC' prochází bodem S . Z uvedeného vyplývá, že trojúhelník $A'B'C'$ je obrazem trojúhelníku ABC v rotaci se středem S , neboť $|A'S| =$

⁶Dále v důkazu vycházíme z polohy daných trojúhelníků jako na obrázku 9.14, při jiné poloze daných objektů může být velikost úhlu SBC vyjádřena jinak, popřípadě trojúhelníky $CSB, C'SB'$ mohou degenerovat na úsečku.

$= |AS|, |B'S| = |BS|, |C'S| = |CS|$, shodnost velikostí orientovaných úhlů $\widehat{ASA'}$, $\widehat{BSB'}$ a $\widehat{CSC'}$ plyne ze shodností výše uvedených dvojic trojúhelníků, shodnou orientací (znaménko) těchto úhlů můžeme nahlédnout v obrázku 9.14. \boxtimes



Obrázek 9.14: K důkazu věty 9.10, část (b)

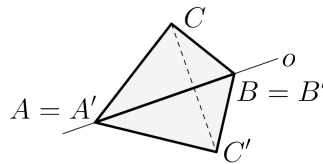
Věta 9.11

Jsou dány dva nepřímo shodné trojúhelníky ABC a $A'B'C'$. Potom existuje osová souměrnost nebo posunutá souměrnost, v níž je trojúhelník $A'B'C'$ obrazem trojúhelníku ABC .

Důkaz:

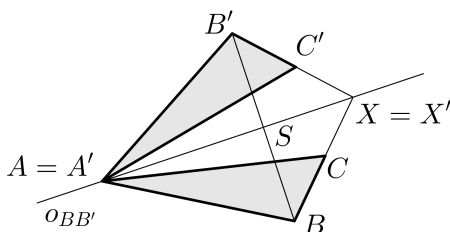
Jelikož jsou trojúhelníky nepřímo shodné, nemůže nastat situace, kdy $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$. Dále rozlišíme čtyři situace:

- (a) Právě dvě dvojice bodů vzor-obraz se rovnají, například $A = A'$, $B = B'$ ($C \neq C'$). Potom jsou dané trojúhelníky osově souměrné a osou je přímka AB (viz obr. 9.15).



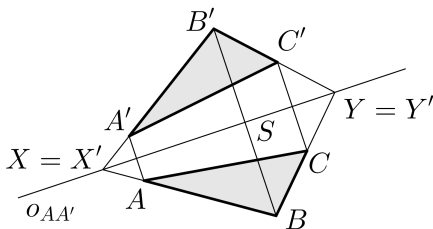
Obrázek 9.15: K důkazu věty 9.11, část (a)

- (b) Právě jedna dvojice bodů vzor-obraz si je rovna, např. $A = A'$ ($B \neq B'$, $C \neq C'$). Sestrojíme osu o úsečky BB' a označíme S střed $\overline{BB'}$, X průsečík přímky CB s osou o a X' průsečík přímky $C'B'$ s osou o (pozor, zatím nevíme, že $X = X'$), viz obrázek 9.16. Trojúhelníky ABS , $A'B'S$ jsou shodné (*sss*), odtud plyne rovnost velikostí úhlů BAS a $B'A'S$. Díky tomu jsou shodné i trojúhelníky ACX , $A'C'X'$ (*usu*), a tedy $|AX| = |A'X'| \Rightarrow X = X'$ a $|CX| = |C'X'|$. Z poslední rovnosti vyplývá, že osa o je i osou úsečky CC' , našli jsme tedy osu osové souměrnosti, v níž se trojúhelník ABC zobrazí na trojúhelník $A'B'C'$.



Obrázek 9.16: K důkazu věty 9.11, část (b)

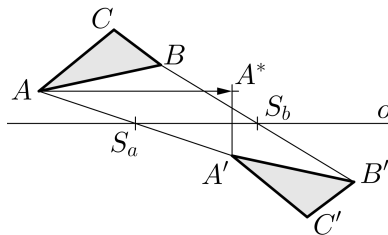
- (c) $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$, $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \parallel \overline{CC'}$ (obr. 9.17). Sestrojíme například osu úsečky AA' a obdobně jako v předchozím případě ukážeme, že je to i osa úseček BB' a CC' . K zdůvodnění můžeme využít i rovnoramenné lichoběžníky $AA'B'B$ a $AA'C'C$.



Obrázek 9.17: K důkazu věty 9.11, část (c)

- (d) $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$ a spojnice AA' , BB' , CC' nejsou navzájem rovnoběžné. Mezi takovými trojúhelníky evidentně

neexistuje osová souměrnost, pokusíme se tedy najít posunutou souměrnost (obr. 9.18). Podle věty 9.9 sestrojíme střed S_a úsečky AA' a střed S_b úsečky BB' . Přímka S_aS_b je osou o hledané posunuté souměrnosti. V osové souměrnosti s osou o sestrojíme obraz A^* bodu A' . Orientovaná úsečka AA^* určuje posunutí posunuté souměrnosti. Pro provedení precizního důkazu by nyní bylo třeba ověřit, že pro bod B^* získaný jako obraz bodu B' v osové souměrnosti $\mathcal{O}(o)$ platí, že $BB^* = AA^*$ (opět bychom hledali a vhodně k sobě skládali shodné trojúhelníky) a že v nalezeném zobrazení se bod C zobrazí skutečně na zadaný bod C' . \square



Obrázek 9.18: K důkazu věty 9.11, část (d)

Poznámky:

- ▶ Z vět 9.10 a 9.11 vyplývá, že vzorem a obrazem trojúhelníku je určena shodnost.
- ▶ Ve větách 9.10 a 9.11 jsme pracovali s trojúhelníky. Věty však lze zobecnit na libovolný útvar, neboť libovolný útvar lze rozložit na n trojúhelníků (v případě oblých útvarů musíme uvažovat limitní přechod $n \rightarrow \infty$). Potom můžeme věty 9.10 a 9.11 formulovat tak, že jakákoliv přímá shodnost roviny je identitou, posunutím nebo otočením a jakákoliv nepřímá shodnost roviny je osovou nebo posunutou souměrností. Neboli, není potřeba zavádět další typy shodností, uvedená zobrazení reprezentují libovolnou shodnost roviny.

Věta 9.12

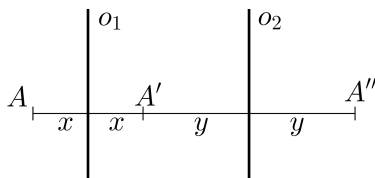
Každé shodné zobrazení lze složit z nejvýše tří osových souměrností.

Důkaz:

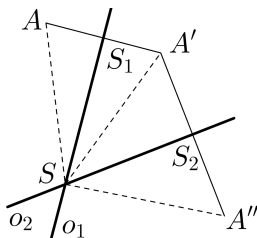
Výše jsme uvedli, že každá shodnost je identitou, posunutím, otočením, osovou souměrností nebo posunutou souměrností. Zbývá tedy

ukázat, že identitu, posunutí, otočení a posunutou souměrnost můžeme získat složením nejvýše tří osových souměrností.

- (a) Identitu získáme, složíme-li osové souměrnosti $\mathcal{O}_1(o_1)$, $\mathcal{O}_2(o_2)$, kde $o_1 = o_2$. Zobrazíme-li libovolný bod A v osové souměrnosti s osou o na bod A' a bod A' zobrazíme znovu podle osy o , získáme bod $A'' = A$.
- (b) Posunutí získáme složením osových souměrností $\mathcal{O}_1(o_1)$ a $\mathcal{O}_2(o_2)$, kde $o_1 \parallel o_2$ ($o_1 \neq o_2$). Na obrázku 9.19 můžeme pozorovat obraz A' bodu A v $\mathcal{O}_1(o_1)$ a obraz A'' bodu A' v $\mathcal{O}_2(o_2)$. Označíme-li $|Ao_1| = x$ a $|A'o_2| = y$, potom $|AA''| = 2(x+y) = 2|o_1o_2|$ bez ohledu na výchozí polohu bodu A . Získáváme tedy posunutí ve směru kolmém k daným osám o délku rovnou $2|o_1o_2|$.



Obrázek 9.19: Posunutí jako složení osových souměrností



Obrázek 9.20: Otočení jako složení dvou osových souměrností

- (c) Otočení získáme složením osových souměrností $\mathcal{O}_1(o_1)$ a $\mathcal{O}_2(o_2)$, kde o_1, o_2 jsou různoběžné. Na obrázku 9.20 vidíme obraz A' bodu A v $\mathcal{O}_1(o_1)$ a obraz A'' bodu A' v $\mathcal{O}_2(o_2)$. Označíme-li S průsečík os, S_1 střed úsečky AA' a S_2 střed úsečky $A'A''$, pak pro libovolný bod A platí $|AS| = |A'S| = |A''S|$, $\sphericalangle ASS_1 =$

$= |\sphericalangle A'SS_1|, |\sphericalangle A'SS_2| = |\sphericalangle A''SS_2| \text{ a } |\sphericalangle ASA''| = 2(|\sphericalangle A'SS_1| + |\sphericalangle A'SS_2|) = 2|\sphericalangle o_1o_2|$. Tedy bod A'' je obrazem bodu A v otočení okolo středu S o orientovaný úhel, jehož absolutní hodnota velikosti je rovna dvojnásobku velikosti úhlu, který svírají osy o_1, o_2 . Speciálně tedy pro $o_1 \perp o_2$ získáme otočení o 180° , čili středovou souměrnost.

- (d) Posunutou souměrnost jsme nadefinovali jako zobrazení složené z posunutí \mathcal{T} a osové souměrnosti \mathcal{O} . Z části (b) tohoto důkazu víme, že posunutí získáme složením dvou osových souměrností $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$. Odtud vyplývá, že posunutou souměrnost můžeme získat složením tří osových souměrností $\mathcal{O}_1(o_1), \mathcal{O}_2(o_2), \mathcal{O}(o)$, přičemž osy o_1, o_2 jsou různé rovnoběžky a přímka o je k nim kolmá, neboť musí být rovnoběžná se směrem posunutí. \square

Poznámka:

- Orientace směru posunutí, resp. úhlu otočení, v částech (b) a (c) důkazu věty 9.12 závisí na pořadí skládání osových souměrností.

Zobrazení Z , které složeno samo se sebou dává identitu, nazýváme *involutorním zobrazením*.

Poznámka:

- Involutorními zobrazeními roviny jsou osová a středová souměrnost a identita.

9.9 Úlohy

- 9.1** Je dán čtverec $ABCD$. Ve kterých osových souměrnostech má jeho hranice (tj. uzavřená lomená čára $ABCD$)
- (a) právě dva samodružné vrcholy,
 - (b) právě jednu samodružnou úsečku s krajními body ve vrcholech čtverce,
 - (c) právě dvě samodružné úsečky s krajními body ve vrcholech čtverce?
- 9.2** Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB . Dokažte, že součet vzdáleností každého bodu X úsečky AB od přímk AC a BC je konstantní.

- 9.3** Je dán ostrý úhel XVY a jeho vnitřní bod C . Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby jeho vrcholy A, B ležely po řadě na polopřímkách VX, VY a obvod trojúhelníku ABC byl minimální.
- 9.4** Je dán bod M , přímka p a bod $P \in p$ tak, že $|Mp| = 2 \text{ cm} \wedge |PM| = 3,5 \text{ cm}$. Sestrojte všechny body $X \in p$ takové, že $|PX| + |XM| = 8 \text{ cm}$.
- 9.5** Je dána kružnice $k(S, r)$ a bod A , který na ní neleží. Určete množinu všech bodů X takových, že bod A je středem úsečky XY a $Y \in k$.
- 9.6** Je dán trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod M . Sestrojte všechny úsečky XY se středem M a s krajními body X, Y ležícími na hranici trojúhelníku ABC .
- 9.7** Jsou dány různoběžky a, b a úsečka MN . Sestrojte úsečku AB shodnou a rovnoběžnou s úsečkou MN tak, aby její krajní body A, B ležely po řadě na přímkách a, b .
- 9.8** Jsou dány různé rovnoběžky a a b , bod M ($M \notin a \wedge M \notin b$) a úsečka délky $d > |ab|$. Bodem M veďte všechny přímky m , které protínají přímky a, b v bodech A, B tak, že $|AB| = d$.
- 9.9** Vyhledejte místo na řece šířky d , ve kterém by měl stát most ve směru kolmém na tok řeky tak, aby cesta z obce A do obce B , které leží na různých stranách řeky mimo její břehy, byla nejkratší.
- 9.10** Uvnitř rovinného pásu určeného různými rovnoběžkami a, b je dán bod M . Sestrojte kružnici k , která prochází bodem M a dotýká se přímek a, b .
- 9.11** Specifikujte střed a úhel otočení, v němž je samodružný/á
- (a) rovnostranný trojúhelník,
 - (b) čtverec,
 - (c) kružnice.
- 9.12** Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(S, 4 \text{ cm}), k_2(S, 3 \text{ cm})$ a bod A , kde $|SA| = 2 \text{ cm}$. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC tak, aby $B \in k_1 \wedge C \in k_2$.
- 9.13** Je dána kružnice $k(S, r)$, bod B a úsečka délky $d < 2r$. Sestrojte tětivu XY kružnice k délky d tak, aby byla vidět z bodu B pod úhlem 60° .

9.14 Sestrojte trojúhelník ABC , jestliže:

- (a) $o = 12$ cm, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, kde o značí obvod $\triangle ABC$,
- (b) $c = 4$ cm, $\alpha = 60^\circ$, $b - a = 1$ cm,
- (c) $t_a = 5$ cm, $b = 7$ cm, $c = 4$ cm,
- (d) $t_a = 4,5$ cm, $t_b = 6$ cm, $t_c = 7$ cm.

9.15 Sestrojte obdélník $ABCD$, jestliže $e = 7$ cm, $a - b = 1$ cm.

9.16 Sestrojte lichoběžník $ABCD$ se základnami AB , CD , jestliže

- (a) $b = 3$ cm, $c = 2,5$ cm, $d = 2,6$ cm, $\alpha - \beta = 20^\circ$,
- (b) $a = 6,5$ cm, $b = 4$ cm, $c = 3$ cm, $d = 3$ cm.

9.17 Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jestliže $a = 5$ cm, $c = 3,5$ cm, $e = 6$ cm, $f = 5,5$ cm, $|\sphericalangle ASB| = 120^\circ$, kde S je průsečík úhlopříček čtyřúhelníku $ABCD$.

9.18 Dokažte, že v trojúhelníku ABC leží obrazy ortocentra v osových souměrnostech s osami AB , BC , AC na kružnici trojúhelníku ABC opsané.

9.19 Sestrojte libovolnou dvojici (a) přímo shodných, (b) nepřímě shodných trojúhelníků ABC , $A'B'C'$ tak, aby $A \neq A' \wedge B \neq B' \wedge C \neq C'$, a sestrojte osy osových souměrností, jejichž složením se jeden trojúhelník zobrazí na druhý.

9.20 V rovině je dáno pět různých bodů S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 , které neleží v přímce. Sestrojte všechny uzavřené lomené čáry $ABCDEA$, pro něž jsou body S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 po řadě středy stran AB, BC, CD, DE, EA .

9.21 Ukažte, že posunutá souměrnost \mathcal{P} se dá složit ze středové souměrnosti $\mathcal{S}(S)$ a osové souměrnosti $\mathcal{O}(o)$, kde $S \notin o$, v libovolném pořadí.

9.22 Jaké zobrazení získáme složením $\mathcal{O}(o)$ a $\mathcal{T}(AB)$, kde

- (a) $\overline{AB} \perp o$,
- (b) $|\sphericalangle \leftarrow AB, o| = 60^\circ$?

9.23 Jaké/á zobrazení je/jsou, resp. může/mohou být, určeno/a

- (a) třemi samodružnými nekolineárními body,
- (b) dvěma různými samodružnými body,
- (c) jedním samodružným bodem?

Kapitola 10

Podobnosti

Dosud jsme se zabývali pouze podobnými trojúhelníky (podkapitola 2.2). Nyní se budeme věnovat obecněji podobnosti libovolných útvarů.

10.1 Základní pojmy a vlastnosti

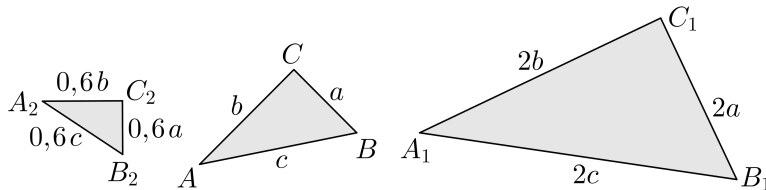
Je dáno $k > 0$. Zobrazení Z nazveme *podobností*, pokud $\forall A, \forall B$ platí: $|A'B'| = k \cdot |AB|$, kde $Z: A \rightarrow A', Z: B \rightarrow B'$.

Číslo k nazýváme *koeficient podobnosti*.

Poznámky:

- ▶ Pro $k > 1$ je útvar U' , který je obrazem útvaru U , „větší“ než původní útvar U . Pro $k \in (0; 1)$ je útvar U' , který je obrazem útvaru U , „menší“ než původní útvar U . Na obrázku 10.1 je trojúhelník $A_1B_1C_1$, který je obrazem daného trojúhelníku ABC v podobnosti s koeficientem 2, a trojúhelník $A_2B_2C_2$, který je obrazem daného trojúhelníku ABC v podobnosti s koeficientem 0,6.
- ▶ Podobnost zachovává velikosti úhlů.
- ▶ Pro $k = 1$ je zobrazení Z shodností. Na shodnost lze tedy nahlížet jako na speciální případ podobnosti.

- *Přímou (nepřímou) podobnost* definujeme analogicky k přímé (nepřímé) shodnosti, viz podkapitola 9.7.



Obrázek 10.1: Koeficient podobnosti

10.2 Stejnolehlost

V praxi se používá jediná konkrétní podobnost, a sice *stejnolehlost*. Ostatní podobnosti lze složit ze stejnohlosti a nějaké shodnosti.

Je dán bod S a nenulové reálné číslo λ . *Stejnolehlost* (též *homotetie*) \mathcal{H} se středem S a koeficientem λ je zobrazení, které přiřazuje

- 1) $\forall X \neq S$ bod X' tak, že $|SX'| = |\lambda| \cdot |SX|$, přičemž
 - a) $X' \in \rightarrow SX$ pro $\lambda > 0$,
 - b) X' leží na polopřímce opačné k $\rightarrow SX$ pro $\lambda < 0$,
- 2) bodu S bod $S' = S$.

Poznámky:

- Stejnolehlost je tedy zadána středem a koeficientem.
- K označení stejnohlosti obvykle do závorky připisujeme označení jejího středu a označení/hodnotu koeficientu. V tomto případě bychom psali $H(S, \lambda)$.
- Pro $\lambda = 1$ získáme identitu, pro $\lambda = -1$ získáme středovou souměrnost se středem S .
- Pro $\lambda \neq 1$ pro libovolný bod $X \neq S$ a jeho obraz X' platí $(X'XS) = \lambda$.
- Pro $\lambda \neq 1$ je samodružný pouze bod S a žádná přímka není silně samodružná.

- ▶ Pro $\lambda \neq 1$ jsou slabě samodružné ty přímky, které prochází bodem S .
- ▶ Složením stejnoolehlosti a přímé shodnosti získáme přímou podobnost, složením stejnoolehlosti a nepřímé shodnosti získáme nepřímou podobnost.

Věta 10.1

Stejnolehlost je podobností.

Důkaz:

Mějme dva různé body A, B , střed S a číslo $\lambda \neq 0$ (pro totožné body A, B je $|AB| = |A'B'| = 0$, věta tedy platí). Ve stejnoolehlosti $\mathcal{H}(S; \lambda)$ sestrojíme obrazy A', B' bodů A, B . Chceme dokázat, že $|A'B'| = k \cdot |AB|$. Vzhledem k vzájemné poloze daných bodů A, B, S je třeba uvažovat dvě situace:

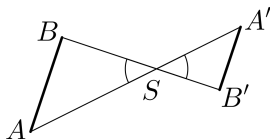
- (a) Body A, B, S jsou kolineární. Označme p přímku, na níž tyto tři body leží. Potom také $A' \in p$ a $B' \in p$ a platí (obr. 10.2):

$$\begin{aligned} |A'B'| &= ||SA'| \pm |SB' || = ||\lambda| \cdot |SA| \pm |\lambda| \cdot |SB| | = \\ &= |\lambda| \cdot ||SA| \pm |SB| | = |\lambda| \cdot |AB|, \end{aligned}$$

tedy zobrazení je podobností s koeficientem $|\lambda|$.



Obrázek 10.2: K důkazu věty 10.1, část (a)



Obrázek 10.3: K důkazu věty 10.1, část (b)

- (b) Body A, B, S nejsou kolineární. Existuje tedy trojúhelník ABS . Pro obrazy bodů A, B platí: $A' \in \longleftrightarrow AS \wedge |A'S| = |\lambda| \cdot |AS|$, $B' \in \longleftrightarrow BS \wedge |B'S| = |\lambda| \cdot |BS|$ (obr. 10.3). Trojúhel-

níky $A'B'S$, ABS jsou podobné podle věty *sus*, neboť $\frac{|A'S|}{|AS|} = \frac{|B'S|}{|BS|} = |\lambda|$ a $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle A'SB'|$. Z této podobnosti vyplývá, že také $\frac{|A'B'|}{|AB|} = |\lambda|$, tedy $|A'B'| = k \cdot |AB|$, kde $k = |\lambda|$. \square

Poznámka:

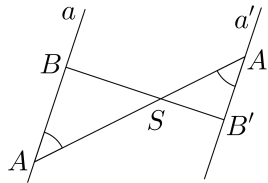
- Z důkazu věty 10.1 je patrné, že koeficienty k z definice podobnosti a λ z definice stejnolehlosti spolu úzce souvisí, konkrétně že $k = |\lambda|$. Lze tedy říci, že stejnolehlost s koeficientem λ je podobností s koeficientem $|\lambda|$.

Věta 10.2

Je-li přímka a' obrazem přímky a ve stejnolehlosti $\mathcal{H}(S; \lambda)$, potom $a \parallel a'$.

Důkaz:

Pro samodružnou přímku a (tedy pokud $S \in a$) věta platí, neboť totožnost je speciálním případem rovnoběžnosti přímek. V případě, že $S \notin a$ (obr. 10.4), zvolíme na přímce a dva různé body A , B a sestrojíme jejich obrazy A' , B' ve stejnolehlosti $\mathcal{H}(S; \lambda)$. Stejně jako v důkazu věty 10.1 získáme dvojici podobných trojúhelníků ABS , $A'B'S$ (*sus*). Z této podobnosti vyplývá shodnost úhlů SAB , $SA'B'$, které jsou souhlasné/střídavé (záleží na znaménku čísla λ) vzhledem k přímek a , a' a jejich příčce AA' . Dle ZT4 (str. 17) je tedy $a \parallel a'$. \square



Obrázek 10.4: K důkazu věty 10.2

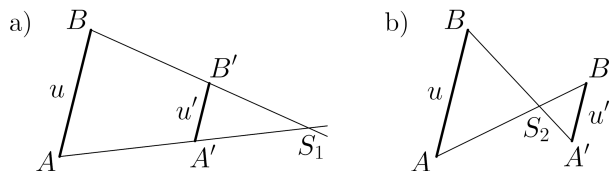
Věta 10.3

Mějme úsečky u , u' různých délek ležící na různých rovnoběžných přímkách. Potom existují právě dvě stejnolehlosti, které zobrazují úsečku u na úsečku u' .

Důkaz:

Popišme krajní body dané úsečky u jako A , B . Krajní body A' , B' jejího obrazu u' poté můžeme popsat dvěma způsoby; jedna možnost je na obrázku 10.5a, druhá na obrázku 10.5b. Víme, že bod S musí být průsečíkem přímek AA' , BB' . V obrázku 10.5a jsme takto sestrojili bod S_1 , v obrázku 10.5b bod S_2 . V obou situacích vzniknou dvojice podobných trojúhelníků ABS , $A'B'S$, úsečka u' je tedy skutečně obrazem úsečky u ve stejnolehlosti. Stejnolehlosti jsme našli dvě, jednu se středem S_1 a koeficientem $\lambda_1 > 0$, druhou se středem S_2 a koeficientem $\lambda_2 < 0$.

⊠



Obrázek 10.5: K důkazu věty 10.3

Poznámky:

- Střed S_1 z důkazu předchozí věty nazýváme *vnějším středem stejnolehlosti* (vzhledem k daným objektům), střed S_2 nazýváme *vnitřním středem stejnolehlosti* (vzhledem k daným objektům). Pro koeficienty λ_1 , λ_2 platí: $\lambda_1 = |\lambda_2|$.
- Na situaci v obrázku 10.5a lze také pohlížet tak, že úsečka AB je obrazem úsečky $A'B'$ ve stejnolehlosti se středem S_1 a koeficientem $\frac{1}{\lambda_1}$, obdobně na obrázku 10.5b je úsečka $A'B'$ obrazem úsečky AB ve stejnolehlosti se středem S_2 a koeficientem $\frac{1}{\lambda_2}$.

10.3 Stejnolehlost kružnic

Věta 10.4

Obrazem kružnice ve stejnoolehlosti $\mathcal{H}(S; \lambda)$ je kružnice.

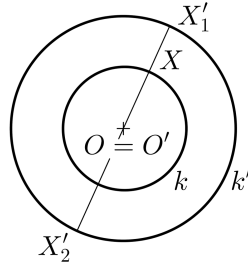
Důkaz:

Mějme kružnici $k(O, r)$. Pro každý bod $X \in k$ platí: $|OX| = r$. Bod O i libovolný bod X kružnice k zobrazíme v dané stejnoolehlosti $\mathcal{H}: O \rightarrow O', X \rightarrow X'$. Stejnoolehlost \mathcal{H} je podobností s koeficientem

$|\lambda|$, proto je $|O'X'| = |\lambda| \cdot |OX|$ pro libovolný bod X . Jelikož je $|\lambda| \cdot |OX| = |\lambda| \cdot r$, je tato délka konstantní a bod X' je tedy bodem kružnice, označme ji k' , se středem O' a poloměrem $r' = |\lambda| \cdot r$.

Obráceně, je-li bod Y' bodem kružnice $k'(O'; r')$, potom $|O'Y'| = r' = |\lambda| \cdot r$, a tedy pro vzor Y bodu Y' platí, že leží na kružnici k .

□



Obrázek 10.6: Stejnolehlost dvou soustředných kružnic

Věta 10.5

Jsou-li dány dvě kružnice $k(O, r)$, $k'(O', r')$ s různými poloměry, pak existují právě dvě stejnoolehlosti, které zobrazí kružnici k na kružnici k' .

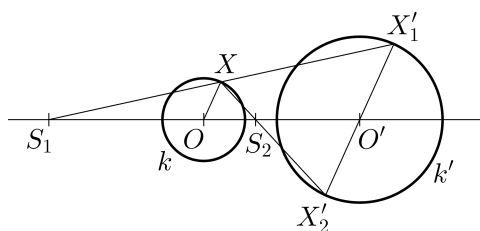
Důkaz:

Zvolme libovolný bod $X \in k$. Potom existují právě dva body X' (označme je X'_1, X'_2) takové, že $X' \in k' \wedge \overline{OX} \parallel \overline{O'X'}$. Nyní je jedna stejnoolehlost zadána dvojicí odpovídajících si úseček $OX, O'X'_1$ a druhá dvojicí úseček $OX, O'X'_2$.

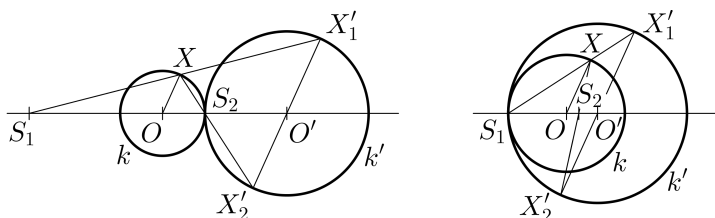
Pokud $O = O'$, pak je bod O středem obou stejnoolehlostí, které se liší pouze znaménkem svých koeficientů (obr. 10.6).

Je-li $O \neq O'$, pak střed S_1 první stejnolehlosti je průsečíkem přímek OO' , XX'_1 ; střed S_2 druhé stejnolehlosti je průsečíkem přímek OO' , XX'_2 . Na obrázcích 10.7, 10.8, 10.9 a 10.10 jsou takto sestrojeny středy S_1 , S_2 obou stejnolehlostí pro jednotlivé vzájemné polohy daných kružnic k , k' .

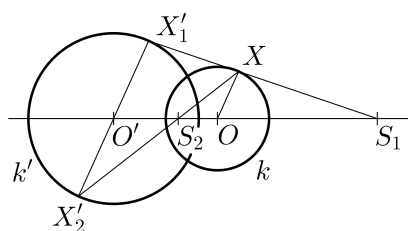
☒



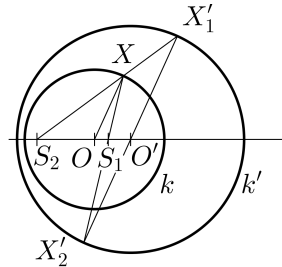
Obrázek 10.7: Stejnolehlost dvou kružnic ležících navzájem vně



Obrázek 10.8: Stejnolehlost dvou kružnic majících vnější či vnitřní dotyk



Obrázek 10.9: Stejnolehlost dvou protínajících se kružnic



Obrázek 10.10: Stejnolehlost dvou kružnic, kdy jedna leží uvnitř druhé

Poznámka:

- Pokud se poloměry r, r' kružnic $k(O, r), k'(O', r')$ rovnají, pak kružnice k' je obrazem kružnice k ve středové souměrnosti a dále v identitě pro $O = O'$, nebo v translaci pro $O \neq O'$.

Větu 10.5 můžeme využít při hledání *společných tečen dvou kružnic* s různými poloměry. Tečna t společná dvěma kružnicím $k(K; r_k), l(L; r_l)$ má totiž s každou z kružnic k, l společný právě jeden bod (označme jej T_k , resp. T_l), přičemž $t \perp \overline{T_k K} \wedge t \perp \overline{T_l L}$. Díky tomu jsou úsečky $T_k K, T_l L$ rovnoběžné a dle věty 10.2 si odpovídají ve stejnolehlosti \mathcal{H} , v níž se jedna z kružnic k, l zobrazuje na druhou. Proto tečna t , která je spojnicí odpovídajících si bodů T_k, T_l , musí procházet středem stejnolehlosti \mathcal{H} . Můžeme tedy sestrojít tečnu/y ze středu/ů stejnolehlosti/í k jedné z kružnic k, l (viz str. 53), neboť tato tečna, resp. tyto tečny, bude/ou zároveň také tečnou/ami druhé kružnice. Dvě kružnice mohou mít společně 4, 3, 2, 1, nebo žádnou tečnu, počet tečen závisí na vzájemné poloze daných kružnic.

10.4 Aplikace stejnolehlosti v důkazech planimetrických vět

V této podkapitole uvedeme důkazy tří již dříve zformulovaných vět, v nichž využijeme podobnost a stejnolehlost.

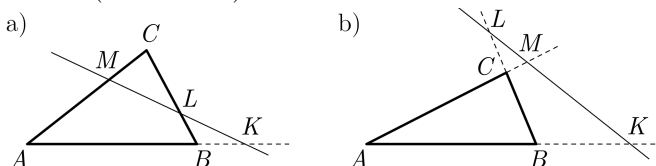
Důkaz věty 2.13, str. 40:

Mějme trojúhelník ABC a na přímkách AB, BC, CA po řadě body K, L, M , které nesplývají s žádným z vrcholů trojúhelníku. Chceme

dokázat, že body K, L, M jsou kolineární právě tehdy, když

$$(ABK) \cdot (BCL) \cdot (CAM) = 1. \quad (10.1)$$

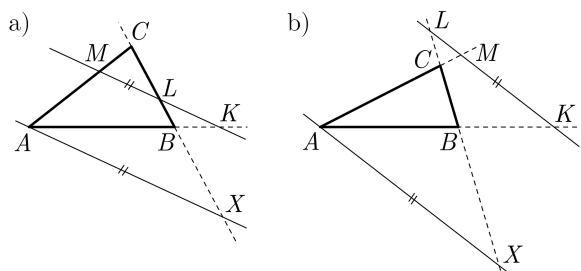
Předpokládejme nejprve, že body K, L, M leží na jedné přímce. Pak zřejmě z těchto bodů patří trojúhelníku buď právě dva, nebo žádný. Pokud přímka protne trojúhelník, budou právě dva z dělicích poměrů ve vztahu (10.1) záporné, jejich součin bude tedy kladný. Pokud přímka trojúhelník neprotne, budou všechny dělicí poměry kladné a rovněž tak i jejich součin. Nechť například body M, L náležejí trojúhelníku (obr. 10.11a), nebo žádný z bodů K, L, M nenáležejí trojúhelníku (obr. 10.11b).



Obrázek 10.11: K důkazu věty 2.13, možné situace

Veďme bodem A rovnoběžku s přímkou KL (obr. 10.12) a označme X její průsečík s přímkou BC . Trojúhelník CAX je obrazem trojúhelníku CML ve stejnolehlosti se středem C , platí tedy

$$\frac{|CM|}{|AM|} = \frac{|CL|}{|XL|}. \quad (10.2)$$



Obrázek 10.12: K důkazu věty 2.13, první část

Ve stejnolehlosti se středem B se úsečka AX zobrazí na úsečku KL , platí tedy

$$\frac{|AK|}{|BK|} = \frac{|XL|}{|BL|}. \quad (10.3)$$

Ze vztahů (10.2) a (10.3) plyne

$$\begin{aligned} & |(ABK) \cdot (BCL) \cdot (CAM)| = \\ &= \frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{|XL|}{|BL|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CL|}{|XL|} = 1. \end{aligned}$$

Předpokládejme nyní, že platí vztah (10.1) a že trojúhelníku ABC náleží buď body M , L , nebo žádný z bodů K , L , M . Pokud by přímka ML byla rovnoběžná s přímkou AB , platilo by, že $(BCL) = (ACM)$. Po dosazení (ACM) za (BCL) do vztahu (10.1) bychom získali $(ABK) = 1$, což nemůže nastat (viz definice dělicího poměru, str. 20). Přímka ML je tedy různoběžná s přímkou AB , označme K' jejich průsečík.

Protože jsou body M , L , K' kolineární, plyne z již dokázané první části věty, že $(ABK') \cdot (BCL) \cdot (CAM) = 1$. Současně však platí vztah (10.1), odtud $(ABK') = (ABK)$, a tedy $K = K'$. Body K , L , M jsou tedy kolineární. \square

Důkaz věty 2.14, str. 40:

Mějme trojúhelník ABC a na přímkách AB , BC , CA po řadě body K , L , M , které nesplývají s žádným z vrcholů trojúhelníku. Chceme dokázat, že přímky CK , AL , BM procházejí jedním bodem nebo jsou navzájem rovnoběžné právě tehdy, když

$$(ABK) \cdot (BCL) \cdot (CAM) = -1. \quad (10.4)$$

Procházejí-li přímky CK , AL , BM jedním bodem (obr. 10.13a) nebo jsou navzájem rovnoběžné (obr. 10.13b), pak zřejmě na stranách trojúhelníku leží vždy jeden nebo tři z bodů K , L , M , součin dělicích poměrů bude tedy záporný.

Procházejí-li dané přímky jedním bodem (označme jej D), pak z Meneláovy věty (věta 2.13, str. 40) pro trojúhelník AKC a přímku BD dostáváme

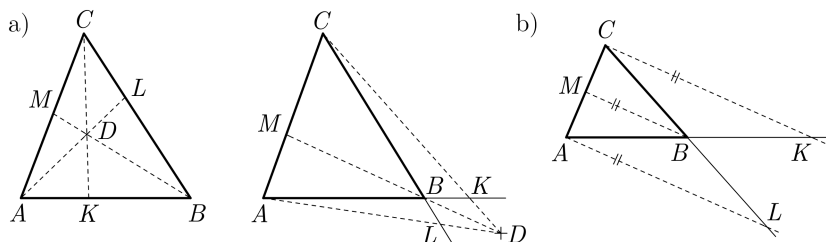
$$|(AKB) \cdot (KCD) \cdot (CAM)| = \frac{|AB|}{|KB|} \cdot \frac{|KD|}{|CD|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1 \quad (10.5)$$

a pro trojúhelník KBC a přímku AL dostáváme

$$|(KBA) \cdot (BCL) \cdot (CKD)| = \frac{|KA|}{|BA|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CD|}{|KD|} = 1. \quad (10.6)$$

Součinem vztahů (10.5) a (10.6) získáme po úpravě

$$\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = |(ABK) \cdot (BCL) \cdot (CAM)| = 1.$$



Obrázek 10.13: K důkazu věty 2.14

Jsou-li přímky AL , BM , CK navzájem rovnoběžné, pak důkaz plyne ze stejnolehlosti trojúhelníků ABM a AKC , popř. CMB a CAL , neboť $\frac{|AC|}{|MC|} = \frac{|AK|}{|BK|}$ a $\frac{|MA|}{|CA|} = \frac{|BL|}{|CL|}$. Odtud získáváme

$$\begin{aligned} |(ABK) \cdot (BCL) \cdot (CAM)| &= \\ &= \frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{|AC|}{|MC|} \cdot \frac{|AM|}{|CA|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1 \end{aligned}$$

Tím je první implikace dokázána.

Předpokládejme nyní, že platí vztah (10.4). Chceme dokázat, že přímky CK , AL , BM jsou buď navzájem rovnoběžné, nebo se protínají v jednom bodě.

Přímky CK , AL , BM tedy mohou být buď rovnoběžné, pak není co dokazovat, nebo jsou alespoň dvě z nich různoběžné. Předpokládejme tedy dále, že například přímky AL , BM jsou různoběžné a protínají se v bodě D . Průsečík přímky CD s přímkou AB označme K' . Podle

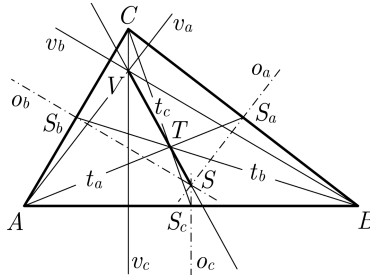
již dokázané implikace víme, že $(ABK') \cdot (BCL) \cdot (CAM) = -1$. Současně však platí vztah (10.4), tedy $(ABK') = (ABK)$, a odtud dostáváme $K = K'$, čili přímky CK , AL , BM procházejí jedním bodem. \square

Důkaz věty 2.18, str. 43:

Chceme dokázat, že těžiště T , ortocentrum V a střed S kružnice opsané libovolného trojúhelníku ABC jsou kolineární a buď splynou, nebo $(SVT) = -\frac{1}{2}$.

Je-li trojúhelník ABC rovnostranný, výšky, těžnice a osy stran splývají, a tedy splynou i body T , V , S .

Mějme trojúhelník ABC , který rovnostranný není. Sestrojíme jeho těžiště T (jako průsečík těžnic t_a , t_b , t_c), ortocentrum V (jako průsečík výšek v_a , v_b , v_c) a střed kružnice opsané S (jako průsečík os o_a , o_b , o_c stran a , b , c).



Obrázek 10.14: K důkazu věty 2.18

Jelikož T dělí (dle věty 2.9, str. 35) každou těžnici v poměru $1 : 2$, trojúhelník ABC se ve stejnolehlosti $\mathcal{H}\left(T; -\frac{1}{2}\right)$ zobrazí na trojúhelník $S_a S_b S_c$, kde S_a , S_b , S_c jsou po řadě středy stran BC , AC , AB (obr. 10.14). Výšky trojúhelníku $S_a S_b S_c$ tedy splývají s osami stran trojúhelníku ABC , proto můžeme říci, že osa o_a je obrazem výšky v_a ve stejnolehlosti $\mathcal{H}\left(T; -\frac{1}{2}\right)$, stejně tak $\mathcal{H}: v_b \rightarrow o_b$, $v_c \rightarrow o_c$, a tedy $\mathcal{H}: V \rightarrow S$. Odtud plyne, že body V a S leží na přímce procházející středem T stejnolehlosti \mathcal{H} (tedy, že body T ,

V, S jsou kolineární) a že $|ST| = \left| -\frac{1}{2} \right| \cdot |VT|$. Jelikož je koeficient stejnolehlosti záporný, leží střed stejnolehlosti T mezi body V a S , proto je $(SVT) = -\frac{1}{2}$. ☒

Mějme trojúhelník ABC , který není rovnostranný. Přímkou procházející těžištěm, ortocentrem a průsečíkem os stran trojúhelníku ABC nazýváme *Eulerovou¹ přímkou*.

10.5 Úlohy

10.1 Je dán čtverec $ABCD$ o straně 4 cm. Sestrojte jeho obraz ve stejnolehlosti

(a) $\mathcal{H}(A, \sqrt{2})$,

(b) $\mathcal{H}(S, -\frac{2}{5})$, kde S je průsečík úhlopříček AC, BD .

10.2 Sestrojte trojúhelník ABC , jestliže

(a) $b : a = 5 : 4, \gamma = 60^\circ, v_c = 5$ cm,

(b) $a : b : c = 7 : 4 : 5, v_b = 4$ cm.

10.3 Užitím stejnolehlosti řešte úlohu 9.14a (str. 174).

10.4 Je dána kružnice $k(S, 3,5$ cm) a bod M , kde $|SM| = 2$ cm. Sestrojte všechny tětiny kružnice k , které procházejí bodem M a jsou jím děleny v poměru 2 : 5.

10.5 Do daného ostroúhlého trojúhelníku ABC vepište čtverec $KLMN$ tak, aby $\overline{KL} \subset \overline{AB} \wedge M \in \overline{BC} \wedge N \in \overline{AC}$.

10.6 Sestrojte společné tečny kružnic $k_1(O_1, r_1), k_2(O_2, r_2)$, jestliže

(a) $|O_1O_2| = 9$ cm, $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 5$ cm,

(b) $|O_1O_2| = 7$ cm, $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 5$ cm,

¹Leonhard Paul Euler (1707–1783) byl švýcarský matematik a fyzik. Je autorem více než 800 odborných prací, pro jeho dílo je typické přesné vyjadřování a přehledná symbolika, která ovlivnila současné matematické značení. Je považován za zakladatele teorie grafů, zavedl dvojrozměrný integrál aj.

(c) $|O_1O_2| = 6 \text{ cm}$, $r_1 = 2 \text{ cm}$, $r_2 = 5 \text{ cm}$,

(d) $|O_1O_2| = 8 \text{ cm}$, $r_1 = 3 \text{ cm}$, $r_2 = 3 \text{ cm}$.

10.7 Řešte Apollóniovu úlohu Bpp v případě, kdy

(a) dané přímky jsou různoběžné a daný bod neleží na žádné z nich ani na ose daných přímek,

(b) dané přímky jsou různoběžné, daný bod leží na ose daných přímek a není to průsečík těchto přímek.

10.8 Jsou dány různoběžky a , b . Jejich průsečík P leží mimo nákresnu (tzv. *nedostupný průsečík*). Dále je dán bod M , který neleží na žádné z přímek a , b . Sestrojte přímku MP .

10.9 Vrchol C trojúhelníku ABC leží mimo nákresnu. Sestrojte střed úsečky AC .

10.10 Je dán konvexní úhel AVB , přičemž vrchol V leží mimo nákresnu. Sestrojte osu úhlu AVB .

10.11 Je dána kružnice $k(O, 2,5 \text{ cm})$, bod P , kde $|OP| = 4 \text{ cm}$, bod A , kde $|OA| = 3 \text{ cm}$ a $|\sphericalangle POA| = 30^\circ$, a přímka p , kde $P \in p \wedge p \perp \leftrightarrow OP$. Sestrojte obdélník $ABCD$ tak, aby $B \in p \wedge D \in k \wedge |AB| = 2|BC|$.

10.12 Je dán trojúhelník ABC . Označme S střed strany BC , P bod ležící na straně AB ve vzdálenosti $\frac{1}{3}|AB|$ od bodu B a Q průsečík přímek PC a AS . Určete poměr obsahů trojúhelníků APQ a ABC .

Kapitola 11

Osová afinita

V této kapitole představíme *osovou afinitu v rovině*, což je zobrazení, které se na středních školách, na rozdíl od předchozích, zpravidla nevyučuje. Osová afinita je v literatuře obvykle nejprve zavedena v prostoru jako zobrazení mezi dvěma různoběžnými rovinami. Osovou afinitu v rovině pak získáme jako rovnoběžný průmět prostorové afinity do roviny.¹ Zde však osovou afinitu zavedeme rovnou jako zobrazení roviny.

11.1 Základní pojmy a vlastnosti

Zobrazení \mathcal{U} roviny, pro něž platí, že bod a a jeho obraz a' leží na přímkce daného směru s , obrazem přímky je přímka a množinou všech samodružných bodů je přímka o , se nazývá *osová afinita v rovině*.

Směr s nazýváme *směrem afinity*, přímkou o nazýváme *osou afinity*.

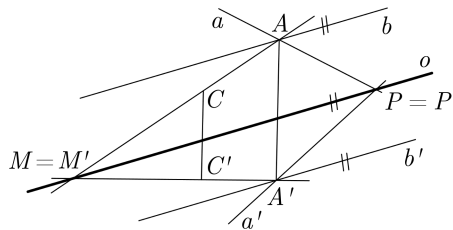
Poznámky:

- Osová afinita v rovině je určena osou o a dvojicí bodů vzor-obraz, z nichž žádný neleží na ose o . Označíme-li vzor A a jeho obraz A' , pak směr přímky AA' je směrem dané afinity. Dvojici odpovídajících si bodů dále zapisujeme $A-A'$.

¹Více viz např. (Pomykalová, 2010).

- ▶ Jedinou silně samodružnou přímkou v osově afinitě v rovině je osa afinity. Přímkou, které náleží směr afinity, jsou slabě samodružné.
- ▶ Osovou afinitu v rovině můžeme přiblížit také jako jakési *zobecnění osové souměrnosti*. Vyjdeme od osové souměrnosti dané osou o a upustíme od požadavku, že obraz A' daného bodu A leží ve stejné vzdálenosti od osy o jako bod A a že $\overline{AA'}$ je kolmá k ose o . Přitom však dále požadujeme, aby body osy o byly samodružné, aby se odpovídající přímkou $p-p'$ protuly na ose o nebo byly s osou o rovnoběžné a aby přímkou spojující vzor a obraz libovolného bodu byly navzájem rovnoběžné. (Všechny tyto vlastnosti má i osová souměrnost.)
- ▶ Poznamenejme, že osová afinita zobrazuje přímkou na přímkou, avšak obecně nezachovává kružnici.

Při konstrukcích obrazů bodů a přímek v osově afinitě vycházíme z výše uvedené definice. Mějme zadanou osovou afinitu \mathcal{A} pomocí osy o a dvojice různých odpovídajících si bodů $A-A'$ (tj. $A \notin o \wedge A' \notin o$). Dále jsou dány (obr. 11.1) přímkou a, b , přičemž $A \in a \wedge a \not\parallel o$, $A \in b \wedge b \parallel o$, a bod C , kde $C \notin a \wedge C \notin b$. Ukážeme, jak sestrojiti obrazy a', b' a C' daných objektů.



Obrázek 11.1: Konstrukce obrazů přímek a bodů v osově afinitě

- (a) Podle definice osové afinity je obrazem přímky přímkou. Přímkou a se tedy zobrazí na přímkou a' . Jelikož $A \in a$, musí $A' \in a'$. Přímkou a protíná osu o v bodě P . Bod P je samodružný, jelikož leží na ose, tedy $P = P'$. Přímkou a' je tedy určena dvěma body $A'P'$.
- (b) Přímkou b se zobrazí na přímkou b' . Jelikož $A \in b$, musí $A' \in b'$. Přímkou b neprotíná osu o , proto ani přímkou b' neprotne osu o (kdyby ano, vznikl by tak na přímce b' bod $Q' \in o$, pro jehož vzor Q by platilo $Q = Q'$, ale na přímce b žádný takový bod neleží). Přímkou b' je tedy rovnoběžkou s přímkou b procházející bodem A' .

- c) Bod C spojíme s bodem A . Přímka AC protíná osu o v samodružném bodě M , tedy $M = M'$. Její obraz je určen body $A'M'$. Na přímce $A'M'$ musí ležet také bod C' a zároveň – podle definice – musí být přímky CC' a AA' rovnoběžné.

Věta 11.1

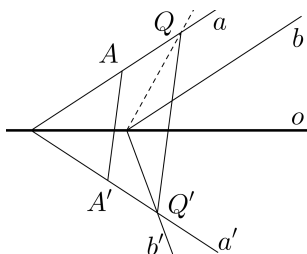
Jsou-li přímky a, b rovnoběžné, jsou jejich obrazy a', b' sestrojené v osově afinitě také rovnoběžné.

Důkaz:

Výše jsme ukázali, že pro $a \parallel o$ je také $a' \parallel o$. Pokud tedy $a \parallel b \parallel o$, je také $a' \parallel b' \parallel o$.

Náleží-li přímky a, b směru afinity, jsou slabě samodružné, tj. $a = a'$, $b = b'$, a proto $a' \parallel b'$.

Předpokládejme dále, že nenastane žádná z výše uvedených možností. Mějme afinitu \mathcal{L} zadanou osou o a dvojicí různých odpovídajících si bodů $A-A'$ (tj. $A \notin o \wedge A' \notin o$) a mějme dány rovnoběžné přímky a, b . Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že obrazy a', b' přímek a, b jsou různoběžné, existuje tedy jejich průsečík, označme jej Q' . Vzor Q bodu Q' musí ležet na přímce a i b , tedy přímky a, b musí být různoběžné (obr. 11.2), což je spor s předpokladem. Proto $a' \parallel b'$. □



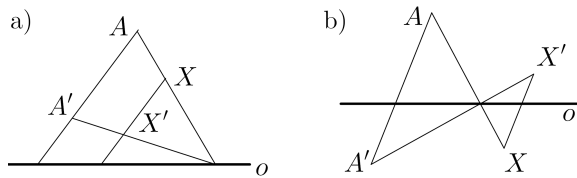
Obrázek 11.2: K důkazu věty 11.1

Poznámky:

- V obrázku 11.3 můžeme nahlédnout, že je-li osová afinita zadána osou o a dvojicí různých odpovídajících si bodů $A-A'$ (tj. $A \notin o \wedge A' \notin o$), a leží-li bod A' v téže polorovině s hraniční přímkou o jako bod A , pak pro

obraz X' libovolného bodu X ($X \notin o$) platí, že $X' \in \overrightarrow{oX}$ (obr. 11.3a). Obdobně, pokud bod A' leží v opačné polorovině k polorovině oA , pak také obraz X' libovolného bodu X ($X \notin o$) leží v polorovině opačné k polorovině oX (obr. 11.3b).

- Ve větě 11.1 jsme dokázali, že osová afinita \mathcal{U} zachovává rovnoběžnost. Kromě toho z definice osově afinity vyplývá, že zachovává také incidenci (tj. pokud $A \in a$, potom $A' \in a'$, kde $\mathcal{U}: A \rightarrow A'$, $a \rightarrow a'$) a lze dokázat, že zachovává dělicí poměr (viz úloha 11.6, str. 196).



Obrázek 11.3: Poloha vzoru a obrazu bodu v osově afinitě vzhledem k polorovinám určeným osou afinity

11.2 Typy osově afinity

Další vlastnosti osově afinity v rovině závisí na tom, jaký konkrétní typ afinity uvažujeme.

Podle směru s osově afinity \mathcal{U} s osou o rozlišujeme tři typy osově afinity v rovině:

- (1) *pravoúhlou afinitu* ($s \perp o$),
- (2) *kosoúhlou afinitu* ($s \not\perp o \wedge s \not\parallel o$),
- (3) *afinní elaci* ($s \parallel o$).

Poznámky:

- V obrázcích 11.1 a 11.2 byla použita kosoúhlá afinita.
- Osová souměrnost je speciálním případem pravoúhlé afinity.

Zobrazení, které zachovává obsahy útvarů, se nazývá *plochojevné* (též *rovno-ploché/stejnoploché/ekvivalentní*).

Poznámka:

- Plochojevným zobrazením je libovolná shodnost.

Věta 11.2

Afinní elace je plochojevným zobrazením.

Důkaz:

Větu stačí dokázat pro trojúhelník, neboť libovolný rovinný útvar lze rozložit na n trojúhelníků (u oblých útvarů uvažujeme limitní přechod $n \rightarrow \infty$).

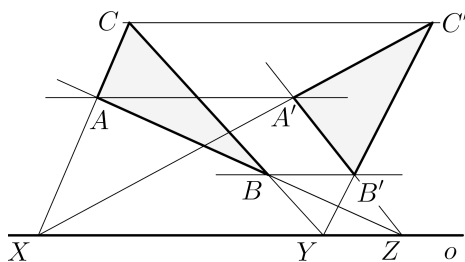
Mějme afinní elaci zadanou osou o a párem různých odpovídajících si bodů $A-A'$ (tj. $A \notin o \wedge A' \notin o$), kde $\longleftrightarrow AA' \parallel o$. Mějme dále libovolný trojúhelník ABC a sestrojme jeho obraz $A'B'C'$. Chceme dokázat, že obsah S_{ABC} trojúhelníku ABC je roven obsahu $S_{A'B'C'}$ trojúhelníku $A'B'C'$ (označení S s dolním indexem nadále analogicky používáme pro obsah trojúhelníku s příslušnými vrcholy).

Označme průsečky osy o s přímkami AC , BC , AB po řadě X , Y , Z (obr. 11.4). Body X , Y , Z jsou samodružné, proto $X \in A'C'$, $Y \in B'C'$ a $Z \in A'B'$. Pro obsah trojúhelníku ABC platí:

$$S_{ABC} = S_{XYC} + S_{YZB} - S_{XZA}.$$

Podobně pro obsah trojúhelníku $A'B'C'$ platí:

$$S_{A'B'C'} = S_{XYC'} + S_{YZB'} - S_{XZA'}.$$



Obrázek 11.4: K důkazu věty 11.2

Jelikož však $o \parallel \longleftrightarrow AA' \parallel \longleftrightarrow BB' \parallel \longleftrightarrow CC'$, mají trojúhelníky XYC , XYC' stejnou základnu XY a k ní příslušnou výšku, proto $S_{XYC} = S_{XYC'}$. Obdobně také $S_{YZB} = S_{YZB'}$ a $S_{XZA} = S_{XZA'}$. Odtud plyne, že $S_{ABC} = S_{A'B'C'}$. \square

Věta 11.3

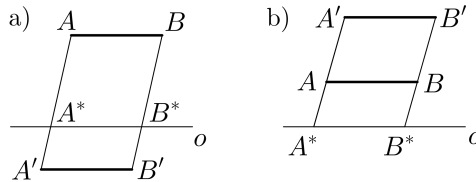
Jsou-li $X \neq X'$ libovolné odpovídající si body v osově afinitě \mathcal{U} , která není elací, a X^* je průsečík přímky XX' s osou afinity o , potom dělicí poměr $(XX'X^*)$ je konstantní, tj. nezávisí na volbě odpovídajících si bodů.

Důkaz:

Mějme osovou afinitu \mathcal{U} zadanou osou o a dvojicí různých odpovídajících si bodů $A-A'$ (tj. $A \notin o \wedge A' \notin o$), kde $\longleftrightarrow AA' \times o$. Označme A^* průsečík přímky AA' s osou o . Chceme ukázat, že pro libovolný bod B , kde $B \neq A \wedge B \notin o$, je $(BB'B^*) = (AA'A^*)$, kde $\mathcal{U}: B \rightarrow B'$, $B^* = \longleftrightarrow BB' \cap o$. Bod B lze volit třemi způsoby:

(a) $\longleftrightarrow AB \parallel o$

Je-li $\longleftrightarrow AB \parallel o$, pak také $\longleftrightarrow A'B' \parallel o$ a $|AA^*| = |BB^*|$ i $|A'A^*| = |B'B^*|$, tedy platí $\frac{|AA^*|}{|A'A^*|} = \frac{|BB^*|}{|B'B^*|}$. Navíc pokud $A^* \in \overline{AA'}$, pak také $B^* \in \overline{BB'}$ (obr. 11.5a) a naopak (obr. 11.5b), tedy $(BB'B^*) = (AA'A^*)$.



Obrázek 11.5: K důkazu věty 11.3, část (a)

(b) $\longleftrightarrow AB \times o \wedge B \notin \longleftrightarrow AA'$

Bůno předpokládáme, že $A^* \in \overline{AA'} \wedge B \in \overrightarrow{oA}$ (ostatní situace bychom dokázali analogicky). Označme P průsečík přímky AB s osou o (obr. 11.6a). Bod P je samodružný, tedy $P \in \longleftrightarrow A'B'$. Ze ZT 4 (str. 17) plyne podobnost trojúhelníků PA^*A , PB^*B (uu), tedy

$$\frac{|AA^*|}{|BB^*|} = \frac{|AP|}{|BP|}. \quad (11.1)$$

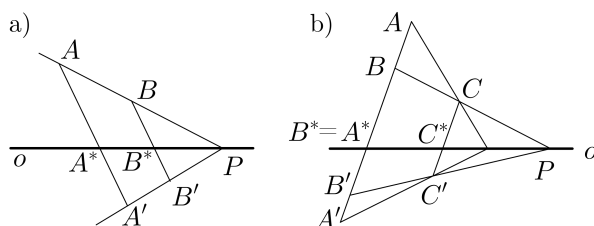
Stejně tak jsou podobné trojúhelníky PA^*A' , PB^*B' , tedy

$$\frac{|A'A^*|}{|B'B^*|} = \frac{|A'P|}{|B'P|}, \quad (11.2)$$

a trojúhelníky $AA'P$, $BB'P$, tedy

$$\frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|A'P|}{|B'P|}. \quad (11.3)$$

Dosazením vztahů (11.1) a (11.2) do vztahu (11.3) získáme $\frac{|AA^*|}{|BB^*|} = \frac{|A'A^*|}{|B'B^*|}$, neboli $\frac{|AA^*|}{|A'A^*|} = \frac{|BB^*|}{|B'B^*|}$. Jelikož jsou body A^* , B^* po řadě vnitřními body $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, je $(BB'B^*) = (AA'A^*)$.



Obrázek 11.6: K důkazu věty 11.3, části (b) a (c)

(c) $B \in \longleftrightarrow AA'$

Búno předpokládejme, že $A^* \in \overline{AA'}$ \wedge $B \in \overline{o\vec{A}}$ (ostatní situace bychom dokázali analogicky). Zvolme libovolně bod $C \in \overline{o\vec{A}}$ takový, že $C \notin \longleftrightarrow AA' \wedge \longleftrightarrow AC \times o \wedge \longleftrightarrow BC \times o$, a označme C' obraz bodu C v dané afinitě a C^* průsečík přímky CC' s osou o (obr. 11.6b). Dle části (b) tohoto důkazu je $(CC'C^*) = (AA'A^*)$ a také $(BB'B^*) = (CC'C^*)$, tedy $(BB'B^*) = (AA'A^*)$. □

Dělicí poměr z věty 11.3 nazýváme *charakteristikou osové afinity* \mathcal{A} .

Věta 11.4

Osová afinita v rovině je involutorním zobrazením právě tehdy, když není elací a její charakteristika je rovna -1 .

Důkaz:

Implikace zleva doprava je přímým důsledkem věty 11.3. Zde dokážeme tedy jen druhou implikaci. Mějme osovou afinitu \mathcal{A} s osou o .

Nechť pro libovolný bod A , jeho obraz A' a průsečík A^* přímky AA' s osou o platí $(AA'A^*) = -1$, tj. bod A^* je středem úsečky AA' . Označme A'' obraz bodu A' v dané afinitě. Bod A'' musí ležet na přímce směru afinity procházející bodem A' , tj. na přímce AA' . Průsečíkem přímky $A'A''$ s osou o je tedy bod A^* a platí, že $(A'A''A^*) = -1$, tedy A^* je středem úsečky $A'A''$, a tím pádem je $A' = A''$, neboli \mathcal{U} je involutorním zobrazením. \square

11.3 Úlohy

- 11.1** Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ o straně 3 cm. Sestrojte jeho obraz v osově afinitě v rovině, jestliže:
- osou afinity je přímka AB a obrazem bodu F je bod C ,
 - osou afinity je přímka AD a obrazem bodu E je bod B ,
 - osou afinity je přímka AB a obrazem středu S úsečky AE je bod D .
- 11.2** Jsou dány čtyři navzájem různoběžné přímky a, a', b, b' . Určete osu a směr afinity, v níž se přímky a, b zobrazí po řadě na přímky a', b' .
- 11.3** Osová afinita v rovině je zadána osou o a dvojicí různých odpovídajících si bodů $A-A'$ (tj. $A \notin o \wedge A' \notin o$). Na přímce AA' zvolte bod X různý od A i od A' a zobrazte jej v dané osově afinitě.
- 11.4** Zvolte libovolnou kružnici k o středu S a bod S' vně kružnice k . Sestrojte obrazy alespoň deseti různých bodů kružnice k v osově afinitě, jestliže S' je obrazem bodu S . Osu afinity volte libovolně tak, aby se jednalo o afinitu (a) pravoúhlou, (b) kosoúhlou. Odhadněte, která křivka bude obrazem kružnice k .
- 11.5** Na přímce p jsou dány dvě disjunktní úsečky KL, MN . Sestrojte čtverec tak, aby jeho prodloužené strany protínaly přímku p v bodech K, L, M, N .
- 11.6** Dokažte, že osová afinita v rovině zachovává dělicí poměr tří kolineárních bodů.

Kapitola 12

Kruhová inverze

V této kapitole představíme *kruhovou inverzi v rovině*, tj. zobrazení, v němž na rozdíl od předchozích obrazem přímky nemusí být přímka. Cílem bude ukázat základní vlastnosti a konstrukce a upozornit na některá využití kruhové inverze v rovinné geometrii.

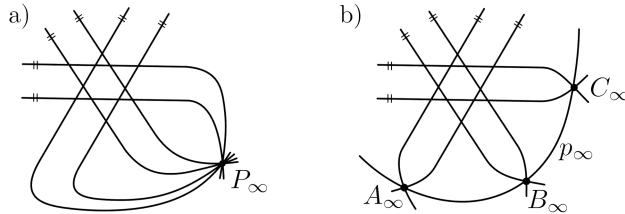
12.1 Základní pojmy a vlastnosti

Möbiovou rovinou M_2 rozumíme Eukleidovskou rovinu E_2 sjednocenou s jedním *nevlastním bodem* P_∞ (tj. „bodem v nekonečnu“), který je vnějším bodem každé kružnice a zároveň jím prochází každá přímka Möbiovy roviny.

Body eukleidovské roviny potom nazýváme *vlastními body*.

Poznámka:

- V geometrii se běžně používají dvě různá rozšíření eukleidovské roviny. Jedním z nich je rozšíření o jeden nevlastní bod na *Möbiovu rovinu* (symbolicky naznačeno na obr. 12.1a), druhým je tzv. *projektivní rozšíření*, kdy každý směr ztotožníme s jedním nevlastním bodem (neboli, všechny přímky daného směru se protínají v jednom nevlastním bodě). Při projektivním rozšíření tedy k eukleidovské rovině přidáváme nekonečně mnoho nevlastních bodů, které dohromady tvoří tzv. *nevlastní přímku* (naznačeno na obr. 12.1b).



Obrázek 12.1: Möbiova rovina a projektivní rozšíření eukleidovské roviny

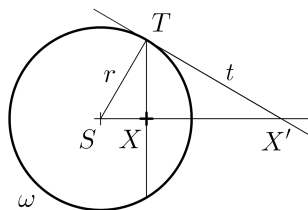
Je dána kružnice $\omega(S, r)$. *Kruhovou inverzí v rovině s tzv. základní kružnicí ω nazýváme zobrazení \mathcal{K} roviny M_2 , které:*

- 1) bodu S přiřadí bod P_∞ ,
- 2) bodu P_∞ přiřadí bod S ,
- 3) bodu X ($X \neq S \wedge X \neq P_\infty$) přiřadí bod X' takový, že $X' \in \iota \rightarrow SX \wedge \wedge |SX'| \cdot |SX| = r^2$.

Podívejme se, jak se v kruhové inverzi v rovině se základní kružnicí $\omega(S, r)$ zobrazí libovolný bod X . Postup závisí na tom, zda $X \in \omega$, či zda je X vnitřním, nebo vnějším bodem kružnice ω .

(a) $X \in \omega$:

V tomto případě je $|SX| = r$, a tedy musí také být $|SX'| = r$. Proto $X = X'$.



Obrázek 12.2: Obraz vnitřního bodu základní kružnice

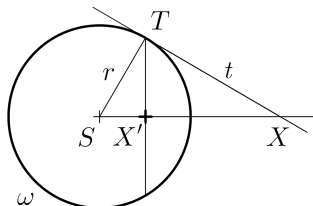
b) X je vnitřním bodem kružnice ω :

Sestrojme tětivu kružnice ω , jejímž středem je bod X (tj. tětivu kolmou k polopřímce SX). Jeden z krajních bodů tětivy označme T a sestrojme

tečnu t kružnice ω v bodě T (obr. 12.2). Bod X' je průsečíkem tečny t s polopřímku SX , neboť $\longleftrightarrow TX$ je výškou na přeponu pravoúhlého trojúhelníku $SX'T$ a podle Eukleidovy věty o odvěsně (viz věta 6.9, str. 104) platí: $r^2 = |SX'| \cdot |SX|$, tedy takto sestrojený bod X' splňuje výše uvedenou definici.

c) X je vnějším bodem kružnice ω :

Sestrojme tečnu t z bodu X ke kružnici ω a označme bod dotyku T . Dále sestrojme tětivu kružnice ω kolmou k polopřímce SX s krajním bodem T (obr. 12.3). Bod X' je průsečíkem této tětivy s polopřímku SX , neboť v pravoúhlém trojúhelníku SXT s výškou TX' na přeponu podle Eukleidovy věty o odvěsně (viz věta 6.9, str. 104) platí: $r^2 = |SX| \cdot |SX'|$, tedy takto sestrojený bod X' splňuje výše uvedenou definici.



Obrázek 12.3: Obraz vnějšiho bodu základní kružnice

Poznámka:

- Z definice kruhové inverze (str. 198) a také z výše popsané konstrukce obrazu bodu v kruhové inverzi se základní kružnicí ω je patrné, že kružnice ω je množinou všech samodružných bodů dané inverze, že vnitřní body kružnice ω se zobrazí vně a obráceně a že kruhová inverze je involutorním zobrazením.

Věta 12.1

Mějme kružnici $\omega(S, r)$ a libovolný bod $X \neq S$. Označme A, B krajní body průměru kružnice ω kolmého k polopřímce SX a M průsečík kružnice ω a spojnice bodu X s libovolným z bodů A, B . Potom obrazem bodu X v kruhové inverzi se základní kružnicí ω je bod X' , který je průsečíkem polopřímky SX s přímkou BM (pro $M = \omega \cap \longleftrightarrow XA$), resp. AM (pro $M = \omega \cap \longleftrightarrow XB$).

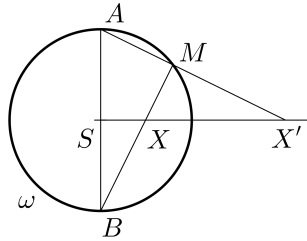
Důkaz:

Je-li $X \in \omega$, potom $X = M = X'$, tedy bod X je samodružný a věta platí.

Dále předpokládejme, že X je vnitřní bod kružnice ω (obr. 12.4) a bod M je buno průsečíkem kružnice ω a přímky BX . Podle věty 3.6 (str. 51) je $|\sphericalangle AMB| = 90^\circ$, neboť AB je průměrem kružnice ω . Trojúhelníky $SX'A$ a MBA jsou oba pravoúhlé a mají společný úhel při vrcholu A , tedy jsou podobné (uu). Stejně tak jsou podobné trojúhelníky SBX a MBA (uu), neboť jsou opět oba pravoúhlé a mají společný úhel při vrcholu B . Z toho plyne podobnost trojúhelníků $SX'A$ a SBX a z poměrů jejich odpovídajících si stran dostáváme

$$\frac{|SX|}{|SA|} = \frac{|SB|}{|SX'|}, \text{ neboli}$$

$$|SX| \cdot |SX'| = |SB| \cdot |SA| = r^2.$$



Obrázek 12.4: K důkazu věty 12.1

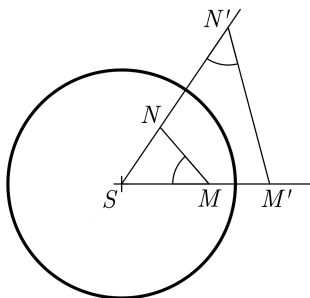
Pro vnější bod X lze provést důkaz obdobně. Označíme-li buno M průsečíkem kružnice ω s přímkou AX , získáme v podstatě obrázek 12.4, pouze se zaměněnými body X a X' . Též můžeme využít část důkazu pro vnitřní bod X a fakt, že kruhová inverze je involutorním zobrazením. ☒

Věta 12.2

Je dána kružnice $\omega(S, r)$ a dva různé body M, N , přičemž $M \neq S, N \neq S, M \neq P_\infty, N \neq P_\infty$. Obrazy bodů M, N v kruhové inverzi se základní kružnicí ω označme M', N' . Potom $|\sphericalangle SMN| = |\sphericalangle SN'M'|$.

Důkaz:

Pro body M, M', N, N' platí, že $r^2 = |SM| \cdot |SM'| = |SN| \cdot |SN'|$. Odtud plyne, že $\frac{|SM|}{|SN'|} = \frac{|SN|}{|SM'|}$. Navíc je $|\sphericalangle MSN| = |\sphericalangle M'SN'|$, z čehož vyplývá, že trojúhelníky $SMN, SN'M'$ jsou podobné (*sus*). Velikosti jejich odpovídajících si vnitřních úhlů jsou tedy shodné, proto $|\sphericalangle SMN| = |\sphericalangle SN'M'|$ (obr. 12.5). ☒



Obrázek 12.5: K důkazu věty 12.2

12.2 Kruhové křivky

V této podkapitole se budeme věnovat obrazům přímek a kružnic v kruhové inverzi v rovině a s tím spojeným vlastnostem těchto objektů.

Přímky a kružnice označujeme společným názvem *kruhové křivky*.

Poznámky:

- ▶ Na bod, resp. přímku, lze nahlížet jako na kružnici s nulovým, resp. nekonečně velkým, poloměrem. Díky tomu je v některých zdrojích za kruhovou křivku považován i bod.
- ▶ Před vyslovením další věty připomeňme, že každá přímka Möbiovy roviny prochází bodem P_∞ . Tímto bodem však neprochází žádná kružnice.

Věta 12.3

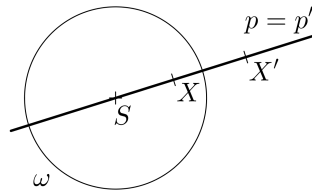
V kruhové inverzi je obrazem kruhové křivky kruhová křivka.

Důkaz:

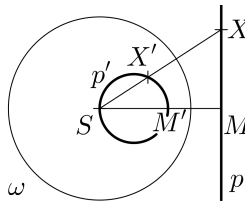
Mějme kruhovou inverzi se základní kružnicí $\omega(S, r)$. Rozlišíme čtyři situace, podle typu zobrazované kruhové křivky a její polohy vzhledem k bodu S :

- (a) Zobrazujeme přímku p procházející bodem S :

Na přímce p leží body S a P_∞ . Obrazem bodu S je bod P_∞ a obráceně (obr. 12.6). Pro každý jiný bod X přímky p platí, že jeho obraz $X' \in \omega$ a zároveň $\omega \subset p$. Obrazem přímky p je tedy přímka $p' = p$.



Obrázek 12.6: K důkazu věty 12.3, část (a)



Obrázek 12.7: K důkazu věty 12.3, část (b)

- (b) Zobrazujeme přímku p neprocházející bodem S :

Na přímce p leží bod P_∞ , jehož obrazem je bod S , tedy $S \in p'$. Označme M patu kolmice z bodu S k přímce p . Obraz M' bodu M leží na ω (obr. 12.7). Pro každý bod $X \in p$, $X \neq$

$\neq M$, a jeho obraz X' dle věty 12.2 platí, že $90^\circ = |\sphericalangle SMX| = |\sphericalangle SX'M'|$, a tedy dle věty 3.6 (str. 51) X' leží na kružnici nad průměrem SM' . Odtud plyne, že obrazem přímky p je kružnice p' s průměrem SM' .

- (c) Zobrazujeme kružnici k procházející bodem S :

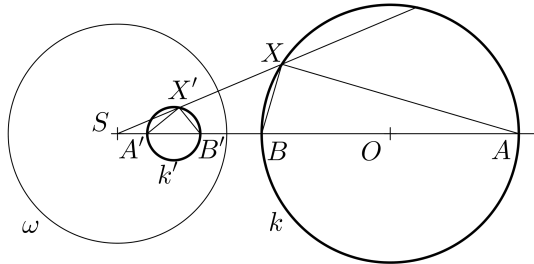
Díky tomu, že kruhová inverze je involutorním zobrazením, plyne z části (b) tohoto důkazu, že obrazem kružnice k je přímka k' (neprocházející bodem S).

- (d) Zobrazujeme kružnici k neprocházející bodem S :

Označme O střed kružnice k a A, B průsečíky přímky SO s kružnicí k . Pro libovolný bod $X \in k$ různý od bodů A, B dle věty 3.6 (str. 51) platí $|\sphericalangle AXB| = 90^\circ$. Obrazy bodů A, B označme A', B' . Pro uspořádání bodů S, A, B mohou nastat dvě situace: buď $A \in \overrightarrow{SB}$, nebo $A \notin \overrightarrow{SB}$. V prvním případě (obr. 12.8) platí, že

$$\begin{aligned} |\sphericalangle AXB| &= \left| |\sphericalangle SXA| - |\sphericalangle SXB| \right| = \\ &= \left| |\sphericalangle SA'X'| - |\sphericalangle SB'X'| \right| = |\sphericalangle A'X'B'|, \end{aligned}$$

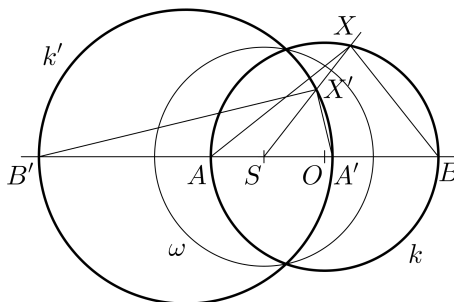
přičemž ve druhé rovnosti jsme aplikovali větu 12.2 a ve třetí větu 2.3 (str. 28).



Obrázek 12.8: K důkazu věty 12.3, část (d), první případ

Ve druhém případě (obr. 12.9) za použití týchž vět platí, že

$$\begin{aligned} |\sphericalangle AXB| &= |\sphericalangle SXA| + |\sphericalangle SXB| = |\sphericalangle SA'X'| + |\sphericalangle SB'X'| = \\ &= 180^\circ - |\sphericalangle A'X'B'|. \end{aligned}$$



Obrázek 12.9: K důkazu věty 12.3, část (d), druhý případ

Jelikož je $|\sphericalangle AXB| = 90^\circ$, v obou případech je také $|\sphericalangle A'X'B'| = 90^\circ$, a tedy bod X' leží (dle věty 3.6, str. 51) na kružnici nad průměrem $A'B'$, neboli obrazem kružnice k je kružnice k' s průměrem $A'B'$.

☒

Poznámky:

- ▶ K části (d) důkazu věty 12.3 poznamenejme, že obraz O' středu O kružnice k není středem kružnice k' (viz úloha 12.4, str. 210).
- ▶ Z části (a) důkazu věty 12.3 vyplývá, že přímky vedené středem kruhové inverze jsou slabě samodružné.
- ▶ Důkaz věty 12.3 poskytuje návod, jak obrazy kruhových křivek v kruhové inverzi konstruovat. Pokud navíc křivka, kterou chceme zobrazit, protíná základní kružnici ω , využijeme toho, že tyto průsečíky jsou samodružné, a tedy leží na obrazu dané křivky.

Zobrazení zachovávající velikosti úhlů nazýváme *konformním zobrazením*.

Poznámka:

- ▶ Z dříve uvedených zobrazení jsou konformními zobrazeními všechny shodnosti a podobnosti. Osová afinita obecně konformním zobrazením není.

Věta 12.4

Kruhová inverze je konformním zobrazením.

Důkaz:

Jelikož se v kruhové inverzi přímky mohou zobrazit na kružnice a obráceně, měli bychom se zabývat odchytkami přímek i kružnic. Připomeňme, že odchytku kružnic jsme na str. 60 definovali jako odchytku jejich tečen ve společném bodě, proto stačí nyní dokázat, že kruhová inverze zachovává odchytku přímek.

Mějme kruhovou inverzi se základní kružnicí $\omega(S, r)$. Uvažujme různoběžné přímky a, b . Chceme dokázat, že jejich odchytky je rovna odchylce jejich obrazů a', b' v dané inverzi. Mohou nastat tři situace:

- (a) Přímky a, b se protínají v bodě S :

Jestliže $S \in a \wedge S \in b$, pak z části (a) důkazu věty 12.3 víme, že $a = a'$ a $b = b'$, tedy odchytky obrazů je rovna odchylce vzorů.

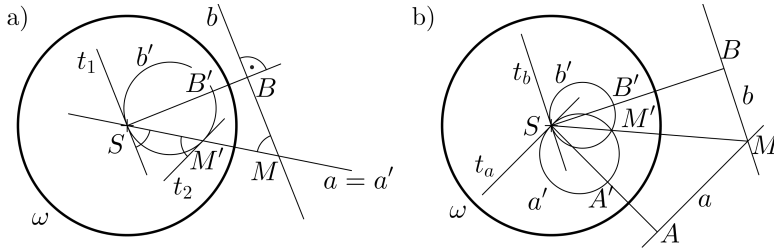
- (b) Právě jedna z přímek a, b prochází bodem S :

Nechť bůno $S \in a$, tedy $a' = a$. Obrazem přímky b je dle části (b) důkazu věty 12.3 kružnice b' s průměrem SB' , kde B' je obraz paty B kolmice vedené z bodu S na přímku b (obr. 12.10a). Průsečík přímek a, b označme M . Obrazy a', b' se protínají v bodech S, M' , přičemž odchytky křivek a', b' je rovna odchylce přímky a' a tečny t_1 kružnice b' v bodě S nebo odchylce přímky a' a tečny t_2 kružnice b' v bodě M' (úhly, které svírají tečny t_1, t_2 s přímkou a' , mají stejnou velikost, neboť oba jsou úsekovými úhly příslušnými téměř oblouku SM' kružnice b' , viz věta 3.9, str. 56).

Tečna t_1 je však kolmá k průmce SB' , neboť SB' je průměrem kružnice b' , a tedy $t_1 \parallel b$. Podle ZT 4 (str. 17) je tedy odchytky přímek a', t_1 rovna odchylce přímek a' (resp. a) a b , a tedy odchytky obrazů je rovna odchylce vzorů.

- (c) Žádná z přímek a, b neprochází bodem S :

Jestliže $S \notin a \wedge S \notin b$, pak a' a b' jsou kružnicemi, které se protínají v bodech S a M' , kde M' je obraz průsečíku M přímek a, b (obr. 12.10b). Dle věty 3.10 (str. 59) nezáleží na tom, zda určíme odchytku kružnic a', b' jako odchytku tečen v bodě S , nebo v bodě M' . Označme A' obraz paty A kolmice



Obrázek 12.10: K důkazu věty 12.4

vedené z bodu S na přímku a a B' obraz paty B kolmice vedené z bodu S na přímku b . Tečna t_a kružnice a' v bodě S musí být kolmá na průměr SA' této kružnice, stejně tak tečna t_b kružnice b' v bodě S musí být kolmá na průměr SB' této kružnice, a tedy $t_a \parallel a$ a $t_b \parallel b$, z čehož opět plyne, že odchylka obrazů je rovna odchylce vzorů.

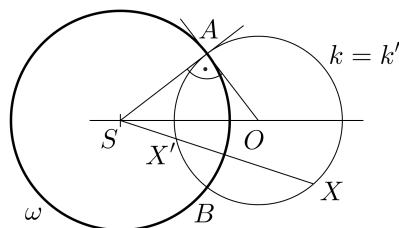
□

Věta 12.5

Je dána kružnice $\omega(S; r)$. Kružnice $k \neq \omega$ je v kruhové inverzi se základní kružnicí ω slabě samodružná právě tehdy, když jsou kružnice k a ω ortogonální.

Důkaz:

Dokažme postupně jednotlivé implikace. Nejprve předpokládejme, že kružnice k , jejíž střed označíme O , je samodružná, tedy $k' = k$. Jelikož se v kruhové inverzi vnitřní body základní kružnice ω zobrazují vně ω a obráceně, musí na kružnici k ležet vnitřní i vnější body kružnice ω , neboli kružnice k a ω se protínají. Označme jejich průsečíky A, B (obr. 12.11). Body A a B jsou samodružné, tedy $A' = A$ a $B' = B$. Dle předpokladu také pro každý bod $X \in k$ různý od A, B platí, že $X' \in k$. Z definice kruhové inverze je $|SX| \cdot |SX'| = r^2$ a $|SA| \cdot |SA'| = |SA|^2 = r^2$. Odtud plyne, že $|SA|^2 = |SX| \cdot |SX'|$, což ale dle vět 3.11 (str. 60) a 3.12 (str. 62) znamená, že přímka SA je tečnou kružnice k v bodě A , a tedy $\longleftrightarrow SA \perp \longleftrightarrow AO$. Jelikož je \overline{SA} poloměrem kružnice ω , je také $\longleftrightarrow AO$ tečnou kružnice ω a kružnice ω a k jsou ortogonální.



Obrázek 12.11: K důkazu věty 12.5

Nyní předpokládejme, že kružnice ω a k se středem O jsou ortogonální. Označme jeden z jejich průsečíků A . Z kolmosti kružnic vyplývá, že $\longleftrightarrow SA \perp \longleftrightarrow AO$, a tedy $\longleftrightarrow SA$ je tečnou kružnice k . Zvolme libovolný nesamodružný bod $X \in k$ a označme jeho obraz v dané inverzi X' . Z definice kruhové inverze platí, že $|SA|^2 = r^2$ a $|SX| \cdot |SX'| = r^2$, tedy $|SA|^2 = |SX| \cdot |SX'|$, což dle vět 3.11 (str. 60) a 3.12 (str. 62) znamená, že bod X' leží na kružnici k , a tedy $k' = k$.

☒

Poznámky:

- ▶ Z vět 12.3 a 12.5 vyplývá, že slabě samodružnými kruhovými křivkami v kruhové inverzi jsou právě ty křivky, které jsou kolmé k základní kružnici dané inverze.
- ▶ Kruhová inverze, na rozdíl od zobrazení uvedených v kapitolách 9, 10 a 11, nezachovává dělicí poměr kolineárních bodů. Dalším příkladem takového zobrazení je třeba *středová kolineace v rovině*.¹
- ▶ Definici kruhové inverze lze rozšířit o tzv. *záporný koeficient*. Uvažujme koeficient λ takový, že $|\lambda| = r^2$. Je-li $\lambda > 0$, potom je definice totožná s tou zde uvedenou (str. 198). Je-li $\lambda < 0$, pak pro obraz X' bodu X platí, že $|SX| \cdot |SX'| = |\lambda|$ a bod X' leží na polopřímce opačné k polopřímce SX . Kruhová inverze s koeficientem $\lambda < 0$ je tedy vlastně zobrazením, které bychom získali složením kruhové inverze s koeficientem $|\lambda|$ a středové souměrnosti.

¹Viz např. (Pomykalová, 2010; Lávička, 2007).

12.3 Aplikace kruhové inverze

Kruhová inverze má v matematice značné využití. Setkáme se s ní například v ne-eukleidovské geometrii, ve stereografické projekci, při řešení složitějších Apollóniových úloh (viz úlohy 12.5 až 12.7, str. 210) i v řadě důkazů, které by bez užití kruhové inverze byly značně komplikované. Zde ukážeme využití kruhové inverze v důkazu Ptolemaiovy věty (věta 4.14, str. 78).

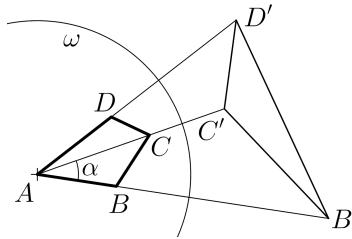
Důkaz věty 4.14, str. 78:

Mějme čtyřúhelník $ABCD$. Chceme dokázat, že

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \geq |AC| \cdot |BD|,$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, je-li čtyřúhelník $ABCD$ tětí-
vový.

Sestrojíme kružnici $\omega(A; r = 1)$ a v kruhové inverzi se základní kruž-
nicí ω zobrazíme body B, C, D na body B', C', D' (obr. 12.12).



Obrázek 12.12: K důkazu věty 4.14

Velikost úhlu BAC označíme α a na trojúhelníky $ABC, AB'C'$ aplikujeme kosinovou větu²:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cdot \cos \alpha, \quad (12.1)$$

$$|B'C'|^2 = |AB'|^2 + |AC'|^2 - 2|AB'| \cdot |AC'| \cdot \cos \alpha. \quad (12.2)$$

Ze vztahů (12.1) a (12.2) vyjádříme $\cos \alpha$ a získané výrazy porovnáme:

$$\frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2|AB| \cdot |AC|} = \frac{|AB'|^2 + |AC'|^2 - |B'C'|^2}{2|AB'| \cdot |AC'|}. \quad (12.3)$$

²Kosinová věta viz např. (Halas, 2016).

Z definice kruhové inverze (str. 198) dále víme, že $|AB| \cdot |AB'| = 1$ a $|AC| \cdot |AC'| = 1$, tedy:

$$|AB'| = \frac{1}{|AB|}, \quad (12.4)$$

$$|AC'| = \frac{1}{|AC|}. \quad (12.5)$$

Vztahy (12.4) a (12.5) dosadíme do pravé strany vztahu (12.3) a po úpravě získáme:

$$|B'C'| = \frac{|BC|}{|AB| \cdot |AC|}. \quad (12.6)$$

Analogicky, vyjdeme-li od dvojice trojúhelníků ACD , $AC'D'$, získáme vztah

$$|C'D'| = \frac{|CD|}{|AC| \cdot |AD|}, \quad (12.7)$$

a pro dvojici trojúhelníků ABD , $AB'D'$ vztah

$$|B'D'| = \frac{|BD|}{|AB| \cdot |AD|}. \quad (12.8)$$

Pro body B' , C' , D' platí, že

$$|B'C'| + |C'D'| \geq |B'D'|, \quad (12.9)$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, leží-li C' na úsečce $B'D'$.

Do vztahu (12.9) dosadíme vyjádření délek úseček $B'C'$, $C'D'$, $B'D'$ ze vztahů (12.6), (12.7) a (12.8), získáme:

$$\frac{|BC|}{|AB| \cdot |AC|} + \frac{|CD|}{|AC| \cdot |AD|} \geq \frac{|BD|}{|AB| \cdot |AD|},$$

což je však ekvivalentní s dokazovaným tvrzením (stačí roznásobit tak, abychom se zbavili zlomků).

Rovnost nastane právě tehdy, jsou-li body B' , C' , D' kolineární. To však nastane v případě, kdy body B , C , D leží na kružnici procházející středem kruhové inverze, tedy bodem A , a to nastane právě tehdy, existuje-li kružnice opsaná čtyřúhelníku $ABCD$, tj. je-li daný čtyřúhelník tětíkový. \square

12.4 Úlohy

12.1 Je dána kružnice $\omega(S, 2 \text{ cm})$ a její tečna t . V kruhové inverzi se základní kružnicí ω sestrojte obraz přímky t .

12.2 Je dána kružnice $\omega(S, 3,5 \text{ cm})$, bod M , kde $|SM| = 3 \text{ cm}$, a kružnice $k(M, 1,5 \text{ cm})$. V kruhové inverzi se základní kružnicí ω sestrojte obraz bodu M a kružnice k .

12.3 Je dán čtverec $ABCD$ o straně 6 cm . Střed strany AB označte S . Zobraďte čtverec $ABCD$ v kruhové inverzi se základní kružnicí $\omega(S, 3 \text{ cm})$.

12.4 Mějme kruhovou inverzi se základní kružnicí $\omega(S, r)$. Dokažte, že bod O' , který je v dané kruhové inverzi obrazem středu O libovolné kružnice k neprocházející bodem S , není středem obrazu k' kružnice k .

12.5 Řešte Apollóniovu úlohu BBk.

12.6 Řešte Apollóniovu úlohu Bkk.

12.7 Řešte Apollóniovu úlohu kkk.

Kapitola 13

Axiomatika planimetrie

Zejména v první a částečně ve druhé kapitole jsme bez důkazů zformulovali několik základních tvrzení (ZT), která jsme využili v důkazech dalších vět. Tato ZT byla vybrána tak, aby jejich platnost byla pro čtenáře pokud možno na základě zkušenosti evidentní a zároveň aby důkazy dalších vět nebyly příliš komplikované. Soubor uvedených ZT však nespĺňuje požadavky na axiomatickou výstavbu geometrie. Cílem této kapitoly je tedy korektní axiomatický přístup k planimetrii nastínit.

13.1 Axiomatický systém

V matematice se běžně setkáváme s pojmy *definice*, *věta*, *důkaz*; v axiomatické výstavbě pracujeme navíc se *základními objekty* a s *axiomy*.

Při budování matematické teorie pracujeme se základními objekty dvojího druhu: s tzv. *primitivními pojmy*, mezi něž patří například čísla, body, přímky apod., a s tzv. *primitivními relacemi*, jimiž jsou například uspořádání čísel, uspořádání bodů aj. *Axiom* je tvrzení pokládané za pravdivé, tj. přijímáme jej bez důkazu. Při axiomatické výstavbě matematické teorie zvolíme nejprve množinu základních objektů a axiomů, přičemž význam základních objektů je dán právě jejich začleněním do axiomů. Na základě axiomů, za pomoci jistého meta-jazyka (zpravidla jazyka množinové matematiky), poté formulujeme další definice a matematické věty. *Definicí* (z latiny: *definito* – ohraničení, vymezení) rozumíme jednoznačné určení významu pojmu. *Věta* je výrokem, jehož pravdivost

je třeba dokázat na základě daných axiomů a již dokázaných jiných vět. Rozlišujeme několik typů *důkazů*; ve středoškolské matematice se setkáme s důkazem přímým, nepřímým, sporem a matematickou indukcí.¹

Systém axiomů musí být *bezesporný*, tzn., že z nich nelze odvodit zároveň tvrzení i jeho negaci. Dále je vhodné, aby soustava axiomů byla *nezávislá*, tj. žádný z axiomů nelze odvodit z ostatních, a *úplná*, tzn., že všechny matematické modely založené na této soustavě axiomů jsou navzájem izomorfní.

Prvním pokusem o axiomatizaci geometrie je dílo *Základy* (řecky *Stoicheia*), které vzniklo okolo roku 300 př. n. l. a jeho autorství je připisováno Eukleidovi z Alexandrie. Přestože Eukleidés nepodal úplný axiomatický popis,² jeho práce je cenným přínosem axiomatické výstavbě geometrie, neboť celou teorii vybudoval právě na systému definic, postulátů³ a axiomů.

13.2 Hilbertův axiomatický systém

Geometrie podle Eukleidových *Základů* byla v Evropě vyučována až do novověku. Přelomem byl jednak objev různých neeukleidovských geometrií (1. pol. 19. století) a také vytvoření nového, precizního, axiomatického systému eukleidovské geometrie, který v roce 1899 publikoval David Hilbert⁴ v díle *Grundlagen der Geometrie*.

Hilbertův axiomatický systém obsahuje 5 skupin axiomů, které nazýváme:

- (1) axiomy incidence (označíme I)
- (2) axiomy uspořádání (označíme U)
- (3) axiomy shodnosti (označíme S)
- (4) axiomy spojitosti (označíme AC)
- (5) axiom rovnoběžnosti (označíme R)

¹Důkazy planimetrických vět uvedené v předchozích kapitolách měly zpravidla charakter přímého důkazu, popřípadě důkazu sporem.

²Viz např. (Lávička, 2007; Halas, 2018).

³*Postulát*, též označovaný jako *předpoklad* či *prvotný úkol*, je v matematice stejně jako axiom přijímán jako pravdivý výrok. Oproti tomu v humanitních vědách bývá jako postulát označována nějaká empiricky ověřená hypotéza, která však nemusí vždy platit.

⁴David Hilbert (1862–1943) byl německý matematik. Bývá označován za největšího geometra po Eukleidovi. V práci *Grundlagen der Geometrie* (1899) se kromě axiomatiky eukleidovské geometrie věnoval především riemannovské neeukleidovské geometrii vícerozměrných zakřivených prostorů. V jiných pracích definoval tzv. Hilbertovy prostory, zabýval se integrálními rovnicemi aj.

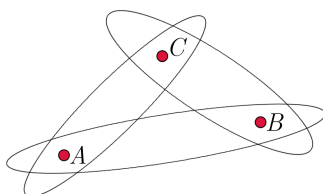
Primitivními pojmy v Hilbertově systému jsou *bod*, *přímka* a *rovina*, primitivními relacemi pak *incidence*, *uspořádání bodů* a *shodnost úseček*, resp. *shodnost úhlů*.

V podkapitolách 13.3 až 13.7 postupně jednotlivé skupiny axiomů představíme⁵ a ukážeme, jak by mohly znít některé definice⁶ a věty včetně jejich důkazů.

13.3 Axiomy incidence

Význam pojmu *incidence* jsme vysvětlili již v podkapitole 1.1. *Axiomů incidence* je celkem osm, pět z nich však souvisí s prostorovou geometrií, proto zde uvedeme pouze tři.

- I-1:** S každými dvěma navzájem různými body inciduje jediná přímka.
- I-2:** S každou přímkou incidují alespoň dva navzájem různé body.
- I-3:** Existují alespoň tři navzájem různé body, které neincidují z žádnou přímkou.



Obrázek 13.1: Model geometrie splňující axiomy incidence

Poznámky:

- ▶ Ve znění axiomů se lze termínu incidence vyhnout, např. axiom I-1 můžeme formulovat: „Dvěma navzájem různými body prochází jediná přímka.“, obdobně lze upravit formulace axiomů I-2 a I-3.
- ▶ Zdůrazněme, že přímky je třeba vnímat jako neuspořádané dvojice bodů, nikoliv jako spojité čáry. V obrázku 13.1 dvojice bodů určujících přímku znázorňujeme pomocí „bublin“.

⁵V různých zdrojích se formulace a pořadí axiomů mírně liší či dokonce některé z Hilbertových axiomů jsou nahrazeny jinými, ekvivalentními axiomy.

⁶Čtenářům doporučujeme definice pojmů uvedené v této kapitole porovnat s definicemi týchž pojmů v předchozích kapitolách.

Dále ukážeme, jak vypadá nejjednodušší model M geometrie splňující axiomy incidence. Podle I-3 existují tři různé body, které neleží na jedné přímce – označme je A, B, C (obr. 13.1). Poté ale dle I-1 musí model M obsahovat přímky AB, AC, BC . Axiom I-2 je splněn. Model M je tedy konečný, obsahuje tři různé body a tři různé přímky.

Pouze na základě axiomů incidence lze definovat například kolineární a nekolineární body či průsečík přímek.

Kolineárními body nazýváme libovolnou n -tici ($n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 3$) bodů, které incidují s jednou přímkou p .

Nekolineárními body nazveme body, které nejsou kolineární.

Poznámka:

- Existenci trojice nekolineárních bodů zajišťuje axiom I-3.

Pokud dvě různé přímky incidují s tímž bodem A , nazýváme bod A *průsečíkem* daných přímek.

Za účelem vytvoření představy, jak lze dále budovat geometrii založenou pouze na axiomech incidence, ukážeme několik triviálních vět včetně důkazů.

Věta 13.1

Dvě různé přímky mají nejvýše jeden průsečík.

Důkaz:

Větu dokážeme sporem. Předpokládejme, že různé přímky a, b mají alespoň dva různé průsečíky P, Q . Podle I-1 body P, Q incidují s jedinou přímkou, tedy přímky a, b musí být totožné, což je ve sporu s předpokladem. ☒

Věta 13.2

Existuje takový bod A a taková přímka p , že bod A neinciduje s přímkou p .

Důkaz:

Větu dokážeme opět sporem. Pokud každý bod inciduje s přímkou p , potom jsou všechny body kolineární, což je ve sporu s axiomem I-3. ☒

Věta 13.3

Ke každému bodu existuje přímka, která s daným bodem není incidentní.

Důkaz:

Označme daný bod A . Podle I-3 existují další dva body B, C takové, že body A, B, C nejsou kolineární. Podle I-1 existuje přímka, která je incidentní s body B, C . Jelikož jsou body A, B, C nekolineární, bod A nemůže být incidentní s přímkou BC . \square

13.4 Axiomy uspořádání

V *axiomech uspořádání* pracujeme s relací *uspořádání bodů*. V dalším textu zápis $X \mu YZ$ čteme „bod X leží mezi body Y, Z “.

- U-1:** Jestliže $B \mu AC$, pak A, B, C jsou tři navzájem různé body incidující s jedinou přímkou a též platí, že $B \mu CA$.
- U-2:** Ze tří navzájem různých bodů incidujících s jedinou přímkou leží nejvýše jeden mezi ostatními dvěma.
- U-3:** Jsou-li body A, B navzájem různé, pak existuje alespoň jeden bod C takový, že $B \mu AC$.
- U-4:** Jsou-li A, B, C tři body, které neincidují s jednou přímkou, a p je přímka roviny ABC , která neinciduje s žádným z bodů A, B, C , ale inciduje s bodem D , kde $D \mu AB$, potom přímka p inciduje s bodem E , kde $E \mu BC$, nebo s bodem F , kde $F \mu AC$, přičemž nastane alespoň jedna z těchto možností.

Poznámka:

- ▶ Axiom U-4 se nazývá *Paschův⁷ axiom*. Tento zdánlivě komplikovaný axiom vlastně říká, že pokud přímka p protíná v bodě D stranu AB trojúhelníku ABC , tak protíná také alespoň jednu ze stran BC, AC .

Na základě axiomů incidence a uspořádání a několika dalších vět z nich vyvozených lze definovat například úsečku, polopřímku, polorovinu, úhel aj.

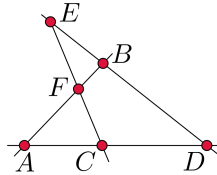
⁷Moritz Pasch (1843–1930) byl německý matematik. Jako první se v díle *Vorlesungen über neuere Geometrie* (1882) pokusil sestavit úplný soubor axiomů eukleidovské geometrie.

Věta 13.4

Mezi každými dvěma různými body existuje alespoň jeden další bod.

Důkaz:

Označme dané různé body A a B . Dle I-3 (str. 213) existuje bod C , který není incidentní s přímkou AB . Dále dle U-3 existuje bod D takový, že $C \mu AD$, a bod E takový, že $B \mu DE$ (obr. 13.2). Body C, E jsou různé, neboť podle U-1 je bod C incidentní s přímkou AD a bod E je incidentní s přímkou BD , přímky AD, BD jsou různé a mají společný bod D , a tedy dle věty 13.1 již nemohou mít jiný společný bod.



Obrázek 13.2: K důkazu věty 13.4

Nyní body A, B, D a přímka CE splňují předpoklady U-4, tedy přímka CE inciduje s bodem $F \mu AB$ nebo s bodem $G \mu BD$. Průsečíkem přímek CE, BD je však bod E a víme, že $B \mu DE$, tedy na přímce CE nemůže existovat bod G takový, že $G \mu BD$. Neboli, existuje bod $F \mu AB$. ☒

Nechť A, B jsou navzájem různé body. *Úsečkou* AB nazýváme množinu bodů $\{A, B\} \cup \{X; X \mu AB\}$. Označíme ji \overline{AB} . Body ležící mezi body A, B nazýváme *vnitřními body úsečky* AB .

Poznámka:

- Z věty 13.4 vyplývá, že každá úsečka má alespoň jeden vnitřní bod, nikoliv však, že jich má nekonečně mnoho, neboť jsme zatím nedokázali, že je-li bod F vnitřním bodem úsečky AB , potom bod M , kde $M \mu AF$ je také bodem úsečky AB .

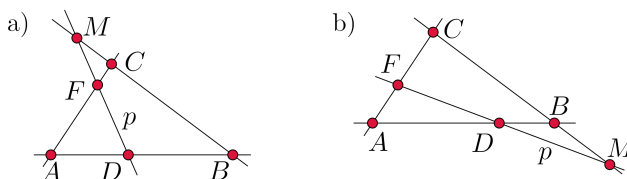
Věta 13.5 (*Paschova věta*)

Jsou-li A, B, C tři body, které neincidují s jednou přímkou, a p je přímka roviny ABC , která neinciduje s žádným z bodů A, B, C , ale inciduje s bodem D , kde $D \mu AB$, potom přímka p inciduje buď s bodem E , kde $E \mu BC$, nebo s bodem F , kde $F \mu AC$.

Důkaz:

Nechť na přímce p leží buď bod F takový, že $F \mu AC$. Chceme dokázat, že na přímce p neleží bod, který by byl mezi body B, C .

Dle věty 13.1 přímka p s přímkou BC buď nemá žádný společný bod (a věta tedy platí), nebo tyto přímky mají právě jeden společný bod, označme jej M . Nejprve sporem ukážeme, že bod M nemůže ležet mezi body D, F . Předpokládejme, že $M \mu DF$. Podle U-4 pak pro body A, D, F a přímku BC platí, že $C \mu AF$ nebo $B \mu AD$, obě tyto situace jsou však ve sporu s předpoklady.



Obrázek 13.3: K důkazu věty 13.5

Pokud $F \mu DM$ (obr. 13.3a), potom dle U-4 pro body B, D, M a přímku AC platí, že $C \mu BM$ nebo $A \mu BD$. Druhá možnost však odporuje předpokladu, neboť $D \mu AB$, a tedy $C \mu BM$.

Pokud $D \mu FM$ (obr. 13.3b), potom dle U-4 pro body F, C, M a přímku AB platí, že $A \mu CF$ nebo $B \mu CM$. První možnost však odporuje předpokladu, že $F \mu AC$, a tedy $B \mu CM$.

Jiná možnost nastat nemůže, zjistili jsme tedy, že buď $C \mu BM$, nebo $B \mu CM$, avšak nenastane situace, že by $M \mu BC$. \square

Poznámka:

- Porovnáme-li Paschův axiom (U-4, str. 215) a Paschovu větu, vidíme, že zatímco axiom připouští existenci bodů E a F zároveň, věta říká, že z bodů

E, F existuje právě jeden. Obdobně lze dokázat silnější tvrzení podobné axiomu U-2 (viz úloha 13.4, str. 233).

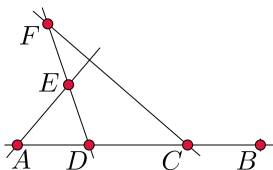
Věta 13.6

Mějme body A, B, C, D . Jestliže $C \mu AB \wedge D \mu AC$, potom body A, B, C, D jsou navzájem různé a $C \mu BD \wedge D \mu AB$.

Důkaz:

Jelikož $C \mu AB$, jsou dle U-1 body A, B, C navzájem různé, stejně tak jsou navzájem různé body A, C, D . Je třeba ještě ověřit, že jsou také různé body B a D , což ukážeme sporem. Předpokládejme, že $B = D$. Potom z předpokladu věty vyplývá, že $C \mu AB \wedge B \mu AC$, což je však ve sporu s U-2. Body A, B, C, D jsou tedy navzájem různé. Zbývá dokázat, že $C \mu BD$ a $D \mu AB$.

Nejprve dokážeme, že $C \mu BD$ (obr. 13.4). Dle I-3 (str. 213) existuje bod E , který není incidentní s přímkou AB , a dle U-3 existuje bod F takový, že $E \mu DF$ a zároveň F není incidentní s přímkou AB , neboť přímky AB, DE jsou různé a mají společný bod D (viz věta 13.1). Z obdobných důvodů nejsou s přímkou CF incidentní body A, E a D . Pomocí U-4, resp. věty 13.5, sporem ukážeme, že na přímce CF neleží bod, který by byl mezi libovolnými dvěma z bodů A, E, D . Předpokládejme, že na přímce CF leží bod X takový, že $X \mu AE$. Potom ale musí na přímce CF existovat bod, který je mezi body A, D , nebo mezi body D, E . Přímky CF a AD mají společný pouze bod C a ten dle předpokladu není mezi body A, D (neboť je $D \mu AC$). Přímky CF a DE mají společný pouze bod F a ten byl sestrojen tak, že není mezi body E, D (neboť je $E \mu DF$). Tedy na přímce CF nemůže existovat ani bod X mezi body A, E .



Obrázek 13.4: K důkazu věty 13.6, bod C

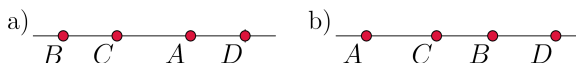
Nyní můžeme aplikovat U-4 na body A, B, E a přímku CF . Víme, že bod C je mezi body A, B a výše jsme ukázali, že žádný bod přím-

ky CF není mezi body A, E , tedy musí existovat bod G incidentní s přímkou CF takový, že $G \mu BE$.

Dále aplikujeme U-4 na body D, B, E a přímku CF . Víme, že existuje bod G přímky CF , který leží mezi body B, E , a že přímky CF, DE mají společný pouze bod F , který není mezi body D, E . Proto musí existovat bod incidentní s přímkou CF a zároveň ležící mezi body B, D (tedy dle U-1 je tento bod incidentní také s přímkou BD). S přímkami CF a BD je incidentní jediný bod – bod C , a tedy $C \mu BD$.

Nyní využijeme předchozí část důkazu k dokázání toho, že také $D \mu AB$. Z úlohy 13.4 (str. 233) vyplývá, že stačí ukázat, že bod A neleží mezi body B, D , ani že bod B neleží mezi body A, D . Obojí dokážeme sporem.

Předpokládejme nejprve, že $A \mu BD$. Dále z předpokladu dokazovaného tvrzení víme, že $C \mu AB$, což lze dle U-1 přepsat i tak, že $C \mu BA$ (obr. 13.5a). Z výše dokázané části a z toho, že $A \mu BD \wedge C \mu BA$ plyne, že $A \mu DC$, což je ve sporu s dalším předpokladem, že $D \mu AC$. Tedy A neleží mezi body B, D .



Obrázek 13.5: K důkazu věty 13.6, bod D

Předpokládejme dále, že $B \mu AD$. Dále z předpokladu dokazovaného tvrzení víme, že $C \mu AB$ (obr. 13.5b). Z výše dokázané části a z toho, že $B \mu AD \wedge C \mu AB$ plyne, že $B \mu DC$, což je ve sporu s první dokázanou částí, tedy že $C \mu BD$. Neboli, B neleží mezi body A, D .

☒

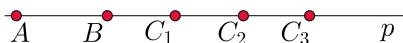
Věta 13.7

Na každé přímce leží nekonečně mnoho bodů.

Důkaz:

Mějme přímku AB . Dle U-3 existuje bod C_1 takový, že $B \mu AC_1$ a dle U-1 jsou body A, B, C_1 incidentní s přímkou p a navzájem různé. Dle U-3 však také existuje bod C_2 takový, že $C_1 \mu AC_2$

a z věty 13.6 vyplývá, že body A, B, C_1, C_2 jsou navzájem různé a že $B \mu AC_2$. Dle U-3 dále existuje bod C_3 takový, že $C_2 \mu AC_3$. Jelikož je $B \mu AC_2 \wedge C_1 \mu AC_2$, je dle věty 13.6 také $B \mu AC_3 \wedge C_1 \mu AC_3$ a body A, B, C_1, C_2, C_3 jsou navzájem různé (obr. 13.6).



Obrázek 13.6: K důkazu věty 13.7

Nyní využijeme princip matematické indukce. Sestrojíme-li dále postupně body $C_4, C_5, \dots, C_{n-1}, C_n, \dots$ tak, že $C_{n-1} \mu AC_n$, kde $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4$, a předpokládáme-li, že body $A, B, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ jsou navzájem různé, pak z věty 13.6 plyne, že také body $A, B, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C_n$ jsou navzájem různé. Na přímce AB tedy leží nekonečně mnoho bodů.

☒

Poznámky:

- V důkazu věty 13.7 jsme ukázali, že na každé přímce existuje nekonečně, avšak spočetně mnoho bodů. Z toho vyplývá, že model geometrie, v němž platí axiomy uspořádání, nemůže být konečný.
- Pomocí věty 13.6 lze také dokázat, že na každé úsečce leží nekonečně mnoho bodů (viz úloha 13.6, str. 234).

Nechť A, B jsou navzájem různé body. *Polopřímku* AB nazýváme množinu bodů $\overline{AB} \cup \{X; B \mu AX\}$. Označíme ji $\rightarrow AB$. Bod A nazýváme *počátkem* polopřímky AB (obr. 13.7).

Mějme přímku procházející dvěma různými body A, B a bod C takový, že $B \mu AC$. Potom polopřímka BA je *opačnou polopřímku* k polopřímce BC a polopřímka BC je *opačnou polopřímku* k polopřímce BA .



Obrázek 13.7: Polopřímka AB

Nechť p je přímka a A bod, který s ní neinciduje. *Polorovinou* pA nazýváme množinu bodů X roviny obsahující přímku p a bod A takových, že mezi body A, X neleží žádný bod přímky p . Označíme ji \overrightarrow{pA} . Přímku p nazýváme *hraniční přímkou* poloroviny pA .

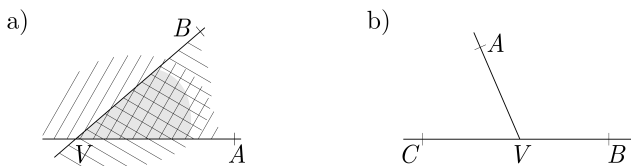
Poznámky:

- Z vět v úlohách 13.7 a 13.8 (str. 234) dále vyplývá, že přímka dělí rovinu na dvě poloroviny, které mají společnou právě danou přímku.
- Analogicky jako jsme definovali opačnou polopřímku k dané polopřímce můžeme též definovat *opačnou polorovinu* k dané polorovině.

Nechť AVB jsou tři nekolineární body. Označme a přímkou AV a b přímkou BV . *Dutým úhlem* AVB nazýváme průnik polorovin aB a bA . Označíme jej $\sphericalangle AVB$. Polopřímky VA, VB nazýváme *rameny úhlu* AVB , bod V nazýváme *vrcholem úhlu* AVB (obr. 13.8a).

Dva duté úhly AVB, AVC , jejichž ramena VB, VC jsou navzájem opačnými polopřímkami, se nazývají *vedlejší* (obr. 13.8b).

Dva duté úhly AVB, CVD , kde dvojice polopřímek VA, VC a VB, VD jsou navzájem opačnými polopřímkami, se nazývají *vrcholové*.



Obrázek 13.8: Dutý úhel, vedlejší úhly

Mějme tři nekolineární body A, B, C . Označme a, b, c po řadě přímkou BC, AC a AB . *Trojúhelníkem* ABC rozumíme průnik polorovin aA, bB, cC . Duté úhly ABC, BCA, CAB nazýváme *vnitřními úhly* trojúhelníku ABC , úhly k nim vedlejší nazýváme *vnějšními úhly* trojúhelníku ABC .

Uvedenými větami a definicemi jsme zdaleka nevyčerpali možnosti dané axiomy incidence a uspořádání, na to zde ani nemáme prostor. Cílem bylo představit, jak je možné na základě předložených axiomů celou teorii budovat. Mohli bychom postupovat dále, dokázat další věty a definovat například další druhy úhlů, rovinný pás aj. Některé z těchto vět a definic jsou součástí úloh v závěru kapitoly.

13.5 Axiomy shodnosti

V *axiomech shodnosti* používáme primitivní relace *shodnost úseček* a *shodnost úhlů*. Jsou-li úsečky AB , CD shodné, píšeme pro zjednodušení $\overline{AB} \simeq \overline{CD}$, obdobný zápis používáme pro shodné úhly. Zdůrazněme, že se zatím nezabýváme velikostí úseček, resp. vzdáleností bodů, či velikostí úhlů.

S-1: Necht' je AB úsečka a CD polopřímka. Potom s polopřímkou CD inciduje jediný bod E takový, že $\overline{AB} \simeq \overline{CE}$.

S-2: Jestliže $\overline{AB} \simeq \overline{CD}$ a $\overline{CD} \simeq \overline{EF}$, potom $\overline{AB} \simeq \overline{EF}$. Navíc je $\overline{AB} \simeq \overline{BA}$.

S-3: Jestliže $C \mu AB$ a $C' \mu A'B'$, přičemž $\overline{AC} \simeq \overline{A'C'}$ a $\overline{BC} \simeq \overline{B'C'}$, potom $\overline{AB} \simeq \overline{A'B'}$.

S-4: Je dán úhel ABC a trojice nekolineárních bodů A' , B' , M . Označme p' přímkou $A'B'$. Potom v polorovině $p'M$ existuje jediná polopřímka $B'C'$ taková, že $\sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle A'B'C'$.

S-5: Jestliže $\sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle KLM$ a $\sphericalangle KLM \simeq \sphericalangle PQR$, potom $\sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle PQR$. Navíc každý úhel je shodný sám se sebou.

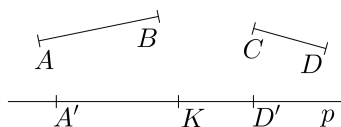
S-6: Mějme dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$. Jestliže $\overline{AB} \simeq \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \simeq \overline{A'C'}$ a $\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle B'A'C'$, potom je také $\overline{BC} \simeq \overline{B'C'}$, $\sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle A'B'C'$ a $\sphericalangle ACB \simeq \sphericalangle A'C'B'$.

Poznámky:

- ▶ Axiomy S-2 a S-5 poukazují na to, že relace shodnost úseček, resp. shodnost úhlů, jsou tranzitivní.
- ▶ Axiomu S-3 se někdy říká *sčítací axiom*. Spolu s axiomem S-1 totiž umožňuje definovat grafické sčítání úseček (viz dále).

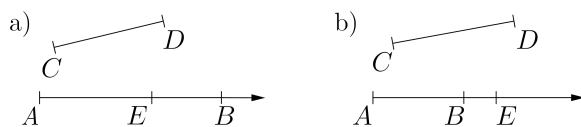
Kromě sčítání úseček lze na základě axiomů incidence, uspořádání a shodnosti definovat například střed úsečky, osu úhlu, rovnoramenný trojúhelník, pravý úhel, kolmost přímek aj. Můžeme také zavést porovnání úseček (tj. význam zápisu $\overline{AB} < \overline{CD}$, ale opět ne ve smyslu porovnání jejich délek) či úhlů nebo dokázat věty o shodnosti trojúhelníků vyslovené v podkapitole 2.2 jako ZT aj. Některé z těchto definic zde spolu s větami potřebnými k jejich vyslovení uvedeme, další ponecháváme jako úlohy na konci této kapitoly.

Nechť jsou dány dvě libovolné úsečky AB a CD a přímka p . Na přímce p zvolme bod K a sestrojme bod A' incidentní s přímkou p tak, že $\overline{AB} \simeq \overline{KA'}$. Poté na polopřímce opačné k polopřímce KA' sestrojme bod D' tak, že $\overline{CD} \simeq \overline{KD'}$. Úsečku $A'D'$ nazveme *součtem úseček* AB a CD (obr. 13.9).



Obrázek 13.9: Součet úseček

Nechť jsou dány dvě libovolné úsečky AB a CD , které nejsou shodné, a necht' bod E je incidentní s polopřímkou AB , přičemž $\overline{AE} \simeq \overline{CD}$. Leží-li $E \mu AB$, řekneme, že úsečka CD je *menší než* úsečka AB a píšeme $\overline{CD} < \overline{AB}$ nebo $\overline{AB} > \overline{CD}$ (obr. 13.10a). Leží-li $B \mu AE$, řekneme, že úsečka CD je *větší než* úsečka AB a píšeme $\overline{CD} > \overline{AB}$ nebo $\overline{AB} < \overline{CD}$ (obr. 13.10b).



Obrázek 13.10: Porovnání úseček

Poznámka:

- ▶ Nyní lze analogicky jako součet definovat *rozdíl úseček*, jen je třeba vždy odčítat menší úsečku od větší.

- Na základě dosud uvedených axiomů lze zavést také porovnání úhlů. Jsou-li dány dva duté úhly AVB , KLM , které nejsou shodné, sestrojíme polopřímku LA' tak, aby bod A' ležel v téže polorovině s hraniční přímkou LM , jako bod K , a následně zkoumáme, zda je bod A' bodem úhlu KLM (potom $\sphericalangle AVB < \sphericalangle KLM$), či nikoliv (potom $\sphericalangle AVB > \sphericalangle KLM$).

Dva trojúhelníky nazýváme *shodné*, jestliže existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi jejich vrcholy taková, že odpovídající si strany a úhly jsou shodné.

Věta 13.8 (*sus*)

Mějme trojúhelníky ABC , KLM . Jestliže je $\overline{AB} \simeq \overline{KL}$, $\overline{BC} \simeq \overline{LM}$ a $\sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle KLM$, pak jsou trojúhelníky ABC , KLM shodné.

Důkaz:

Věta je přímým důsledkem definice shodných trojúhelníků a axiomu S-6.

☒

Věta 13.9

Jestliže v trojúhelníku ABC platí, že $\overline{AC} \simeq \overline{BC}$, potom je $\sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle BAC$.

Důkaz:

Podle věty 13.8 je trojúhelník ABC shodný s trojúhelníkem BAC , neboť $\overline{AC} \simeq \overline{BC}$, $\overline{BC} \simeq \overline{AC}$ a díky komutativitě průniku⁸ také $\sphericalangle ACB \simeq \sphericalangle BCA$. Dle S-6 je tedy $\sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle BAC$.

☒

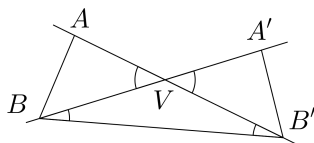
Věta 13.10

Vrcholové úhly jsou shodné.

Důkaz:

Mějme dutý úhel AVB . Sestrojme bod A' na polopřímce opačné k polopřímce VB tak, že $\overline{VA'} \simeq \overline{VA}$, a bod B' na polopřímce opačné k polopřímce VA tak, že $\overline{VB'} \simeq \overline{VB}$ (obr. 13.11). Úhly AVB , $A'VB'$ jsou vrcholové, chceme ukázat, že $\sphericalangle AVB \simeq \sphericalangle A'VB'$.

⁸Označme a přímkou AC a b přímkou BC . Potom $\sphericalangle ACB \simeq \overrightarrow{a} \cap \overrightarrow{b} \simeq \overrightarrow{b} \cap \overrightarrow{a} \simeq \sphericalangle BCA$.



Obrázek 13.11: K důkazu věty 13.10

Z definice dutého úhlu plyne, že body $BB'V$ nejsou kolineární, tedy existuje trojúhelník $BB'V$. Dle věty 13.9 je $\sphericalangle VBB' \simeq \sphericalangle VB'B$. Body A, V, B' jsou kolineární a $V \mu AB'$, proto $\sphericalangle AB'B \simeq \sphericalangle VB'B$. Analogicky je také $\sphericalangle A'BB' \simeq \sphericalangle VBB'$, a tedy $\sphericalangle AB'B \simeq \sphericalangle A'BB'$. Dle S-3 je $\overline{AB'} \simeq \overline{A'B}$ a dle S-2 je $\overline{BB'} \simeq \overline{B'B}$. Pro trojúhelníky $AB'B, A'BB'$ tedy platí věta 13.8 (*usu*), a proto je $\overline{AB} \simeq \overline{A'B'}$ a $\sphericalangle B'AB \simeq \sphericalangle BA'B'$. To však znamená, že věta 13.8 platí také pro trojúhelníky AVB a $A'VB'$, a tedy $\sphericalangle AVB \simeq \sphericalangle A'VB'$. \square

Věta 13.11 (*usu*)

Mějme trojúhelníky ABC, KLM . Jestliže je $\overline{AB} \simeq \overline{KL}$, $\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle LKM$ a $\sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle KLM$, pak jsou trojúhelníky ABC, KLM shodné.

Důkaz:

Stačí dokázat, že $\overline{AC} \simeq \overline{KM}$, poté již shodnost daných trojúhelníků plyne z věty 13.8. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že úsečky AC, KM shodné nejsou. Potom na polopřímce KM existuje bod N různý od bodu M takový, že $\overline{KN} \simeq \overline{AC}$ a bod N leží v téže polorovině s hraniční přímkou KL jako bod M . Podle věty 13.8 jsou trojúhelníky ABC, KLN shodné, tj. $\sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle KLN$. Z předpokladu věty je však také $\sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle KLM$, tedy body L, M, N jsou kolineární, což je však spor s tím, že jsou také kolineární body K, N, M a bod L není incidentní s přímkou KM . \square

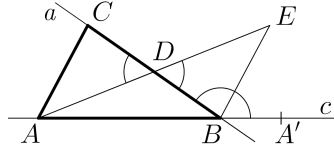
Věta 13.12 (*o vnějším úhlu trojúhelníku*)

Vnější úhel trojúhelníku je větší než kterýkoliv vnitřní, který s ním není vedlejší.

Důkaz:

Mějme trojúhelník ABC . Na přímce AB existuje bod A' takový, že $B \mu AA'$. Chceme ukázat, že vnější úhel CBA' trojúhelníku ABC je větší než jeho vnitřní úhel ACB i vnitřní úhel CAB .

Označme D střed úsečky BC a sestrojme bod E tak, že D je střed AE (viz úloha 13.12, str. 234). Úhly ADC , EDB jsou vrcholové, a tedy dle věty 13.10 shodné, a navíc je $\overline{DC} \simeq \overline{DB}$ a $\overline{DA} \simeq \overline{DE}$ (obr. 13.12). Trojúhelníky ADC , EDB jsou tedy dle věty 13.8 shodné, a proto je $\sphericalangle ACD \simeq \sphericalangle EBD$.



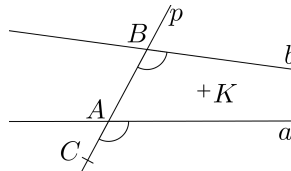
Obrázek 13.12: K důkazu věty 13.12

Označme c přímkou AB a a přímkou BC . Bod E leží v polorovině cC a zároveň také v polorovině aA' , není však incidentní s žádnou z přímkou a , c . Z toho plyne, že E je vnitřním bodem úhlu CBA' , a tedy $\sphericalangle CBE < \sphericalangle CBA'$. Zároveň je $\sphericalangle CBE \simeq \sphericalangle DBE \simeq \sphericalangle ACD \simeq \sphericalangle ACB$, tedy $\sphericalangle ACB < \sphericalangle CBA'$.

Obdobně bychom dokázali nerovnost $\sphericalangle BAC < \sphericalangle CBA'$, stačí si uvědomit, že $\sphericalangle CBA' \simeq \sphericalangle ABC'$, kde $B \mu CC'$. \square

Mějme v rovině přímky $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Přímkou p různou od každé z přímkou a_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) a zároveň mající s každou z těchto přímkou společný bod nazýváme *příčkou* přímkou a_1, a_2, \dots, a_n .

Mějme v rovině různé přímky a, b a jejich příčku p . Označme A průsečík přímkou a, p a B průsečík přímkou b, p . Dále sestrojme libovolný bod C takový, že $A \mu BC \vee B \mu AC$ a libovolný bod K , který není incidentní s přímkou p (obr. 13.13). Dvojici úhlů $\overrightarrow{aC} \cap \overrightarrow{pK}$, $\overrightarrow{bC} \cap \overrightarrow{pK}$ nazveme *souhlasnými úhly*.



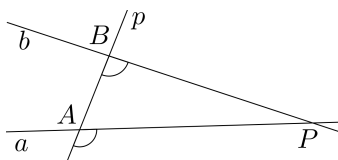
Obrázek 13.13: Souhlasné úhly

Věta 13.13 (*o souhlasných úhlech*)

Mějme různé přímky a , b a jejich příčku p . Jestliže přímky a , b spolu s přímkou p vytvářejí dvojici shodných souhlasných úhlů, potom přímky a , b nemají žádný společný bod.

Důkaz:

Větu dokážeme sporem. Předpokládejme, že souhlasné úhly jsou shodné a zároveň přímky a , b mají průsečík P . Existuje tedy trojúhelník ABP , kde $A = a \cap p$, $B = b \cap p$ (obr. 13.14). Jeden z daných souhlasných úhlů je vnějším úhlem tohoto trojúhelníku a druhý úhel, popřípadě úhel s ním vrcholový (který je s ním však dle věty 13.10 shodný), je vnitřním úhlem tohoto trojúhelníku, který není vedlejším úhlem k úhlu prvnímu. Podle věty 13.12 tedy musí být jeden z daných souhlasných úhlů větší než druhý, což je ve sporu s předpokladem. ☒



Obrázek 13.14: K důkazu věty 13.13

Úhel shodný se svým úhlem vedlejším nazýváme *pravým úhlem*.

Poznámky:

- ▶ K definování pravého úhlu není zapotřebí zavádět měření úhlů.
- ▶ Definice pravého úhlu ještě nezaručuje jeho existenci, tu je třeba dokázat (viz úloha 13.14, str. 234).

Věta 13.14

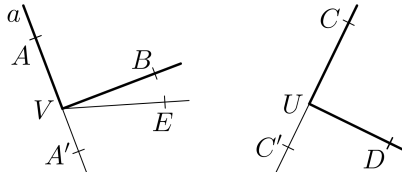
Všechny pravé úhly jsou navzájem shodné.

Důkaz:

Mějme pravé úhly AVB a CUD . Větu dokážeme sporem. Předpokládejme tedy, že úhly AVB , CUD nejsou shodné, bůno necht'

$\sphericalangle AVB < \sphericalangle CUD$. Sestrojíme body A' , C' takové, že $V \mu AA'$, $U \mu CC'$, úhly $A'VB$, $C'UD$ jsou tedy vedlejší k úhlům AVB , CUD . Z definice pravého úhlu plyne, že $\sphericalangle AVB \simeq \sphericalangle A'VB$ a $\sphericalangle CUD \simeq \sphericalangle C'UD$. Označme a přímkou AV a sestrojíme bod E v polovině aB takový, že $\sphericalangle AVE \simeq \sphericalangle CUD$ (obr. 13.15). Jelikož je úhel CUD (a tedy i úhel AVE) větší než úhel AVB , leží polopřímka VE uvnitř úhlu $A'VB$, tedy $\sphericalangle A'VE < \sphericalangle A'VB$. Vedlejší úhly shodných úhlů jsou shodné (viz úloha 13.10, str. 234), proto je $\sphericalangle C'UD \simeq \sphericalangle A'VE$. Z uvedeného vyplývá, že $\sphericalangle AVB < \sphericalangle CUD \simeq \sphericalangle C'UD \simeq \sphericalangle A'VE < \sphericalangle A'VB$, tedy $\sphericalangle AVB < \sphericalangle A'VB$, což je spor.

☒



Obrázek 13.15: K důkazu věty 13.14

Je-li úhel AVB pravý, potom o přímkách AV , BV řekneme, že jsou navzájem *kolmé*.

Věta 13.15

Mějme přímkou p a bod P , který s ní není incidentní. Bodem P lze vést k přímce p jedinou kolmici.

Důkaz:

Větu dokážeme sporem. Předpokládejme, že bodem P lze vést alespoň dvě různé kolmice a , b k přímce p . Přímka p je potom příčkou přímk a , b a souhlasné úhly tvořené těmito přímkami jsou pravé, a tedy dle věty 13.14 shodné. Z věty 13.13 potom vyplývá, že přímk a , b nemají společný bod, což je ve sporu s předpokladem.

☒

13.6 Axiomy spojitosti

Modely geometrie vytvořené pouze na základě axiomů incidence, uspořádání a shodnosti jsou sice nekonečné, ale stále „děravé“. *Axiomy spojitosti* umožní měřit úsečky a zároveň zajistí, že ke každému kladnému reálnému číslu existuje úsečka, jejíž velikost je rovna tomuto číslu. V důsledku toho pak můžeme na přímky i další objekty nahlížet jako na spojité útvary.

AC-1: Ke každým dvěma úsečkám AB , CD existuje konečná posloupnost bodů P_1, P_2, \dots, P_n incidentních s \overline{AB} taková, že $\overline{AP_1} \simeq \overline{P_1P_2} \simeq \dots \simeq \overline{P_{n-1}P_n} \simeq \overline{CD}$, kde $P_{k-1} \neq P_{k+1}$, a P_n neleží mezi body A , B .

AC-2: Nechť $\overline{G_1H_1}$, $\overline{G_2H_2}$, ... je posloupnost úseček, z nichž každá následující je částí předcházející. Pak existuje alespoň jeden bod, který je průnikem všech úseček této posloupnosti.

Poznámky:

- ▶ První axiom je v literatuře obvykle označován za axiom *Archimédův* a značen A, druhý za axiom *úplnosti* nebo též axiom *Cantorův*⁹ a značen C (odtud vychází naše označení AC axiomů této skupiny).
- ▶ V původní verzi svého díla Hilbert jako axiomy spojitosti formuloval axiomy AC-1 a AC-2. Později se ukázalo, že je lze nahradit jediným, tzv. *Dedekindovým*¹⁰ axiomem (D).

D: Body úsečky AB rozdělíme do dvou tříd s následujícími vlastnostmi:

- (1) Každý bod úsečky AB patří právě jedné třídě.
- (2) Bod A patří první třídě, bod B patří druhé třídě.
- (3) Náleží-li bod X první třídě, pak této třídě patří i každý bod ležící mezi body A , X .

Potom existuje tzv. hraniční bod H , který patří buď první, nebo druhé třídě a má následující vlastnosti:

- (a) je-li $H \neq A$, pak každý bod $X \in AH$ patří první třídě,
- (b) je-li $H \neq B$, pak každý bod $Y \in BH$ patří druhé třídě.

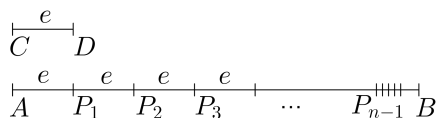
⁹Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) byl německý matematik. Je znám především pro své práce v oblasti teorie množin, zabýval se nekonečnem a zavedl ordinální a kardinální čísla.

¹⁰Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916) byl německý matematik. Věnoval se teorii čísel, abstraktní algebře a axiomatickým základům aritmetiky.

Axiom AC-1 umožňuje měřit délky úseček (obr. 13.16). Úsečku CD můžeme chápat jako jednotkovou úsečku e , která se do úsečky AB vejde a -krát (tedy $|AP_{n-1}| = a \cdot e = a$). Pro další zpřesnění uvažujeme části úsečky CD , například desetiny, ty opakovaně nanášíme od bodu P_{n-1} dále směrem k bodu B , dokud koncovým bodem nepřesáhneme bod B atd. Nakonec *délku úsečky* AB omezíme z obou stran:

$$a + a_1 \cdot \frac{e}{10} + \cdots + a_k \cdot \frac{e}{10^k} \leq |AB| < a + a_1 \cdot \frac{e}{10} + \cdots + a_k \cdot \frac{e}{10^k} + a_{k+1} \cdot \frac{e}{10^k},$$

kde $k \in \mathbb{N}$.



Obrázek 13.16: Měření délky úsečky

Pomocí axiomu AC-1 získáme pouze racionální délky úseček. Důsledkem axiomu AC-2 je, že ke každému kladnému reálnému číslu d existuje úsečka délky d , čímž je zajištěna spojitost přímek a dalších objektů.

Na základě axiomů incidence, uspořádání, shodnosti a spojitosti lze například dokázat, že $\overline{AB} < \overline{CD}$ právě tehdy, když $|AB| < |CD|$, že $B \mu AC$ právě tehdy, když $|AB| + |BC| = |AC|$ apod. Dále lze zavést měření úhlů nebo například definovat kružnici a dokázat, že je-li jeden krajní bod úsečky vnitřním bodem kružnice a druhý vnějším bodem kružnice, potom daná úsečka protíná danou kružnici.

13.7 Axiom rovnoběžnosti

Posledním¹¹ axiomem Hilbertova systému je *axiom rovnoběžnosti*.

R-1: V rovině lze každým bodem, který neleží na dané přímce, vést nejvýše jednu přímku neprotínající se s danou přímkou.

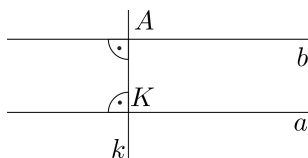
¹¹Hilbert ve skutečnosti axiomu uvedl v jiném pořadí, avšak pořadí, ve kterém je prezentujeme zde, je, jak uvidíme dále, praktičtější.

Věta 13.16

Mějme přímku a a bod A , který s ní není incidentní. Bodem A lze v dané rovině vést právě jednu přímku, která neprotíná přímku a .

Důkaz:

Dle axiomu R-1 lze vést takovou přímku nejvýše jednu. Je však třeba ukázat, že taková přímka vždy existuje.



Obrázek 13.17: K důkazu věty 13.16

Sestrojíme bodem A přímku k kolmou k přímce a (viz věta 13.15) a označme K průsečík přímek a , k (obr. 13.17). Dále vedme (v téže rovině) bodem A kolmici b k přímce k . Kdyby přímky a a b měly společný bod B , existoval by trojúhelník ABK , jehož vnější úhel při vrcholu K by byl shodný s vnitřním úhlem při vrcholu A , což by byl spor s větou 13.12, a tedy bod B neexistuje, neboli přímky a , b se neprotínají. \square

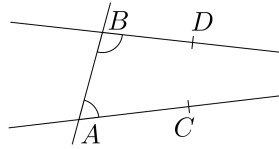
Geometrii, v níž platí axiomy I, U, S, AC a R, nazýváme *geometrií eukleidovskou*.

V eukleidovské geometrii nazýváme přímky, které leží v téže rovině, avšak nemají společný bod, *rovnoběžkami*.

Axiom R je ekvivalentní s mnoha větami, z nichž některé známe ze školské matematiky. Výběr z nich zde, již jen bez důkazu, pro zajímavost uvedeme.

Věta 13.17 (*pátý Eukleidův postulát*)

Mějme navzájem různé body A , B , C , D , kde body C , D leží v téže polorovině s hraniční přímkou AB . Je-li součet úhlů BAC a ABD menší než součet dvou pravých úhlů, potom se polopřímky AC a BD protínají (obr. 13.18).



Obrázek 13.18: Pátý Eukleidův postulát

Věta 13.18

Existuje trojúhelník, jehož součet vnitřních úhlů je roven přímému úhlu.

Věta 13.19

Každému trojúhelníku lze opsat kružnici.

Věta 13.20

Existují podobné trojúhelníky, které nejsou shodné.

13.8 Absolutní geometrie

Absolutní geometrií nazýváme geometrii popsanou (pouze) axiomy I, U, S a AC, tedy geometrii nezávislou na axiomu R-1. V této geometrii lze například odvodit, že součet vnitřních úhlů trojúhelníku je menší nebo roven součtu dvou pravých úhlů, nebo že daným bodem lze k dané přímce vést alespoň jednu přímku neprotínající se s danou přímkou.

Již víme, že připojením axiomu R-1 k axiomům absolutní geometrie získáme geometrii eukleidovskou. Pokud však k axiomům I, U, S a AC připojíme negaci $\neg R-1$ axiomu R-1, získáme tzv. *Lobačevského*¹² *geometrii*.

$\neg R-1$: V rovině lze každým bodem, který neleží na dané přímce, vést alespoň dvě navzájem různé přímky neprotínající se s danou přímkou.

¹²Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792–1856) byl ruský matematik. Je považován za objevitele jedné z neeukleidovských geometrií nesoucí dnes jeho jméno, svou teorii publikoval v letech 1829 a 1830 ve *Věstník Kazaňské univerzity*. Historikové matematiky však vedou spory o tom, kdo byl skutečně prvním objevitelem této geometrie, zda N. I. Lobačevskij, J. C. F. Gauss, nebo maďarský matematik János Bolyai (1802–1860).

Z modelů Lobačevského rovinné geometrie zmiňme Poincarého¹³ kruhový model, Poincarého polorovinný model a Beltrami¹⁴-Kleinův¹⁵ model. Více o těchto modelech a neeukleidovské geometrii viz například (Pavlíček, 1953).

Vztah Lobačevského a eukleidovské geometrie vystihuje následující tvrzení: Jestliže je V (platnou) větou eukleidovské geometrie a její negace $\neg V$ (platnou) větou Lobačevského geometrie, pak je věta V ekvivalentní s axiomem R-1. Dodejme, že k objevu Lobačevského geometrie vedly pokusy matematiků dokázat pátý Eukleidův postulát (viz věta 13.17) na základě ostatních Eukleidových postulátů a axiomů, neboť oproti nim zněl příliš složitě.

13.9 Úlohy

13.1 Na základě axiomů I definujte *různoběžné přímky*.

13.2 Množinou všech bodů geometrického modelu M_5 splňujícího axiomy I je $\{A, B, C, D, E\}$. Vypište všechny navzájem různé přímky modelu M_5 a ke každé z nich uveďte všechny přímky, které se s ní (a) protínají, (b) neprotínají.

13.3 Na základě axiomů I a U definujte *vnitřní bod poloroviny*.

13.4 Na základě axiomů I a U dokažte, že ze tří různých bodů přímky právě jeden leží mezi ostatními dvěma.

13.5 Na základě axiomů I a U dokažte, že každým bodem prochází nekonečně mnoho přímk.

¹³Jules Henri Poincaré (1854–1912) byl francouzský matematik, fyzik a filosof. Svými poznatky přispěl k řadě oblastí matematiky i fyziky. Neeukleidovské geometrii je věnován jeho článek *Sur les applications de la géométrie non-euclidienne à la théorie des formes quadratiques* z roku 1881.

¹⁴Eugenio Beltrami (1835–1900) byl italský matematik. Zabýval se především diferencíální geometrií a matematickou fyzikou. V článkách *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea* a *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante* prokázal již v roce 1868 platnost Lobačevského geometrie.

¹⁵Christian Felix Klein (1849–1925) byl německý matematik a pedagog. Jeho jméno je spojováno především s tzv. *Erlangenským programem*, který formuloval roku 1872 a jehož hlavní myšlenkou je studium jednotlivých geometrických struktur pomocí jejich symetrií a invariantů. Tento program zásadně ovlivnil rozvoj matematiky a fyziky ve 20. století. Model Lobačevského geometrie popsal nezávisle na E. Beltrami a někdy je tento model též nazýváme pouze Kleinův.

- 13.6** Na základě axiomů I a U dokažte, že s každou úsečkou inciduje nekonečně mnoho bodů.
- 13.7** Na základě axiomů I a U dokažte, že je-li bod B bodem vnitřku poloroviny pA , pak poloroviny pA , pB jsou totožné.
- 13.8** Na základě axiomů I a U dokažte, že jestliže body C , D nejsou body poloroviny pA , pak bod D je bodem poloroviny pC .
- 13.9** Na základě axiomů I, U a S definujte *osu úsečky* a *rovnoramenný trojúhelník*. Definice porovnejte s definicemi těchto pojmů v kapitolách 1 (str. 20) a 2 (str.31).
- 13.10** Na základě axiomů I, U a S definujte *součet úhlů* a *přímý úhel*.
- 13.11** Na základě axiomů I, U a S dokažte, že vedlejší úhly dvou shodných úhlů jsou shodné.
- 13.12** Na základě axiomů I, U a S dokažte věty *sss* a *Ssu* o shodnostech trojúhelníků.
- 13.13** Na základě axiomů I, U a S definujte *střed úsečky* a dokažte, že každá úsečka má právě jeden střed.
- 13.14** Na základě axiomů I, U a S dokažte, že v trojúhelníku leží proti větší straně větší vnitřní úhel.
- 13.15** Na základě axiomů I, U a S dokažte trojúhelníkovou nerovnost.
- 13.16** Na základě axiomů I, U a S dokažte, že existuje pravý úhel.
- 13.17** Dokažte, že v eukleidovské geometrii je axiom R-1 ekvivalentní s pátým Eukleidovým postulátem (věta 13.17).

Závěr

Učební text *Základy planimetrie pro učitelské studium* shrnuje ve 13 kapitolách především středoškolskou planimetrii, přičemž mnohými definicemi a větami přesahuje do planimetrie základoškolské i vysokoškolské. Cílem bylo zopakovat, prohloubit a částečně přesáhnout středoškolské učivo, aby byl vytvořen přechod ke studiu planimetrie z pohledu vysoké školy. Tohoto přesahu jsme se snažily docílit dvěma způsoby: obsahem a formou zpracování.

Obsah textu byl volen tak, aby na sebe jednotlivé kapitoly i v rámci kapitol jednotlivé informace co nejlépe navazovaly. Při výkladu jsme preferovaly syntetický přístup nad analytickým, přestože mnohé důkazy by bylo snazší provést analyticky. Nad rámec současného středoškolského učiva jsme jednak v rámci kapitol uvedly některé dílčí informace (například definici dělicího poměru nebo Eulerovy přímky, společnou definici kuželoseček aj.) a dále jsme zařadily celá témata jako mocnost bodu ke kružnici, skládání shodných zobrazení, osovou afinitu, kruhovou inverzi či axiomatiku planimetrie.

Formou zpracování klademe důraz na deduktivní přístup, čímž se snažíme studenty připravit mimo jiné na závěrečné téma tohoto textu – axiomatický přístup k planimetrii. Zavedení několika základních tvrzení (ZT) v prvních dvou kapitolách, jejichž platnost je na základě zkušeností se školskou planimetrií evidentní, nám umožnilo odvodit další planimetrické věty. Přitom se v celé práci snažíme o exaktnější přístup, než je v současných středoškolských učebnicích obvyklý.

V poslední kapitole je představen jeden z axiomatických systémů planimetrie a nastíněno, jak lze na jeho základě celou teorii budovat. Jsou zde dokázána alespoň některá ze ZT uvedených v prvních dvou kapitolách. Konkrétně důkazy vět 13.16, 13.10, 13.8 a 13.11 jsou po řadě zároveň důkazy ZT 1 (str. 11), ZT 3 (str. 16), ZT 11 (str. 29) a ZT 12 (str. 29). ZT 4 (str. 17), resp. 6 (str. 23), jsou částečně dokázány větami 13.13, resp. 13.15. Platnost ZT 2 (str. 11) vyplývá z definic různoběžných přímek a svazku přímek. Důkazy vět o shodnostech trojúhelníků ze ZT 10 (str. 29) a 13 (str. 29), resp. trojúhelníková nerovnost (ZT 9, str. 25), jsou součástí úlohy 13.11, resp. 13.15 (viz podkapitola 13.9). Na základě vět o shodnostech trojúhelníků, věty 13.20 a dalších definic a vět lze dokázat věty o podobnostech trojúhelníků, tedy ZT 14 až 17 (str. 30). ZT 5 (str. 20) lze odvodit po zavedení axiomů spojitosti, ZT 8 (str. 24) vychází z axiomů shodnosti, je však třeba dodefinovat osu úhlu. Konečně ZT 7 (str. 24) lze dokázat například pomocí Pýthagorovy věty, která je, stejně jako řada dalších vět eukleidovské geometrie, ekvivalentní s axiomem R-1 (viz podkapitola 13.7). Precizní prove-

dení důkazů všech ZT je nad rámec tohoto textu, neboť jsme limitovány jeho předpokládaným rozsahem i tím, co lze v rámci dané hodinové dotace v jednom semestru odpřednášet.

Doufáme, že tento učební text pomůže nejen studentům předmětu *Základy planimetrie* na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy, pro nějž byl primárně sepsán, ale i studentům učitelství matematiky na jiných vysokých školách. Zároveň věříme, že může být užitečnou pomůckou učitelům matematiky na středních i vysokých školách.

Autorky

Použité značení

úsečka AB	\overline{AB}
vzdálenost bodů A, B	$ AB $
přímka AB	$\longleftrightarrow AB$
polopřímka AB	$\dashrightarrow AB$
polorovina určená hraniční přímkou a a vnitřním bodem A	\overrightarrow{aA}
úhel ABC	$\sphericalangle ABC$
dělicí poměr bodů A, B, C	(ABC)
rovnoběžné/není rovnoběžné	\parallel, \nparallel
různoběžné	\times
kolmé/není kolmé	$\perp, \not\perp$
otevřený interval od a do b	$(a; b)$
uzavřený interval od a do b	$[a; b]$
zleva/zprava uzavřený interval od a do b	$[a; b), (a; b]$
shodné	\cong
podobné	\sim
trojúhelník	\triangle
kružnicový oblouk AB	\widehat{AB}
negace věty V	$\neg V$
skládání zobrazení	\circ
středová souměrnost	\mathcal{S}
osová souměrnost	\mathcal{O}
posunutí	\mathcal{T}
otočení	\mathcal{R}

posunutá souměrnost	\mathcal{P}
osová afinita	\mathcal{A}
kruhová inverze	\mathcal{K}
stejnolehlost	\mathcal{H}
identita	\mathcal{Id}

Seznam zkratek

búno	bez újmy na obecnosti
ZT	základní tvrzení
m	metr
g	grad
rad	radián
V	východ
SZZ	severo-západozápad
<i>sss</i>	strana-strana-strana
<i>sus</i>	strana-úhel-strana
<i>Ssu</i>	(větší) strana-strana-úhel
<i>usu</i>	úhel-strana-úhel
<i>uu</i>	úhel-úhel
I	axiom incidence
U	axiom uspořádání
S	axiom shodnosti
AC	axiom spojitosti
R	axiom rovnoběžnosti

Citovaná literatura

- Bečvář, J. (1993). Hrdinský věk řecké matematiky. In J. Bečvář, E. Fuchs (eds.), *Historie matematiky I* (20–107), JČMF.
- Blažek, V. (1997). *Geometrie IV*. Univerzita J. E. Purkyně v Ústí nad Labem.
- Boček, L. & Zhouf, J. (2009). *Planimetrie*. PedF UK.
- Čizmár, J. (2020). *Dejiny matematiky od najstarších čias po súčasnosť*. Perfekt.
- Halas, Z. (2016). Historie a argumentace ve školské matematice. In J. Hromadová, A. Slavík (eds.), *Cesty k matematice II* (6–25), Matfyzpress.
- Halas, Z. (2018). Poznámky k axiomatizaci planimetrie. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 63(1), 51–67.
- Herman J. a kol. (2003). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií. rické konstrukce*. Prometheus.
- Horák, S. (1949). *Pythagorova věta*. JČMF.
- Kuřina, F. (2020). Jak to vlastně je? Trojúhelník. *Učitel matematiky*, 28(4), 222–233.
- Lávička, M. (2007). *Syntetická geometrie*. ZČU v Plzni.
- Nový a kol. (1961). *Dějiny exaktních věd v českých zemích do konce 19. století*. NČSAV.
- Odvárko, O. (2008). *Matematika pro gymnázia. Goniometrie*. Prometheus.
- Pavlíček, J. B. (1953). *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského*. Přírodovědecké vydavatelství.
- Pomykalová, E. (2001). *Matematika pro gymnázia. Planimetrie*. Prometheus.
- Pomykalová, E. (2010). *Deskriptivní geometrie pro střední školy*. Prometheus.
- Sedláček, J. a kol. (1981). *Slovník školské matematiky*. SPN.
- Schreiber, P. & Scriba, Ch. (2001). *5000 Jahre Geometrie*. Springer.
- Švrček, J. & Vanžura, J. (1988). *Geometrie trojúhelníka*. SNTL.

Další literatura

Boček, L. (1985). *Základy planimetrie pro I. ročník gymnázií se zaměřením na matematiku*. SPN.

Boček, L. & Zhouf, J. (1995). *Máte rádi kružnice?* Prometheus.

Dubec, A. (1967). *Trojuholník, kľúč na riešenie geometrických úloh*. Slovenské pedagogické nakladateľstvo.

Chmelíková, V. (2009). *Zlatý řez nejen v matematice*. Matfyzpress.

Kadleček, J. (1996). *Geometrie v rovině a prostoru pro střední školy*. Prometheus.

Kohlmann, Č. (1959). *Geometrie*. SNTL.

Kubát, V. & Trkovská, D. (2011). *Analytická geometrie v afinních a eukleidovských prostorech*. Matfyzpress.

Kuřina, F. (1996). *Deset pohledů na geometrii*. Matematický ústav AV ČR, ALBRA.

Kuřina, F. (2002). *Deset geometrických transformací*. Prometheus.

Moravcová, V. (2011). Geometrické řešení jedné početní úlohy. *Učitel matematiky*, 19(3), 172–178.

Petáková, J. (1998). *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Prometheus.

Polák, J. (2005). *Přehled středoškolské matematiky*. Prometheus.

Švrček, J. (1998). *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka*. Karolinum.

Vyšín, J. (1952). *Elementární geometrie I, II, III*. Přírodovědecké nakladatelství.

Rejstřík

A

- afinita osová 189
- kosoúhlá 192
- pravoúhlá 192
- axiom 211
- Archimédův 229
- Cantorův 229
- Dedekindův 229
- Paschův 215, 217
- rovnoběžnosti 212, 230
- sčítací 222
- úplnosti 229
- axiomy
- incidence 212, 213
- shodnosti 212, 222
- spojitosti 212, 229
- uspořádání 212, 215

B

- bod 9, 213
- dotyku 49, 59
- koncový 158
- krajní 12
- nevlastní 197
- počáteční 12, 158, 220
- samodružný 153
- vlastní 197
- vnější 13, 47
- vnitřní 12, 13, 47, 216
- body
- kolineární 10, 214
- nekolineární 10, 214
- různé 10
- totožné 10

Č

- čára lomená 82
- číslo
- Fermatovo 86
- Ludolfovo 89
- zlaté 136
- čtverec 71
- čtvrtkruh 90
- čtyřúhelník 67
- dvojtředový 78
- konvexní 67, 69
- nekonvexní 67, 69
- pravidelný 128
- rovnostranný 71
- různostranný 71
- tečnový 69, 77
- tětivový 69, 76

D

- definice 211
- společná kuželoseček 120
- délka
- posunutí 159
- úsečky 19, 230
- orientované 158
- deltoid 75
- desetiúhelník pravidelný 129, 140
- devítiúhelník pravidelný 132
- dotyk kružnic
- vnější 58
- vnitřní 58
- děkaz 212
- E**
- ekvidistanta

- kružnice 113
- přímky 112
- úsečky 114

elace afinní 192

elipsa 119, 121

G

geometrie

- absolutní 232
- eukleidovská 231
- Lobačevského 232

H

homotetie 176

hranice obrazce 48, 87

hyperbola 120

CH

charakteristika osově afinity 195

chordála 63

I

identita 163

incidence 9, 213

inverze kruhová 198

K

koeficient

- kruhové inverze záporný 207
- podobnosti 175
- stejnolehlosti 176

kolmice 23

konstrukce

- eukleidovská 86, 125
- na základě výpočtu 133
- trojúhelníku *sss* 126, 127
- trojúhelníku *Ssu* 127
- trojúhelníku *sus* 126, 127
- trojúhelníku *usu* 126, 127

kosočtverec 71, 72

kosodélník 71, 72

kosoúhelník 71

kruh 45, 112

kružnice 22, 45, 112, 119

– Apollóniova 124

– devíti bodů 43, 78

– Feuerbachova 43, 80

– nesoustředné 57

– opsaná trojúhelníku 41

– ortogonální 60

– připsaná trojúhelníku 42

– soustředné 57

– Thalétova 53, 112

– vepsaná trojúhelníku 41

– základní 198

křivka kruhová 201

kuželosečka

– regulární 119

– singulární 121

L

lichoběžník 69, 73

– pravoúhlý 73

– rovnoramenný 73

M

mezikruží 90

místo bodů geometrické 111

mnohoúhelník 81

– konvexní 81

– nekonvexní 82

– pravidelný 84

množina

– bodů daných vlastností 111

– konvexní 14

– nekonvexní 14

mocnost bodu ke kružnici 60

N

- n -úhelník 81
- nerovnost trojúhelníková 25

O

- obdélník 71, 72
- objekt základní 211
- oblast kružnice 47
- oblouk kružnicový 53
- obraz
 - bodu 153
 - útvaru 153
- obrazec geometrický 87
- obsah 87
 - čtverce 91, 93
 - čtyřúhelníku 97
 - deltoidu 93
 - kosočtverce 92
 - kruhové úseče 99
 - kruhové výseče 99
 - kruhu 99
 - lichoběžníku 94
 - mezikruží 100
 - obdélníku 91
 - pravidelného n -úhelníku 99
 - rovnoběžníku 92
 - trojúhelníku 94, 95, 96, 105
- obvod 87
 - kruhové úseče 90
 - kruhové výseče 90
 - kruhu 89
 - mezikruží 90
 - mnohoúhelníku 88
- odchylka 22
 - rovnoběžných přímk 22
 - různoběžných přímk 22

- kružnic 60
- odvėsna 33
- ohnisko 119, 120, 121
- ortocentrum trojúhelníku 39
- osa
 - afinity 189
 - hlavní 119, 120
 - rovinného pásu 113
 - různoběžek 114
 - souměrnosti 154
 - posunuté 165
 - strany 36
 - úhlu 21, 37
 - úsečky 20, 112
- osmiúhelník pravidelný 128
- otočení 161
- ovál 115
- P**
- parabola 119
- parametr paraboly 119
- pata kolmice 23
- pás rovinný 13
- pětiúhelník pravidelný 129, 139
- podobnost 175
 - nepřímá 176
 - přímá 176
- trojúhelníků 30
- pojem primitivní 9, 211
- polokružnice 53
- poloměr
 - kruhu 45
 - kružnice 22, 46
- poloosa hlavní 119, 120
- polopřímka 12, 220
 - opačná 12, 220

- polorovina 12, 221
- opačná 12, 221
- poměr dělicí 20
- porovnání
- úhlů 224
- úseček 223
- postulát 212
- pátý Eukleidův 231
- posunutí 159
- pravoúhelník 71
- průměr 46
- průsečík 10, 214
- nedostupný 188
- přepona 33
- příčka
- přímek 11, 226
- střední
 - lichoběžníku 74
 - trojúhelníku 33
- trojúhelníku 33
- přímka 9, 213
- Eulerova 187
- hraniční 12, 221
- nevlastní 197
- řídící 119, 121
- vnější kružnice 48
- přímky
- kolmé 23, 228
- rovnoběžné 10
- různého směru 11
- různoběžné 10
- téhož směru 11
- půlkruh 89
- R**
- rameno
- koncové 160
- lichoběžníku 73
- počáteční 160
- trojúhelníku 31
- úhlu 13, 221
- rektifikace kružnice 132
- relace primitivní 211
- rotace 161
- rovina 9, 213
- eukleidovská 197
- Möbiova 197
- rovnoběžky 11, 231
- rovnoběžník 69, 70
- rozdíl úseček 223
- rozšíření roviny projektivní 197
- různoběžky 11
- různoběžník 69, 75
- Ř**
- řez zlatý 136
- S**
- sečna kružnice 48
- sedmiúhelník pravidelný 131
- shodnost 9, 10, 154
- nepřímá 163
- přímá 163
- trojúhelníků 29
- úhlů 213, 222
- úseček 213, 222
- směr 11
- afinity 189
- orientovaný 158
 - posunutí 159
- součet úseček 223
- souměrnost
- osová 154
- posunutá 165

– středová 157
 spojitost 9, 10, 229
 stejnolehlost 176
 strana 18, 68, 82
 střed

– kruhu 45
 – kružnice 22
 – otočení 161
 – potenční 64
 – souměrnosti 157
 – stejnolehlosti 176
 – vnější 179
 – vnitřní 179
 – svazku 11
 – úsečky 20

středná 57

svazek přímek 11

Š

šestiúhelník pravidelný 129

šířka mezikruží 90

T

tečna

– kružnice 48, 50, 51
 – dvou kružnic 182

tětiva 46

těžiště trojúhelníku 36

těžnice trojúhelníku 35

translace 159

trojúhelník 18, 221

– obecný 31
 – ostroúhlý 33
 – pravidelný 84, 129
 – pravoúhlý 33
 – rovnoramenný 31
 – rovnostranný 31

– různostranný 31

– tupoúhlý 33

trojúhelníky shodné 224

U

úhel 13

– dutý 13, 221

– konvexní 15

– nekonvexní 15

– nulový 13

– obvodový 53

– orientovaný 24, 160

– ostrý 22

– otočení 161

– plný 13

– pravý 22, 227

– přímý 13

– středový 53

– tupý 22

– úsekový 56

– vnější 27, 68, 82, 221

– vnitřní 27, 68, 82, 221

– vypuklý 13

úhlopříčka 67, 82

úhly

– přilehlé 17

– souhlasné 17, 226

– střídavé 17

– vedlejší 16, 221

– vrcholové 16, 221

úloha

– Apollóniova 64

– konstrukční 125

– bez parametru 140, 142

– nepolohová 141

– polohová 141

- s parametrem 140, 149
- úseč kruhová 89
- úsečka 12, 216
 - orientovaná 158
 - posunuté souměrnosti 165
- uspořádání 9
 - bodů 213, 215
- útvár samodružný 153
 - silně 153
 - slabě 154
- V**
- velikost úhlu 22
 - orientovaného 161
- věta 211
 - Cèvova 40
 - Eukleidova
 - obrácená 105
 - o odvěsně 104, 134
 - o výšce 103, 134
 - Gaussova-Wantzelova 85
 - Meneláova 40
 - o obvodovém a středovém úhlu 54
 - o souhlasných úhlech 227
 - o úsekovém úhlu 56
 - o vnějším úhlu trojúhelníku 225
 - Paschova 217
 - Ptolemaiova 78
 - Pýthagorova 100, 133
 - obrácená 101
 - sss 29, 30
 - Ssu 29, 30
 - sus 29, 30, 224
 - Thalétova 29
 - usu 29, 225
 - uu 30
- větev hyperboly 120
- vrchol
 - čtyřúhelníku 68
 - mnohoúhelníku 82
 - trojúhelníku 18
 - úhlu 13, 221
- výseč kruhová 89
- výška
 - kruhové úseče 89
 - lichoběžníku 93
 - rovnoběžníku 91
 - trojúhelníku 38
- vzájemná poloha
 - přímek 10
 - kružnic 58
- vzdálenost
 - bodu od přímky 19
 - bodu od útvaru 19
 - bodů 19
 - útvarů 19
- vzor 153
- vzorec Hérónův 105
- Z**
- základna
 - lichoběžníku 73
 - trojúhelníku 31
- záměna cyklická 28
- zobrazení
 - ekvivalentní 192
 - involutorní 172
 - konformní 204
 - plochojevné 192
 - roviny 153
 - rovnoploché 192
 - složené 164
 - stejnoploché 192

