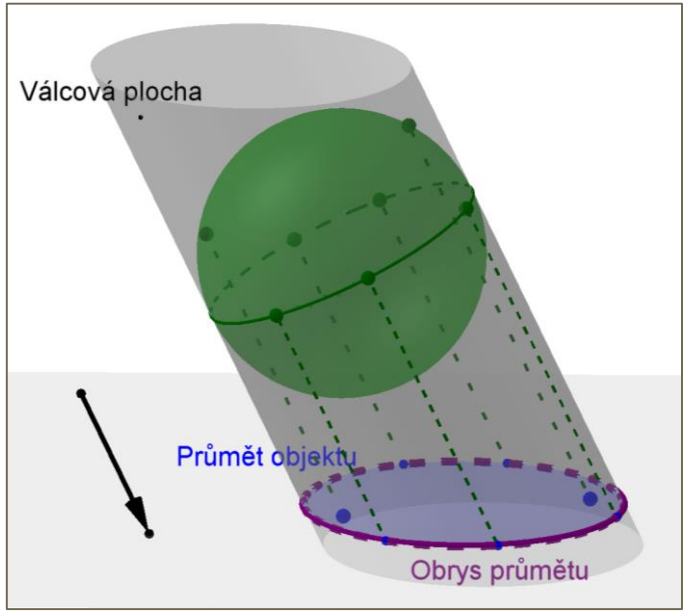
PROMÍTÁNÍ

PROMÍTÁNÍ

= zobrazení, pomocí něhož je možné zobrazovat trojrozměrný euklidovský prostor a geometrické útvary v něm do (promítací) roviny (**průmětny**)

Průmět objektu = množina průmětů všech bodů objektu do promítací roviny.
Obrys průmětu = hranice průmětu objektu.
Stopník přímky = průsečík přímky s průmětnou.
Stopa roviny = průsečnice roviny s průmětnou.
Věta: Stopník přímky, která leží v rovině, leží na její stopě.



K promítání užíváme tzv. **promítací metody** = metody, které zprostředkovávají zobrazení prostorových útvarů do roviny. Na základě promítacích metod se pak mohou útvary modelovat, studovat vzájemné vztahy mezi nimi a řešit rovinné a prostorové úlohy.

Dva druhy promítání:

- **Středové promítání** – dáno středem promítání a průmětnou.
- **Rovnoběžné promítání** – dáno směrem promítání a průmětnou.

Vhodnou kombinací rovnoběžných a středových promítání získáme **zobrazovací metody** (vzájemně jednoznačná zobrazení):

Např. Mongeovo promítání – kombinace dvou rovnoběžných promítání.
Pravoúhlá axonometrie – kombinace dvou až čtyř rovnoběžných promítání.
Lineární perspektiva – kombinace rovnoběžného a středového promítání.

ROVNOBĚŽNÉ PROMÍTÁNÍ

= zobrazení prostoru do roviny π (**průmětny, promítací roviny**), které je dané směrem s, který není rovnoběžný s rovinou π.

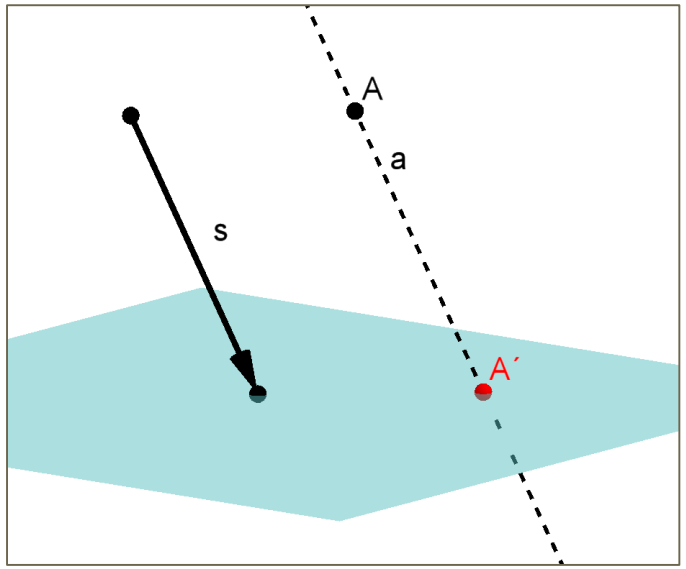
Vlastnosti rovnoběžného promítání:

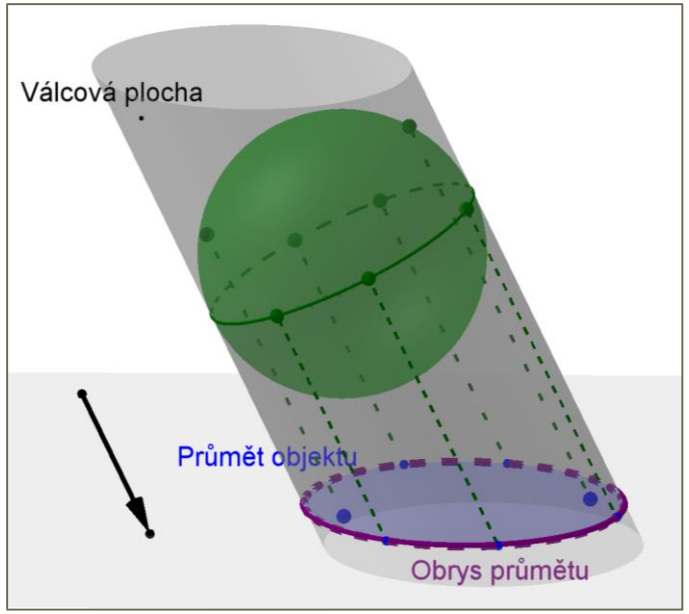
- Průmětem bodu je bod.
- Průmětem přímky, která není **promítací** (tzn. není rovnoběžná se směrem promítání) je přímka.
- **Incidence** se zachovává.
- Průmět úsečky (která není promítací) je úsečka.
- Zachovává dělící poměr (střed úsečky se zobrazí do středu průmětu této úsečky).
- Zachovává se **rovnoběžnost** (průmětem rovnoběžek - pokud ani jedna není promítací - jsou rovnoběžky).

Obraz bodu v rovnoběžném promítání :

1. bodem A proložíme přímku a rovnoběžnou se směrem promítání s,
2. průsečík A' přímky a s průmětnou π je obraz bodu A.

Promítací válcová (**hranolová**) **plocha** = množina všech promítacích přímek, které se dotýkají zobrazovaného objektu. Množina průsečíků těchto promítacích přímek tvoří **obrys průmětu**.



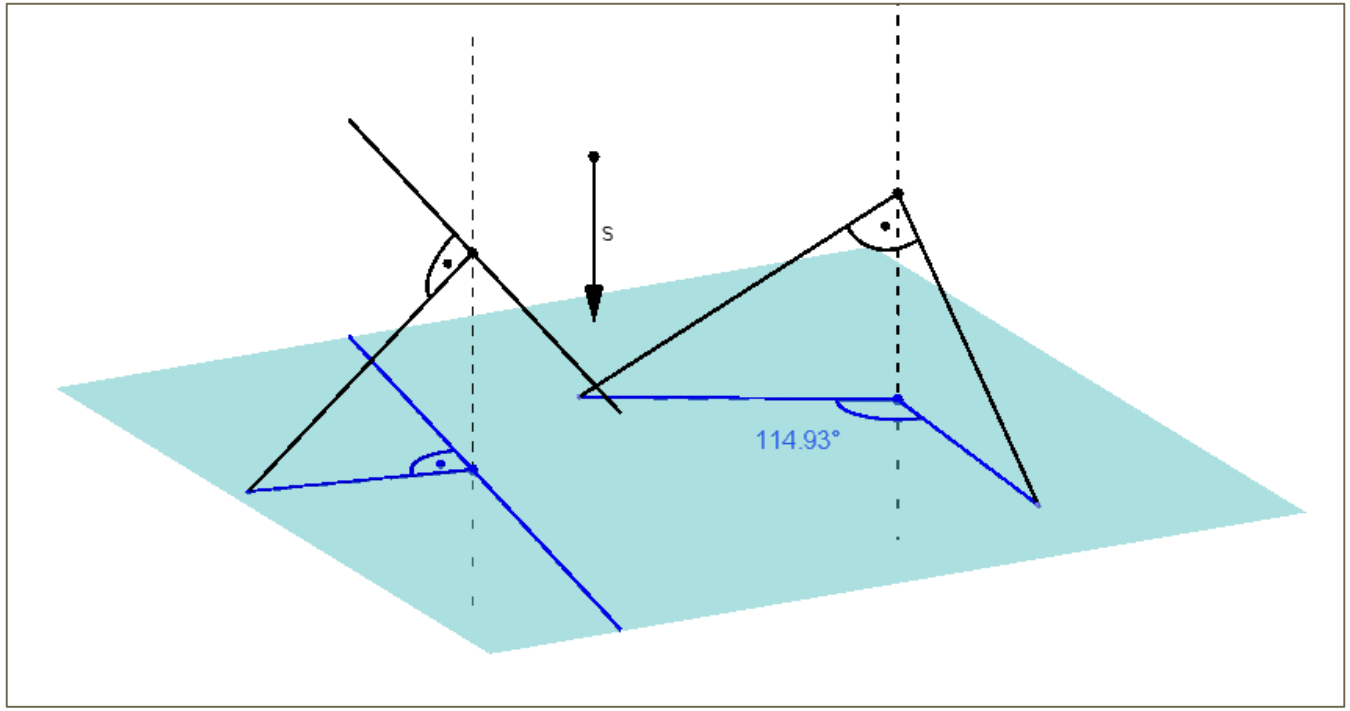


Rovnoběžné promítání podle vzájemné polohy směru promítání a průmětny:

- Pravoúhlé promítání – směr promítání je kolmý k průmětně
- Kosoúhlé promítání – směr promítání není kolmý k průmětně

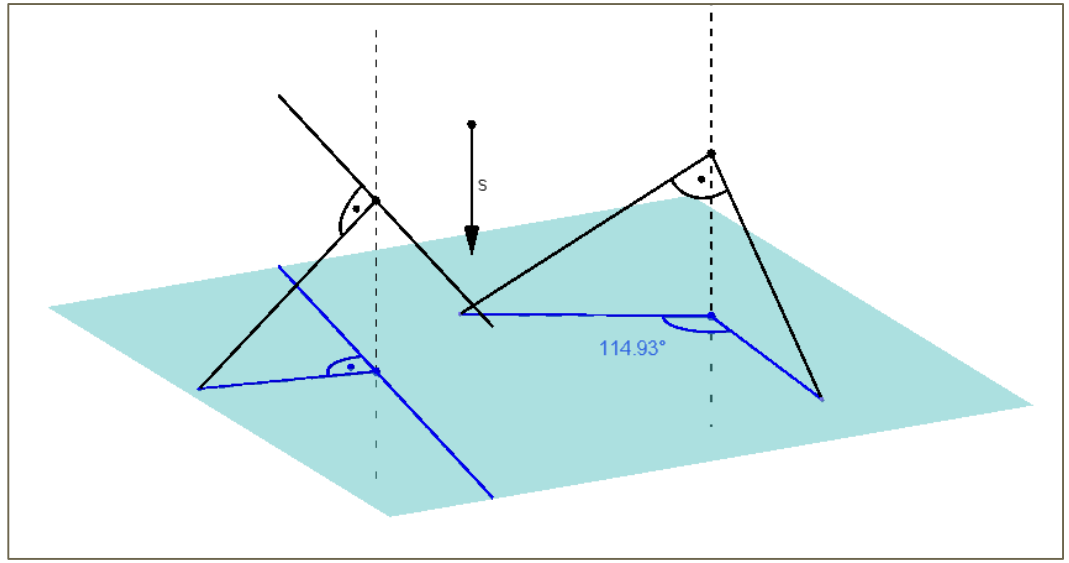
Průmět pravého úhlu v pravoúhlém promítání:

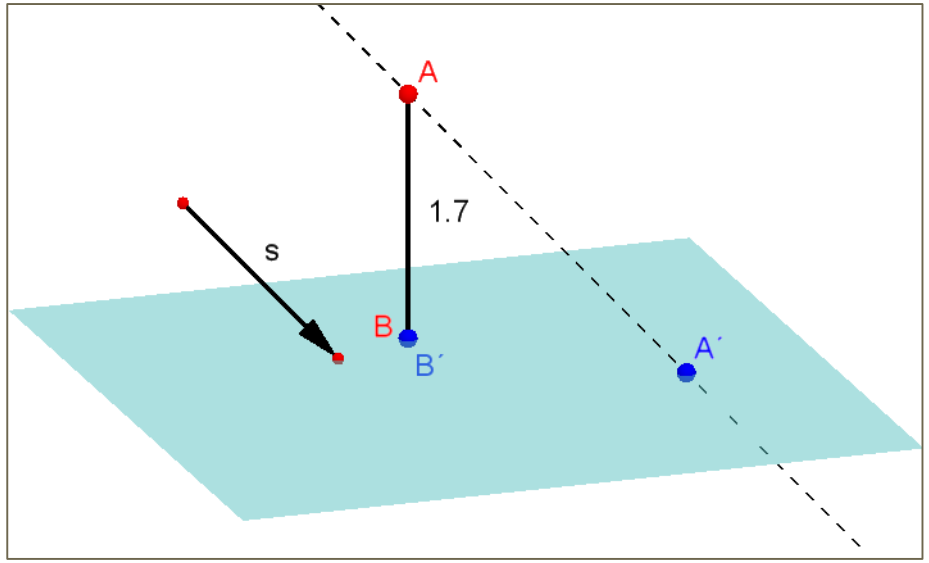
Je-li dán pravý úhel dvěma rameny, z nichž ani jedno není kolmé k průmětně a jedno rameno je rovnoběžné s průmětnou, pak pravoúhlým průmětem tohoto úhlu je pravý úhel.



Příklady:

1. Načrtněte situaci, kdy se v pravoúhlém promítání promítne pravý úhel jako úhel přímý a ostrý.
2. Úsečka AB je kolmá k průmětně π, určete odchylku směru s kosoúhlého promítání od roviny π, pro kterou je délka průmětu $A'B'$ rovna (je větší, resp. je menší) délce úsečky AB.
3. Jaký rovinný útvar tvoří průmět kulové plochy v pravoúhlém a kosoúhlém promítání.





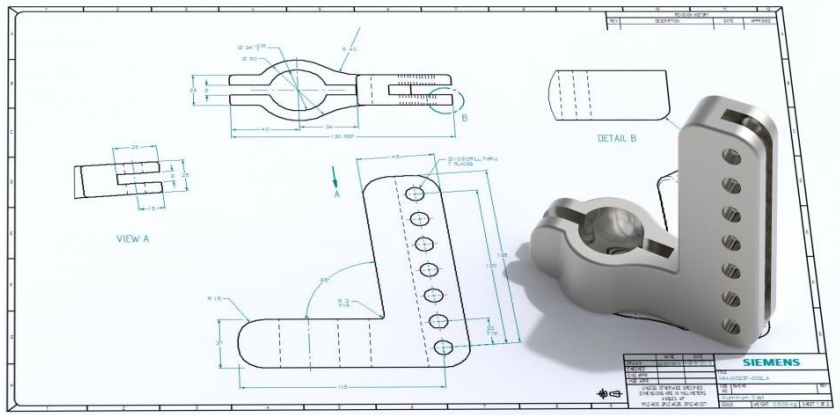
MONGEOVO PROMÍTÁNÍ

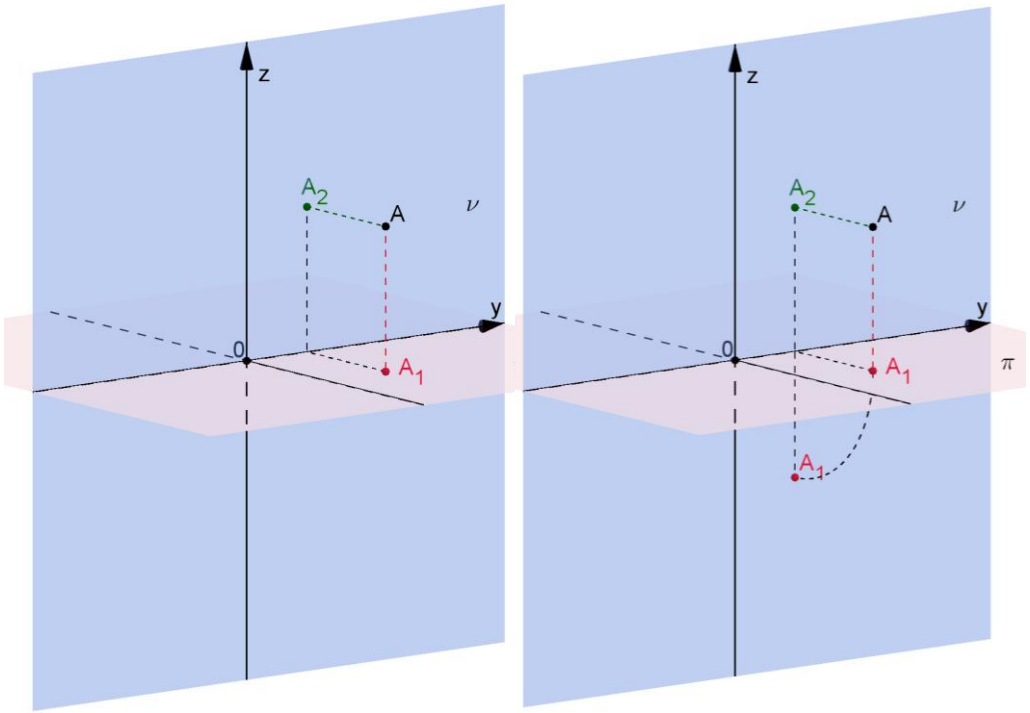
= pravoúhlé rovnoběžné promítání na dvě (tři) k sobě kolmé průmětny (kombinace dvou až tří rovnoběžných promítání).
Průmětny: **půdorysna** p, **nárysna** n (bokorysna μ).
Průsečnice půdorysny a nárysny se nazývá **základnice**.

Výhoda - snadné řešení úloh, nevýhoda - menší názornost.

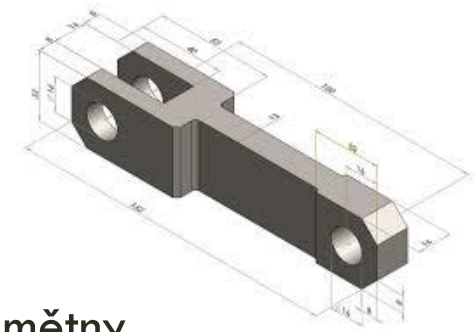
Určení obrazu bodu v MP:
Bodem vedeme kolmice k průmětnám. Tyto kolmice protnou jednotlivé průmětny
– půdorysnu v **půdorysu** $\boldsymbol{A_1}$ bodu A,
– nárysnu v **nárysu** $\boldsymbol{A_2}$ bodu A,
(– bokorysnu v **bokorysu** $\boldsymbol{A_3}$ bodu A).
Půdorys a nárys bodu tvoří tzv. **sdružené průměty** bodu A.

Zobrazení průmětů do nákresny zajistíme tak, že jednu průmětnu otočíme kolem základnice do druhé průmětny, tím se půdorys a nárys jednoho bodu dostanou na přímku kolmou k základnici (**ordinála**).





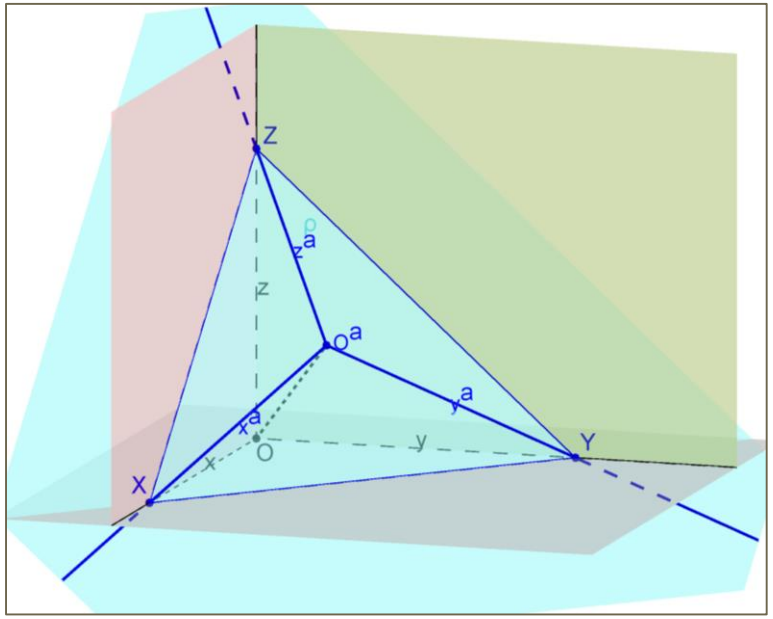
PRAVOÚHLÁ AXONOMETRIE

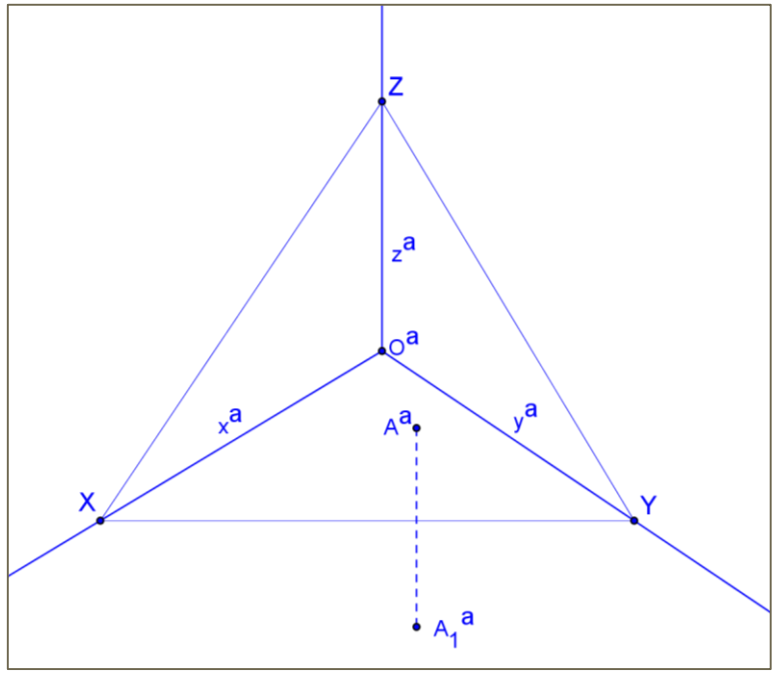


= pravoúhlé rovnoběžné promítání na **čtyři** průmětny.

- Tři z těchto průměten jsou na sebe kolmé souřadnicové roviny (tzv. **pomocné** průmětny).
  - rovina (xy) = **půdorysna** π, (yz) = **nárysna** ν, (xz) = **bokorysna** μ.
- Čtvrtá hlavní průmětna se nazývá **axonometrická průmětna** ρ, která je s pomocnými průmětnami různoběžná (není rovnoběžná s žádnou souřadnicovou osou).
- Průsečnice pomocných rovin s axonometrickou průmětnou tvoří **axonometrický trojúhelník**.

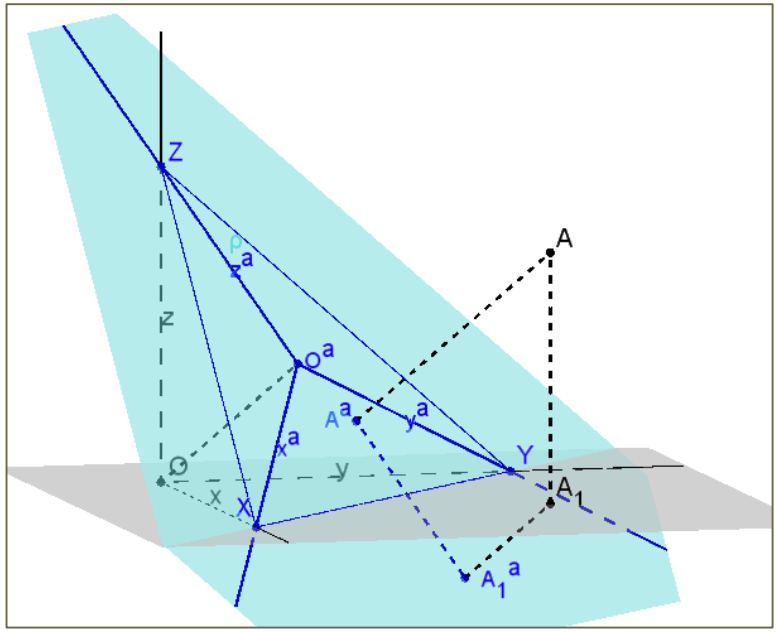
Souřadnicové osy a počátek soustavy souřadnic pravoúhle promítneme do axonometrické průmětny – získáme tzv. **axonometrický osový kříž**.

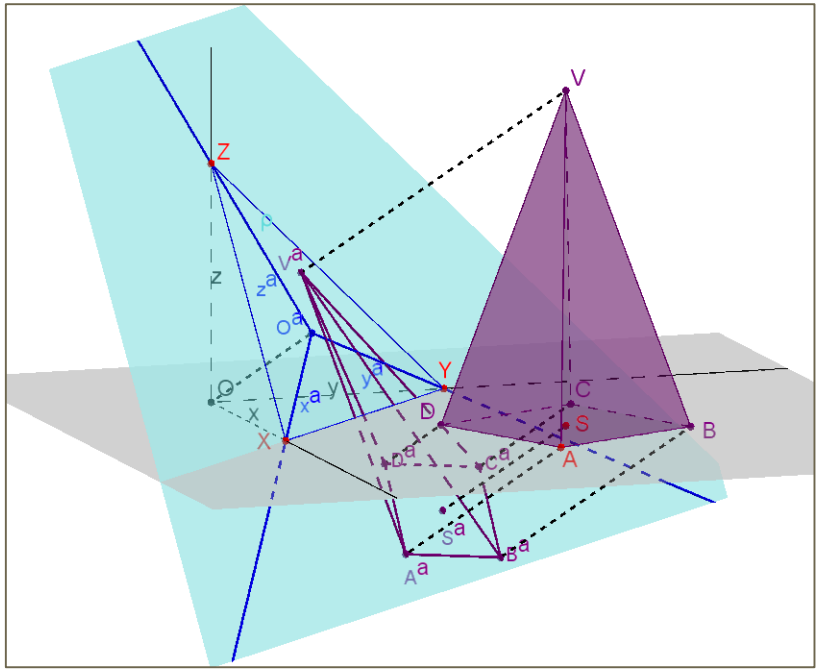


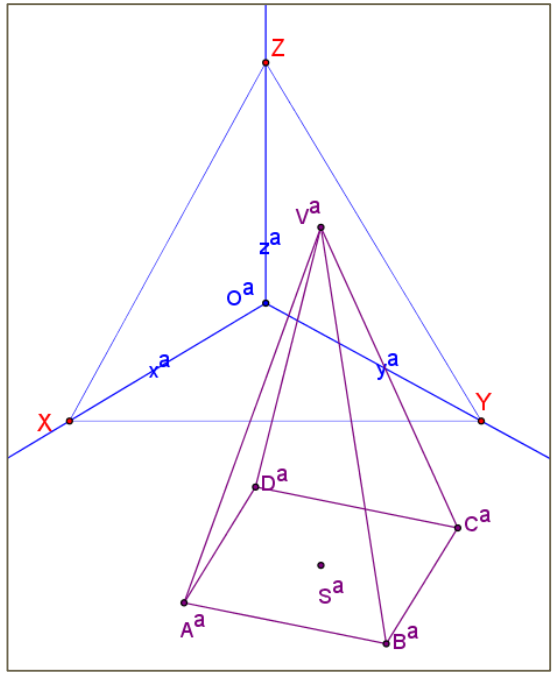


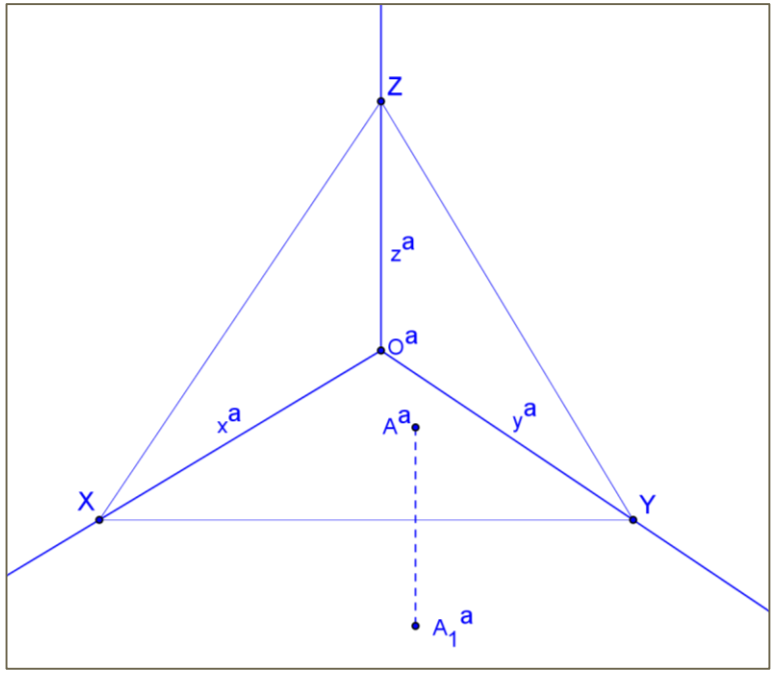
Určení obrazu bodu v PA:

1. bod pravoúhle promítneme na axonometrickou průmětnu - získáme **axonometrický průmět bodu A^a**
2. bod pravoúhle promítneme do pomocné průmětny - vznikne půdorys A_1 (příp. nárys A_2, bokorys A_3) bodu
3. Pomocné průměty pravoúhle promítneme do axonometrické průmětny - vznikne **axonometrický půdorys $A_1{}^a$ (nárys $A_2{}^a$, bokorys $A_3{}^a$)** bodu.





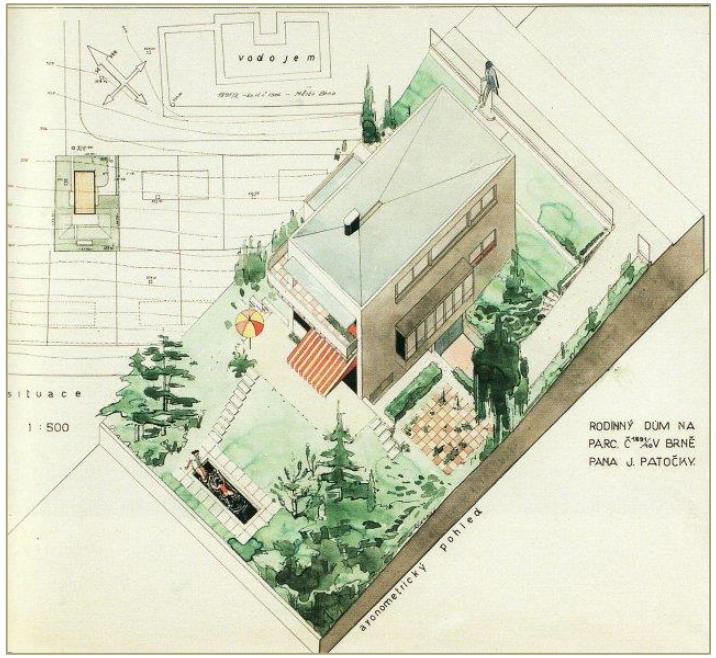


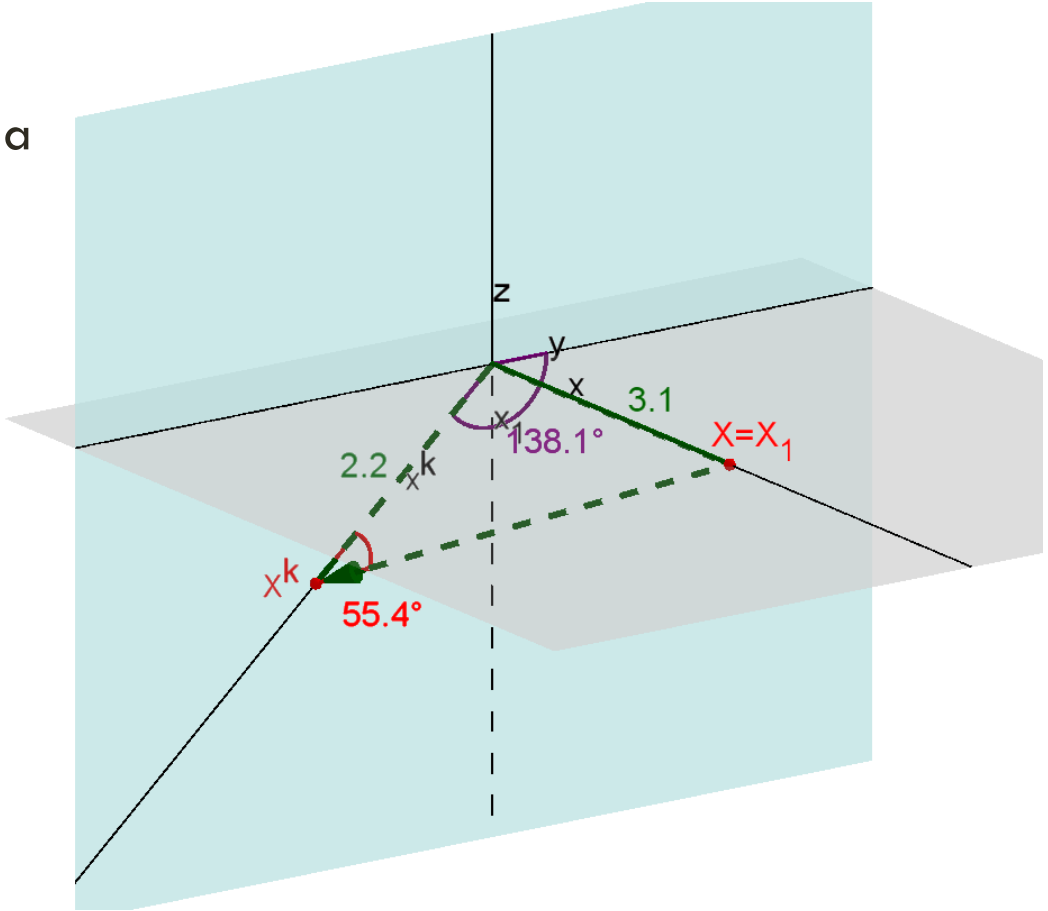


KOSOÚHLÉ PROMÍTÁNÍ

= kosoúhlé promítání s přiřazeným pravoúhlým promítáním
Promítáme na tři průmětny: půdorysnu $\pi = (xy)$, bokorysnu $\mu = (xz)$, nárysnu $\nu = (yz)$ (zároveň **hlavní průmětna**)

- určeno odchylkou směru kosoúhlého promítání od nárysny a odchylkou osy y od kosoúhlého průmětu x^k osy x

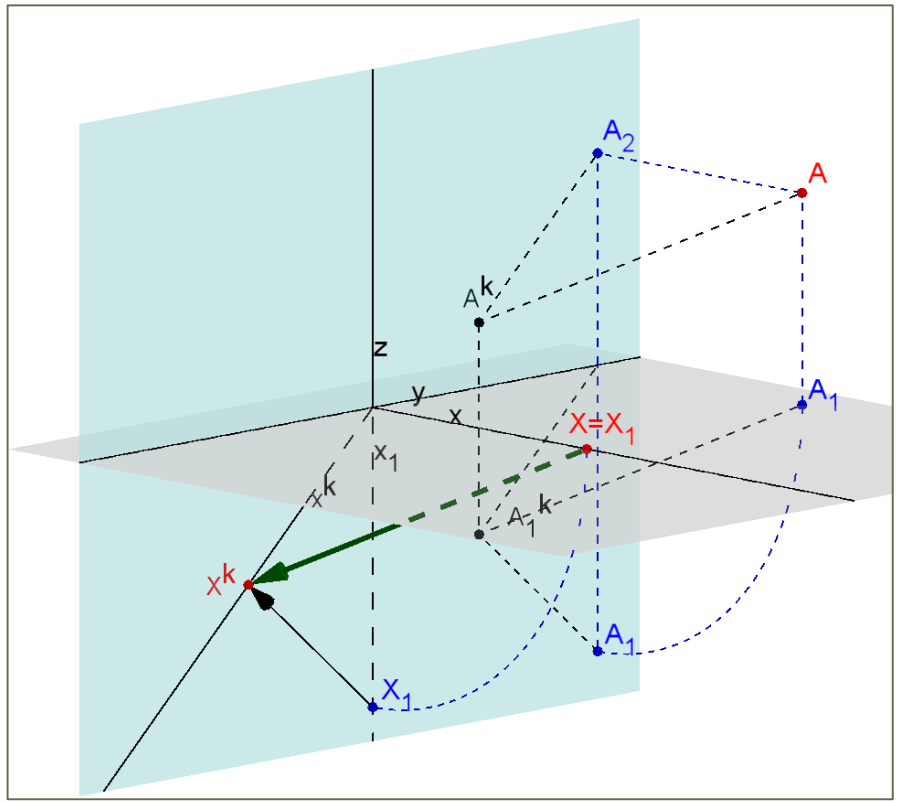


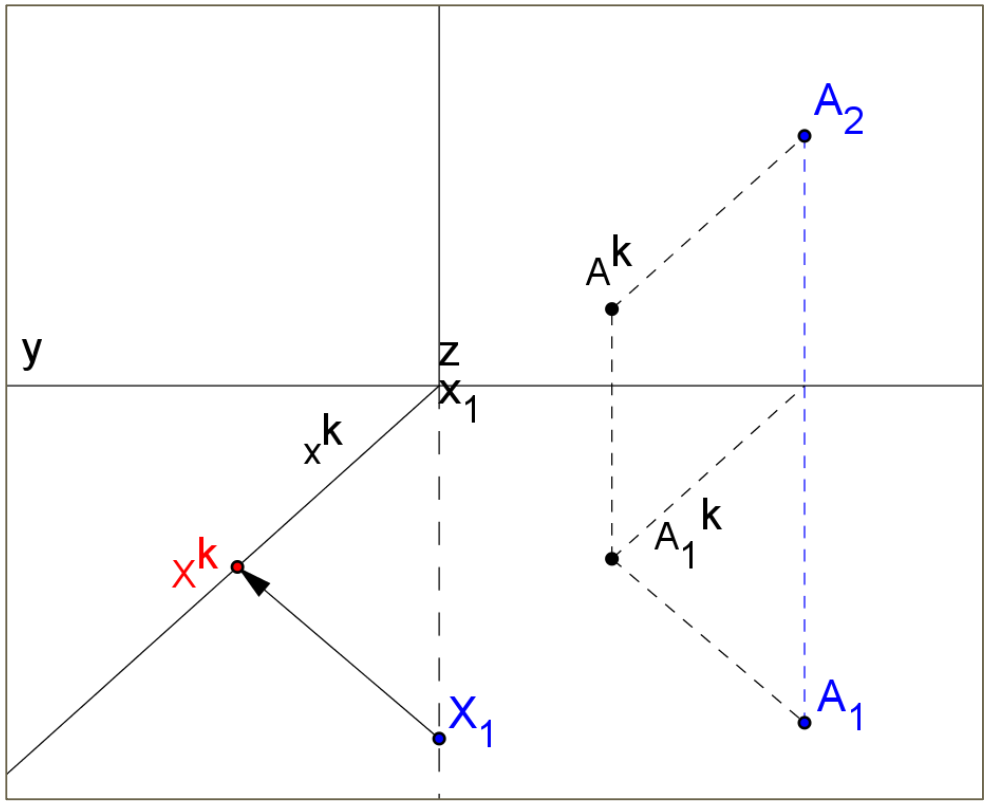


Určení obrazu bodu v KP:

1. Kosoúhle promítneme bod do nárysny – získáme kosoúhlý průmět A^k bodu
2. Pravoúhle promítneme bod do půdorysny – získáme půdorys A_1 bodu
3. Kosoúhle promítneme půdorys bodu do nárysny – získáme kosoúhlý půdorys A_1^k bodu

Kosoúhlý průmět A^k a kosoúhlý půdorys A_1^k bodu jsou **sdružené průměty** bodu.





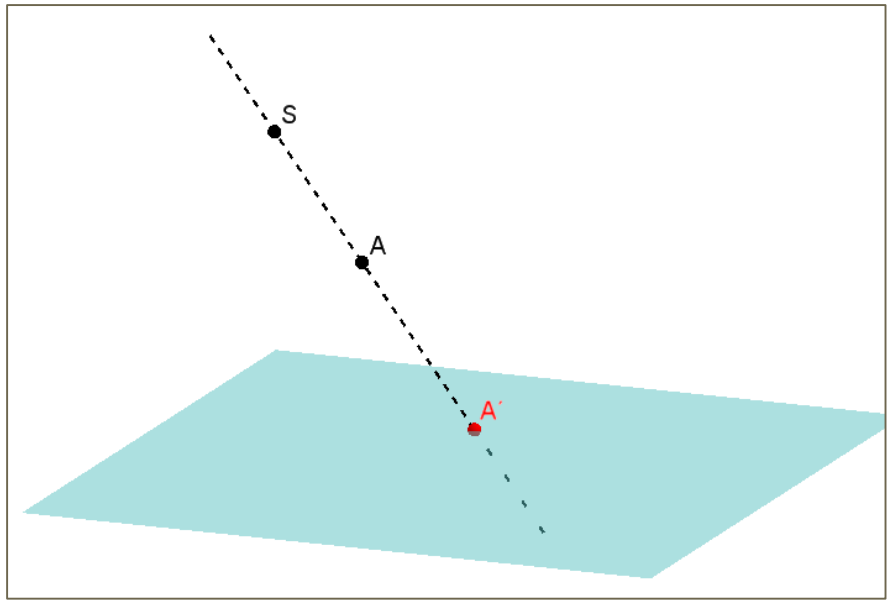
STŘEDOVÉ PROMÍTÁNÍ

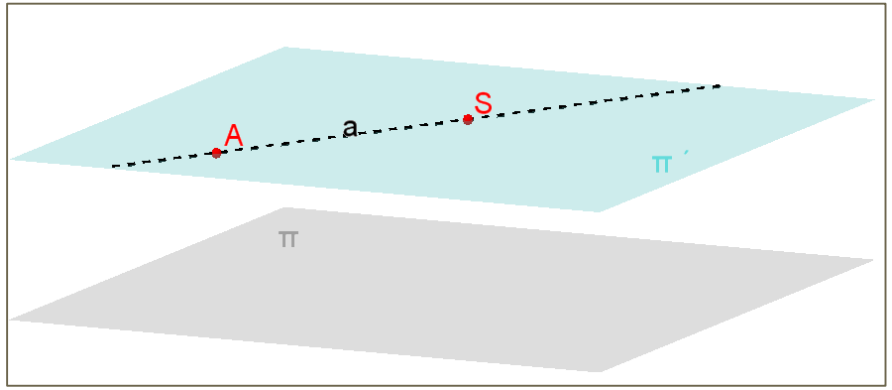
= zobrazení prostoru do roviny (**průmětny**) π, které je dané bodem (**středem promítání**) S, který v rovině π neleží.

Obraz bodu ve středovém promítání :

1. bodem A a středem promítání proložíme přímku,
2. průsečík A' přímky a s průmětnou π je obraz bodu A.

Ve středovém promítání **nelze zobrazovat celý prostor** – bod S nemá průmět, problémem jsou také body v rovině π' rovnoběžné s průmětnou π procházející středem promítání (lze vyřešit zavedením projektivně rozšířeného prostoru).

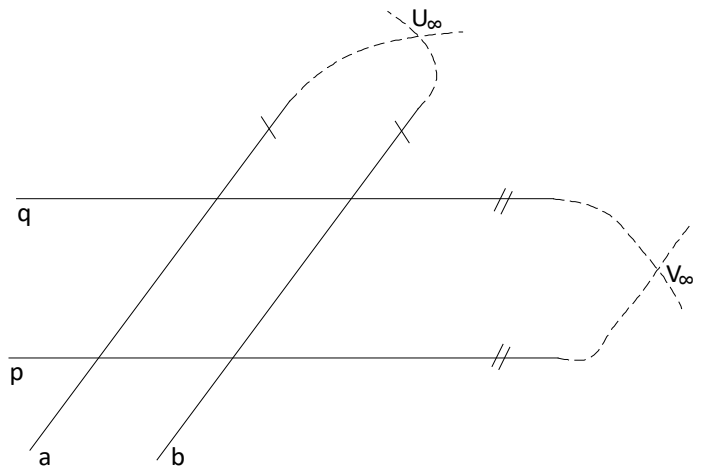




ZAVEDENÍ PROJEKTIVNĚ ROZŠÍŘENÉHO PROSTORU

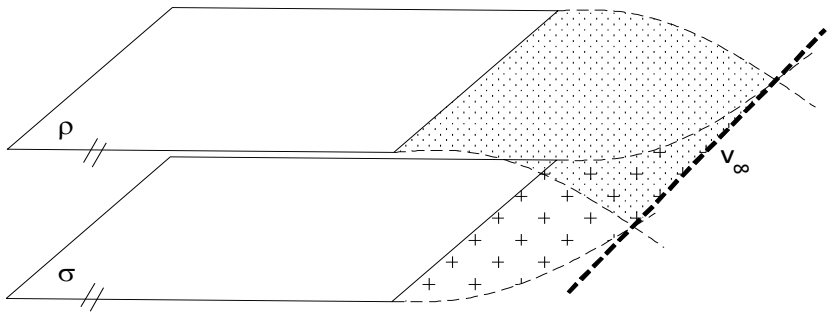
Máme-li rovnoběžné přímky, pak jejich společný bod leží v nekonečnu (např. U_∞) a nazveme ho **nevlastním bodem (směrem)**.

- Protože je nekonečně mnoho přímek s různým směrem, pak je také nekonečně mnoho nevlastních bodů. Každá přímka tedy má v nekonečnu nevlastní bod.



Obdobně, pokud vezmeme v prostoru rovnoběžné roviny, pak jejich „průsečnice“ u_∞ v nekonečnu je **nevlastní přímka** (**dvojsměr**).

- Zvolíme ji jiné rovnoběžné roviny, pak tyto mají společnou jinou nevlastní přímku (v_∞).



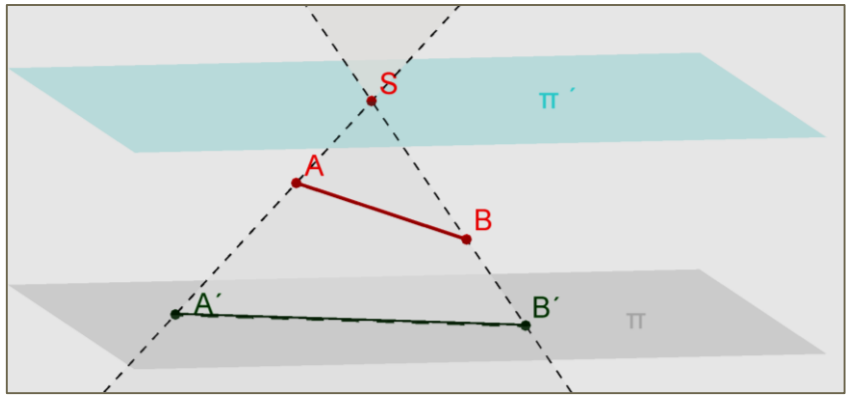
Sjednocením všech nevlastních bodů a všech nevlastních přímek získáme **nevlastní rovinu** ω_∞.

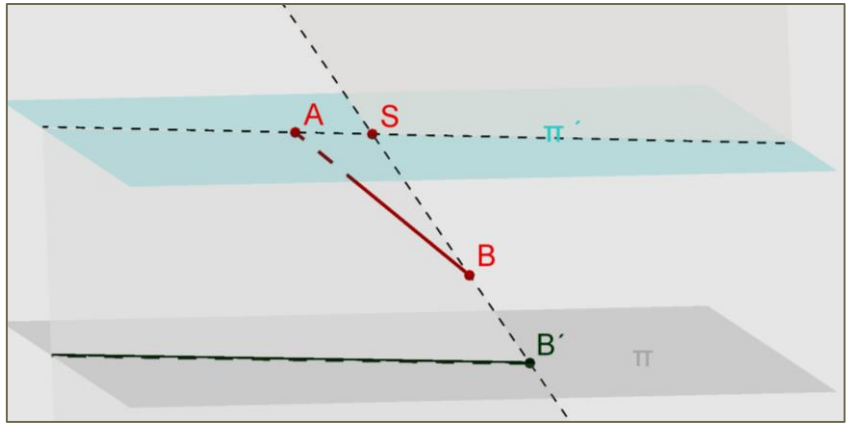
Sjednocením Euklidovského prostoru E_3 a nevlastní roviny ω_∞ získáme **projektivně rozšířený Euklidovský prostor** $\bar{E}_3$.

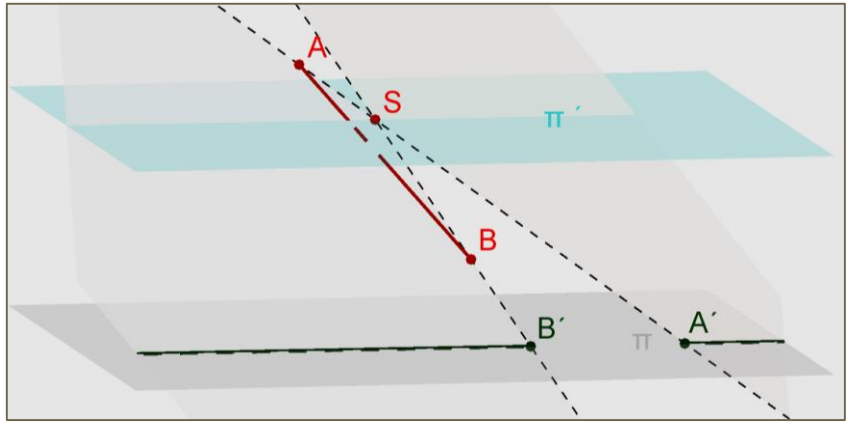
Body v $\bar{E}_3$, které nejsou nevlastní nazýváme také jako **body vlastní**.

VLASTNOSTI STŘEDOVÉHO PROMÍTÁNÍ:

- Průmětem přímky, která není promítací (tzn. neprochází středem promítání) je přímka.
- Nezachovává rovnoběžnost a dělící poměr (např. střed úsečku se nezobrazí do středu průmětu úsečky).
- Průmět úsečky, která neleží na promítací přímce může být úsečka, polopřímka nebo sjednocení polopřímek.

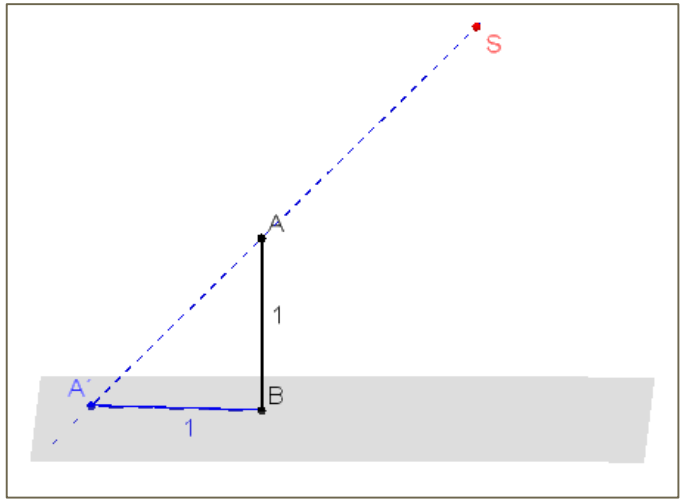






Příklady:

1. Ve středovém promítání je úsečka AB kolmá k průmětně π, bod B v průmětně leží. Určete aspoň jednu polohu středu promítání S tak, aby průmětem úsečky AB byla
   a) úsečka kratší než AB,
   b) stejně dlouhá jako AB,
   c) polopřímka,
   d) sjednocení dvou polopřímek.

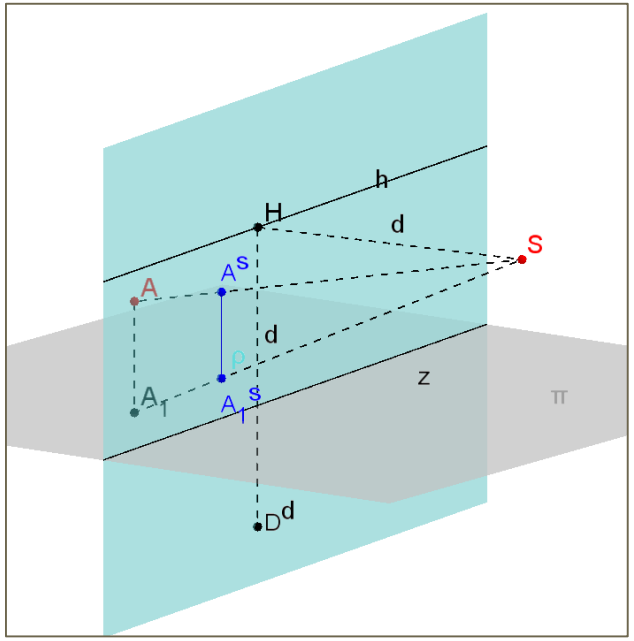


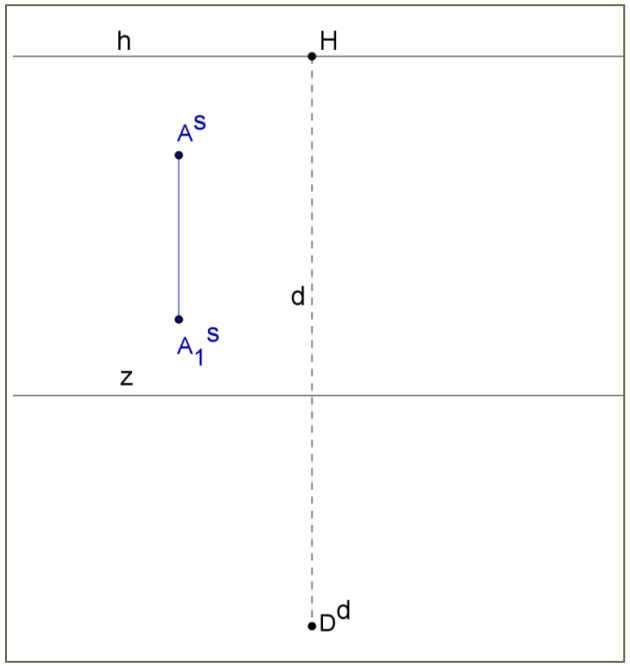
2. Je dáno středové promítání. Najděte a popište všechny polohy úsečky AB, pro které platí: průmětem středu úsečky AB je střed jejího průmětu.

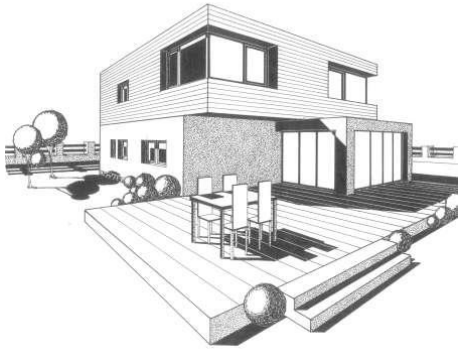
LINEÁRNÍ PERSPEKTIVA

- napodobuje lidské vidění (střed promítání = lidské oko, průmětna = sítnice oka), aplikace středového promítání.
- kombinace středového a pravoúhlého rovnoběžného promítání

Průmětnu ρ umísťujeme do svislé polohy. K ní kolmá je základní rovina (půdorysna) π, na které stojí pozorovatel a objekt. Oko pozorovatele ztotožňujeme se středem promítání S a jeho pravoúhlý průmět do průmětny označujeme jako **hlavní bod H**.
Vzdálenost $|SH| = d$ (**distance**) je vzdálenost pozorovatele od průmětny.
Distanci v průmětně vyznačujeme tzv. distančníky – horní D^h, dolní D^d, pravý D^p, levý D^l $\left(\left|HD^d\right| = d, HD^d \perp h\right)$



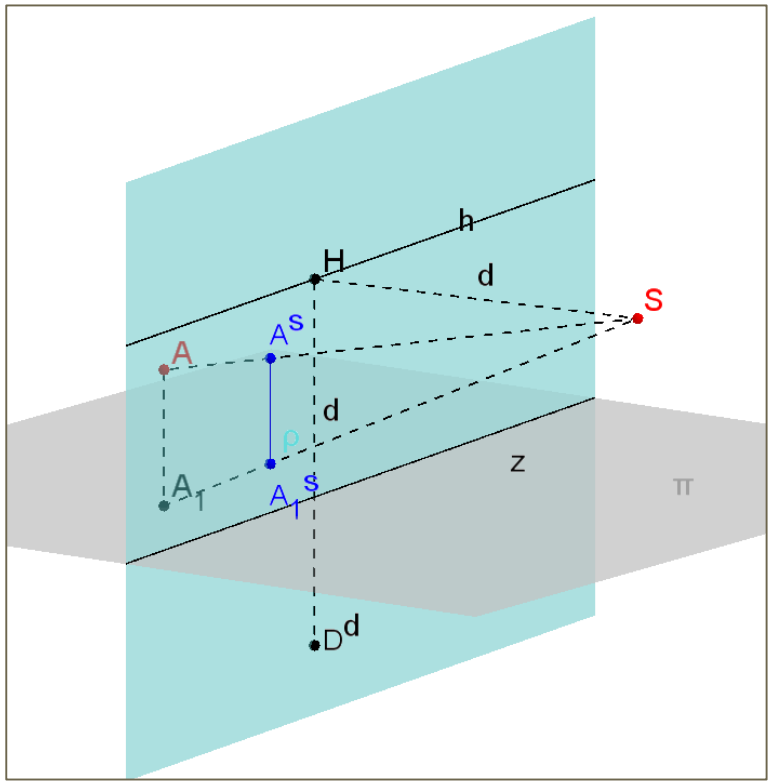


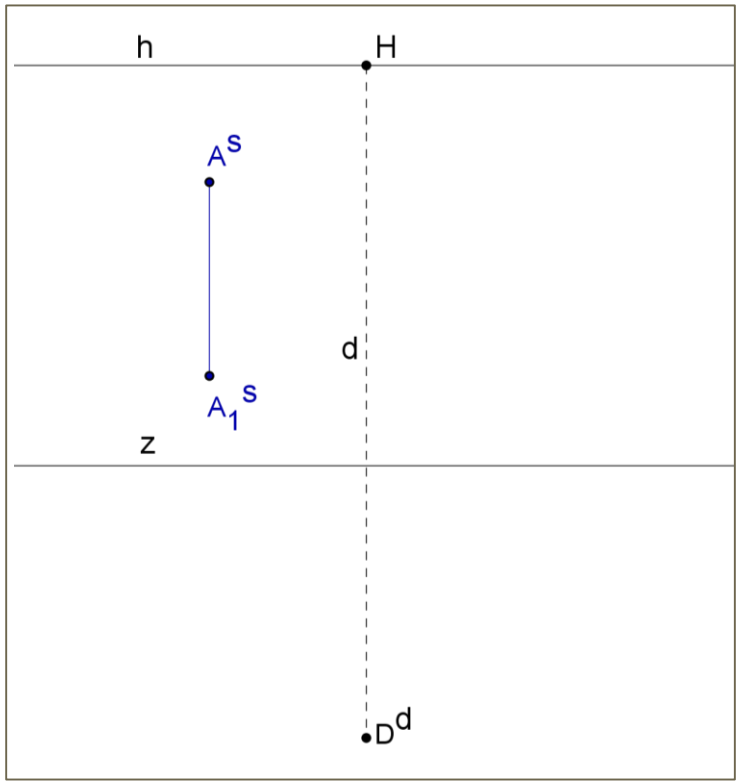


Určení obrazu bodu v LP:

1. středově promítneme bod ze středu promítání na průmětnu – získáme A^s **perspektivu bodu**,
2. pravoúhle do půdorysny promítneme bod – získáme půdorys A_1 bodu,
3. středově promítneme půdorys bodu do průmětny – získáme $A_1{}^s$ **perspektivu půdorysu bodu.**

Sdružené průměty bodu = perspektiva bodu A^s a perspektiva půdorysu bodu $A_1{}^s$





VOLNÉ ROVNOBĚŽNÉ PROMÍTÁNÍ

NENÍ ZOBRAZOVACÍ METODA !!!

- používáme k ilustraci řešení a zobrazování, užíváme jen v případech, kdy nás nezajímá skutečná velikost objektů, ale pouze jejich vzájemné vztahy
- obrazy prostorových útvarů v tomto promítání se vyznačují poměrnou konstrukční jednoduchostí a názorností.

Vychází z **Pohlkeovy věty**: *Mějme dán libovolný čtyřstěn. Pak každé čtyři body v rovině, které neleží na přímce, můžeme považovat za rovnoběžné průměty vrcholů některého čtyřstěnu, který je podobný s daným čtyřstěnem.*

Z Pohlkeovy věty plyne věta: *Mějme dán libovolný trojúhelník. Pak každé tři body v průmětně, pokud všechny nesplývají, můžeme pokládat za rovnoběžný průmět vrcholů trojúhelníku, který je s daným trojúhelníkem podobný.*

Při zobrazování vycházíme z Pohlkeovy věty a z vlastností rovnoběžného promítání (zachování incidence, rovnoběžnosti, dělícího poměru). Ve všem ostatním je volba obrazu „volná“ a řídí se zpravidla jen účelností a názorností.

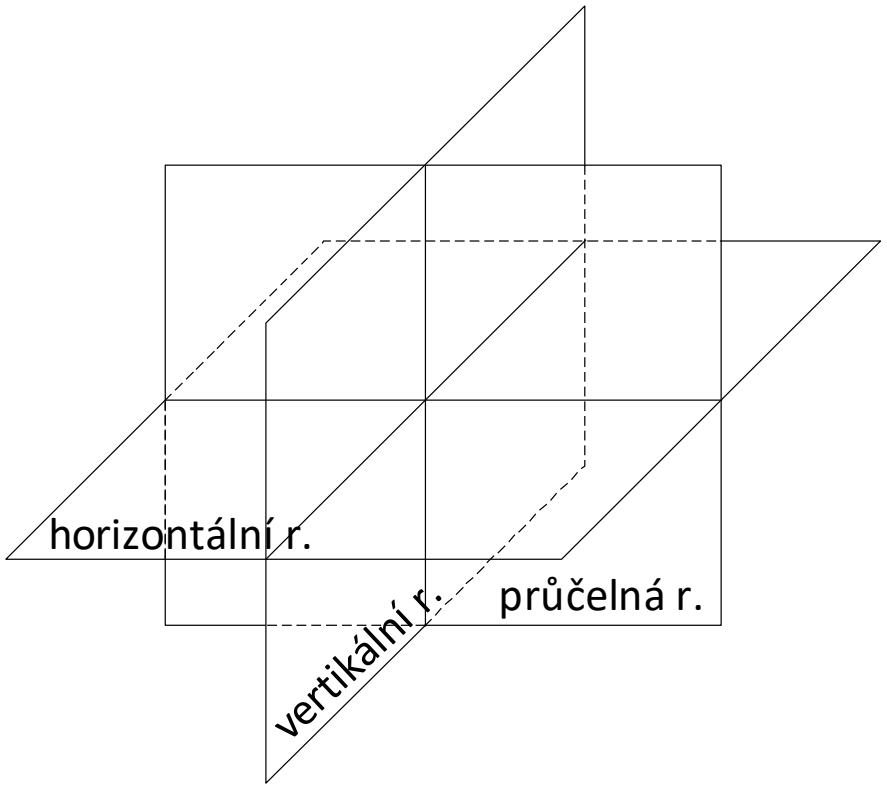
Takto zavedené RP **není vzájemně jednoznačným zobrazením** (**není** zobrazovací metodou). Proto VRP užíváme v případech, kdy nás nezajímá skutečná velikost objektů, ale pouze jejich vzájemné vztahy.

VOLNÉ ROVNOBĚŽNÉ PROMÍTÁNÍ

Za průmětnu volíme **svislou** rovinu (splývá s nákresnou).

- Přímky rovnoběžné s průmětnou = **průčelné,** přímky kolmé k průmětně = **hloubkové.**
- Roviny rovnoběžné s průmětnou = **roviny průčelné.**

Rovinné obrazce volíme ve vodorovných (**horizontálních**) nebo svislých (**vertikálních**) rovinách.



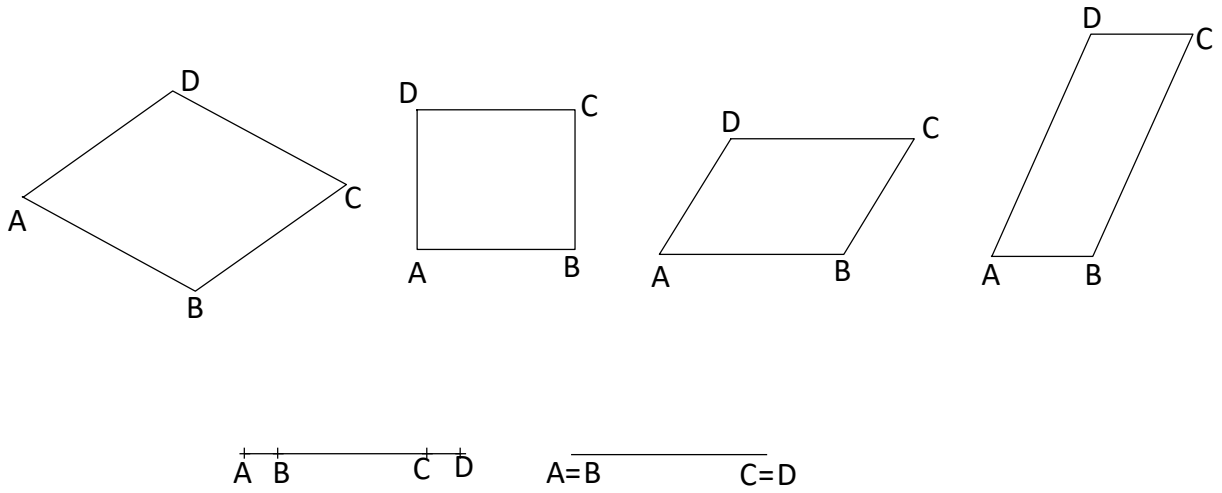
ZOBRAZENÍ ČTVERCE VE VRP

pravidla pro zobrazení ve VRP jsou zachována:

- délky stran *AD, BC* a *AB, CD* volíme libovolné, ale stejné
- přímky *AB, CD* a *AD, BC* musí být rovnoběžné

Proto kvůli **názornosti** obrazu zavádíme ještě dvě úmluvy:

1. Obrazy přímek kolmých k průmětně (hloubkových) kreslíme tak, aby svíraly s vodorovnou přímkou průmětny úhel 45°.
2. Obrazy úseček na hloubkových přímkách zkracujeme na polovinu jejich skutečné velikosti.

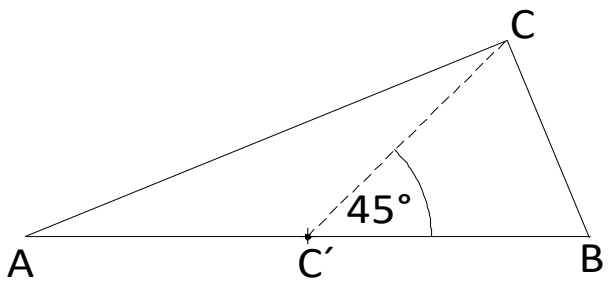


ZOBRAZENÍ ROVNOSTRANNÉHO TROJÚHELNÍKU VE VRP

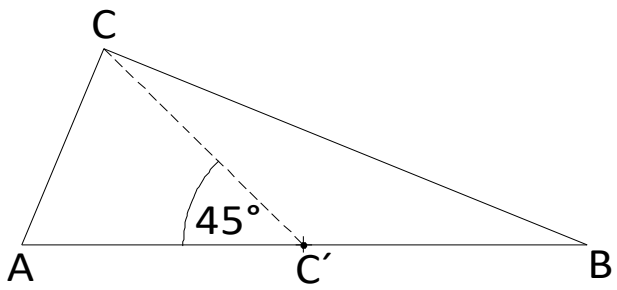
V průčelné poloze zvolíme stranu AB, tím se zachová její skutečná velikosti.

Výška (těžnice) na stranu c je hloubková přímka CC´, tudíž její obraz ve VRP svírá s obrazem přímky *AB* úhel velikosti 45° a délka obrazu úsečky CC´ je zkrácena na polovinu skutečné velikosti.

Podle toho jak naneseme 45° rozlišujeme **pohled zprava** a **pohled zleva.**



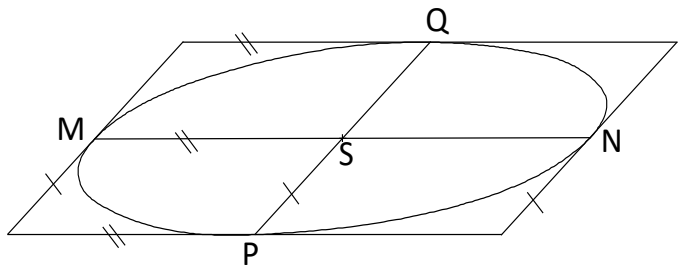
pohled zprava



pohled zleva

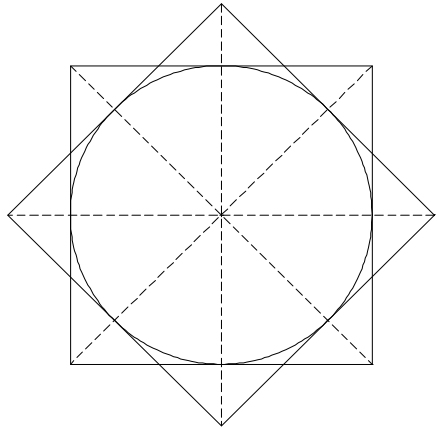
OBRAZ KRUŽNICE VE VRP

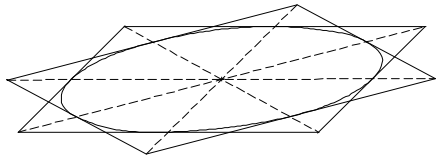
- Je-li rovina rovina kružnice promítací, pak je obrazem **úsečka.**
- Je-li kružnice v průčelné poloze, pak je obrazem **kružnice.**
- V ostatních případech je obrazem kružnice **elipsa** (kolmé průměry *MN*, *PQ* kružnice se zobrazí do sdružených průměrů elipsy a lze použít Rytzovu konstrukci).



Přibližné určení obrazu kružnice:

- Kružnici opíšeme dva čtverce, které jsou vzájemně otočené o 45°. Strany čtverců tvoří osm tečen kružnice a průsečíky stran čtverců s úhlopříčkami jsou body kružnice.
- Obraz kružnice (elipsu) vepíšeme do obrazů čtverců.



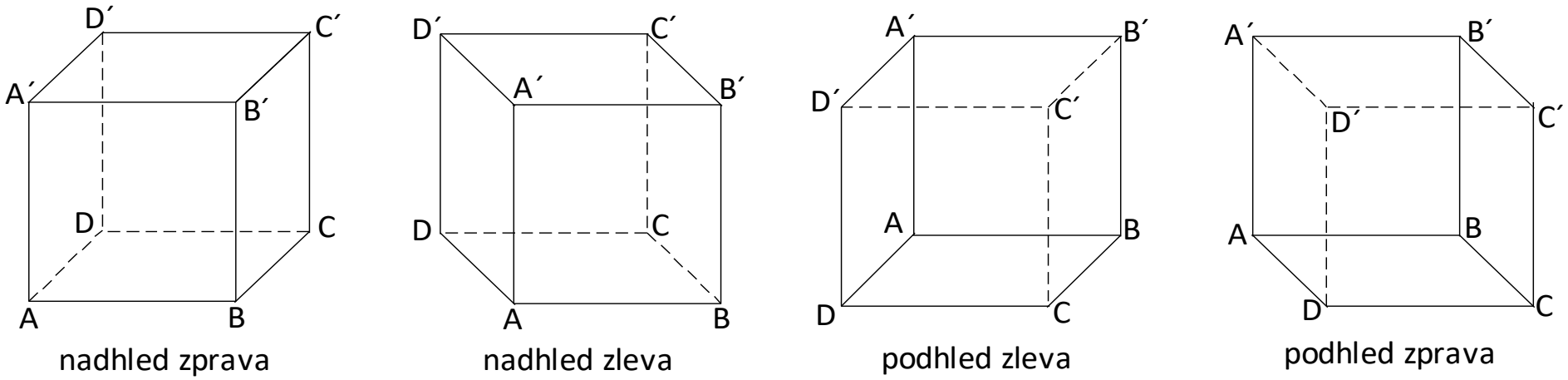


ZOBRAZENÍ TĚLES VE VRP

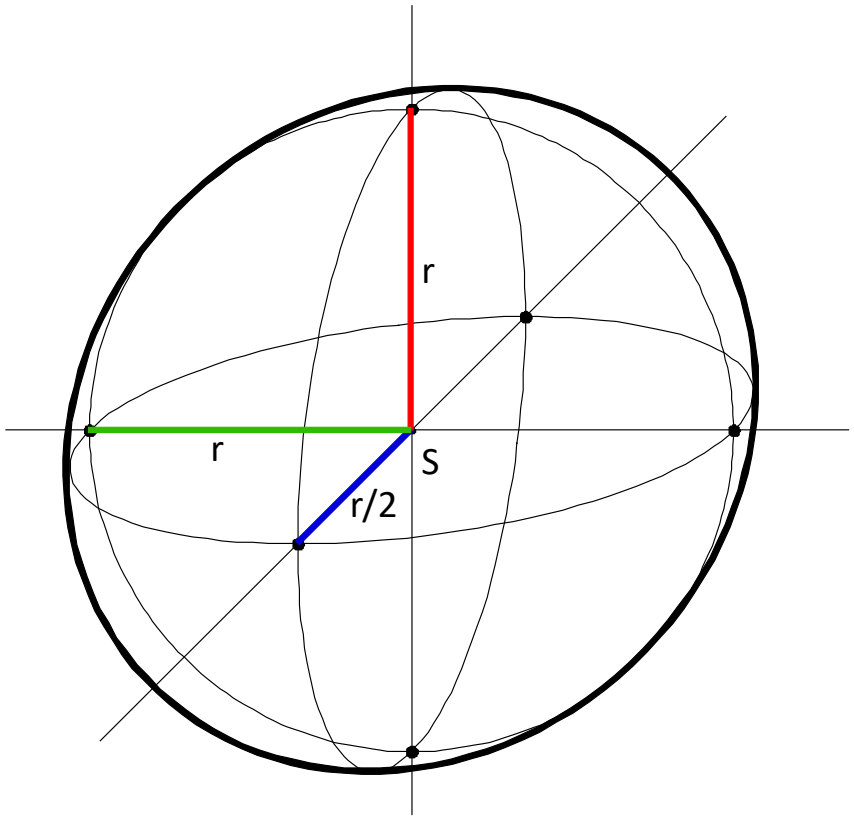
Zobrazujeme-li ve VRP tělesa, pak polohu tělesa volíme tak, aby jeho obraz ve VRP byl co nejnázornější a co nejjednodušeji sestrojitelný.

Tedy podstavu umísťujeme nejčastěji do vodorovné roviny a u hranatých těles volíme jednu hranu nebo stěnu v průčelné rovině.

Viditelnost hran výsledného obrazu tělesa určíme podle toho, zda je těleso zobrazeno v **nadhledu zprava**, **nadhledu zleva**, **podhledu zleva** nebo **podhledu zprava**.



KULOVÁ PLOCHA VE VRP

Kulová plocha se ve VRP zobrazí jako elipsa. Tato elipsa je **obálkou** obrazů tří obvodových kružnic kulové plochy, které leží v průčelné, vertikální a horizontální rovině.

V průčelné rovině je obrazem kružnice. Ve vertikální a horizontální rovině se pak na hloubkových přímkách délka poloměru zkrátí na polovinu. A elipsy v těchto rovinách jsou určeny sdruženými průměry.