PRAVOÚHLÁ AXONOMETRIE – POLOHOVÉ ÚLOHY, OBRAZ KRUŽNICE

POLOHOVÉ ÚLOHY

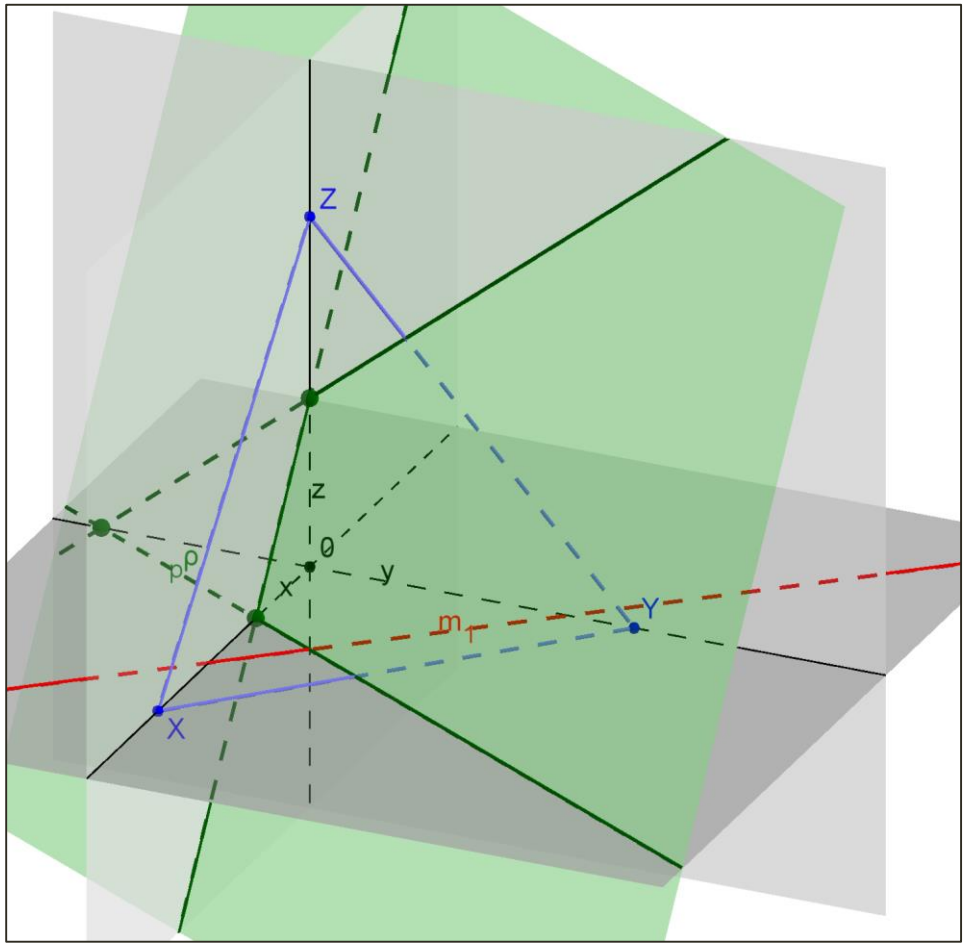
Princip řešení všech úloh je stejný jako u úloh v Mongeově promítání, protože obě promítací metody jsou pravoúhlá rovnoběžná promítání.

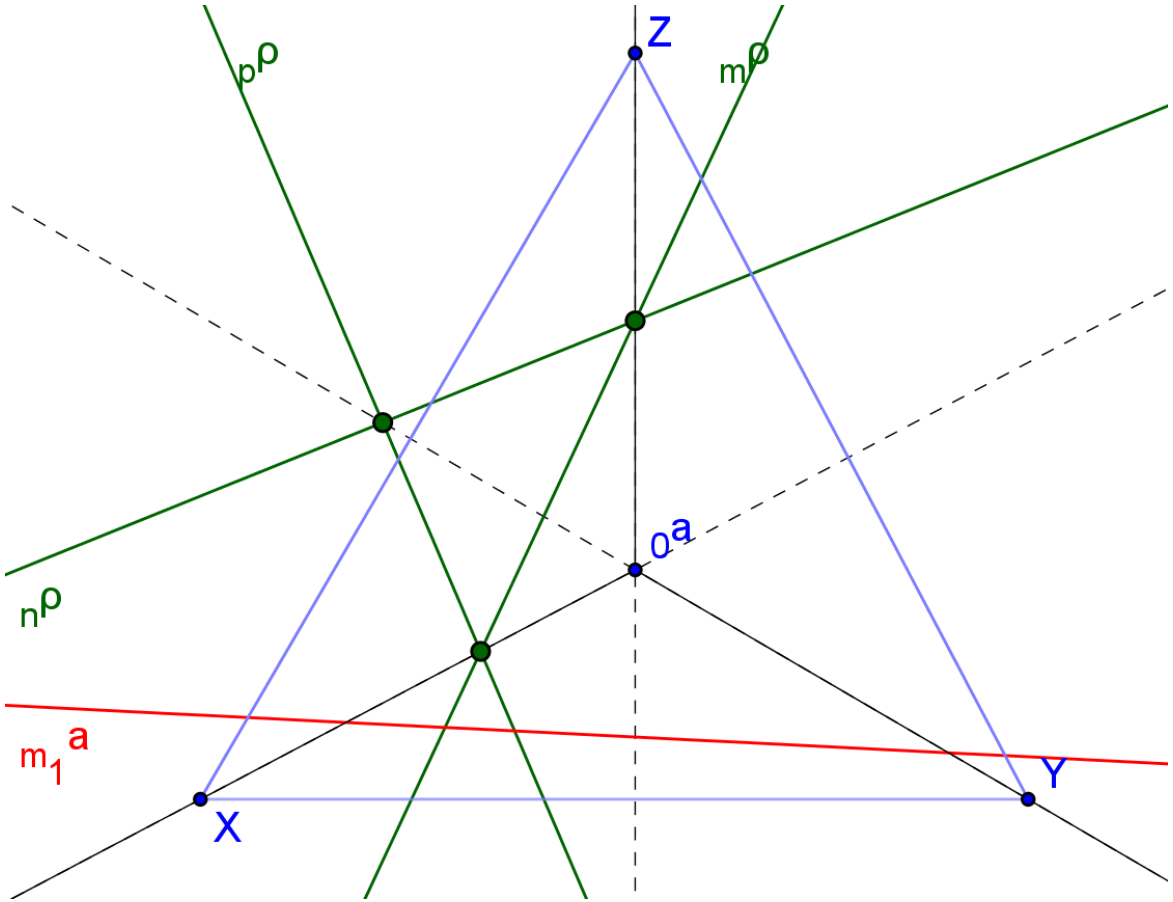
A. PŘÍMKA V ROVINĚ

Leží-li přímka v rovině, pak její stopníky leží na příslušných stopách roviny.

Tuto úlohu užíváme v případě, že je daný jeden průmět přímky v rovině a máme určit průmět chybějící nebo je-li rovina daná dvěma přímkami a naším úkolem je najít stopy této roviny.

Příklad: Sestrojte axonometrický průmět přímky *m*, která leží v rovině *ρ*, a je dán její půdorys.

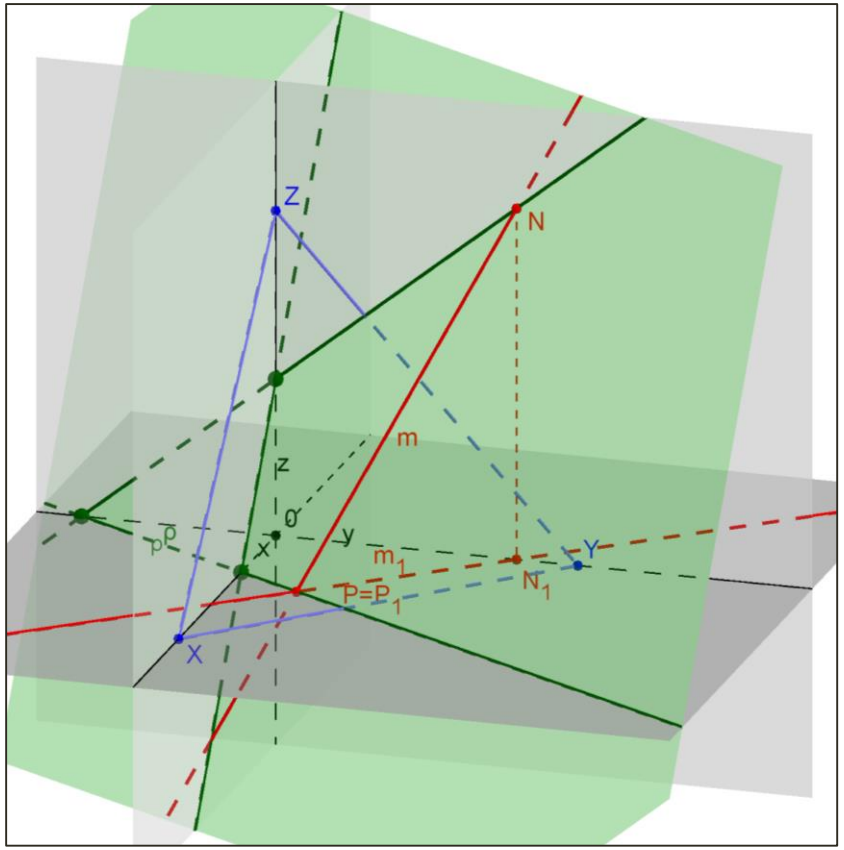


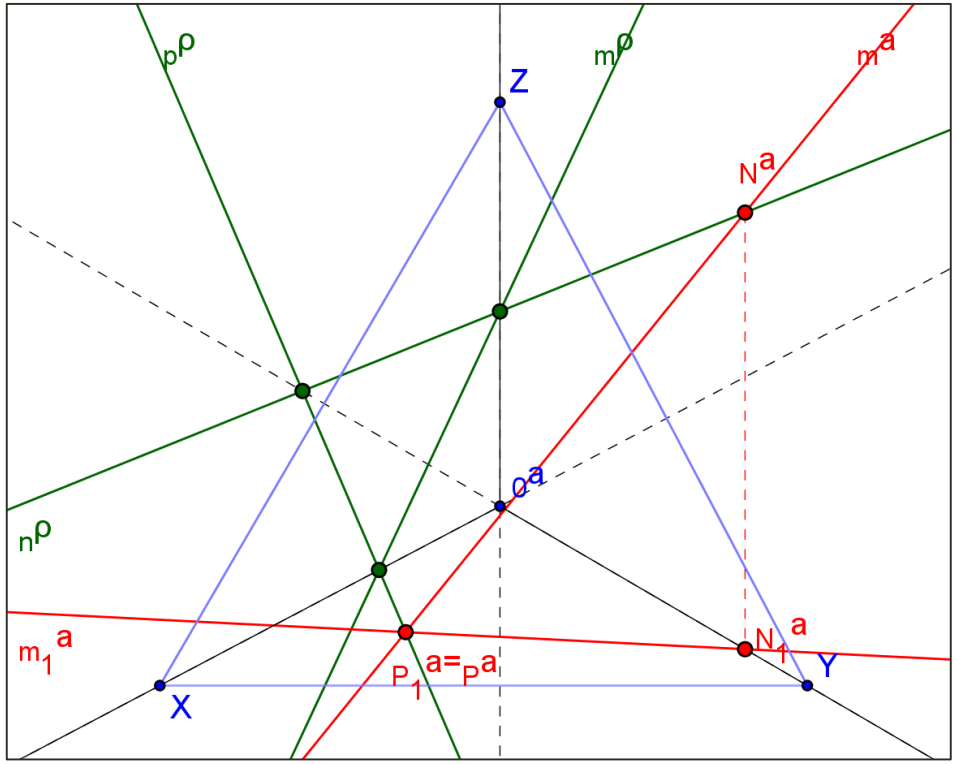


1. Určíme axonometrické půdorysy stopníků ax. půdorysu m_1 přímky ($P_1^a = m_1^a \cap p^\rho$, $N_1^a = m_1^a \cap y$).

2. Najdeme axonometrické průměty těchto stopníků ($P^a = P_1^a, N^a \in n^\rho$).

3. $m^a = P^a N^a$



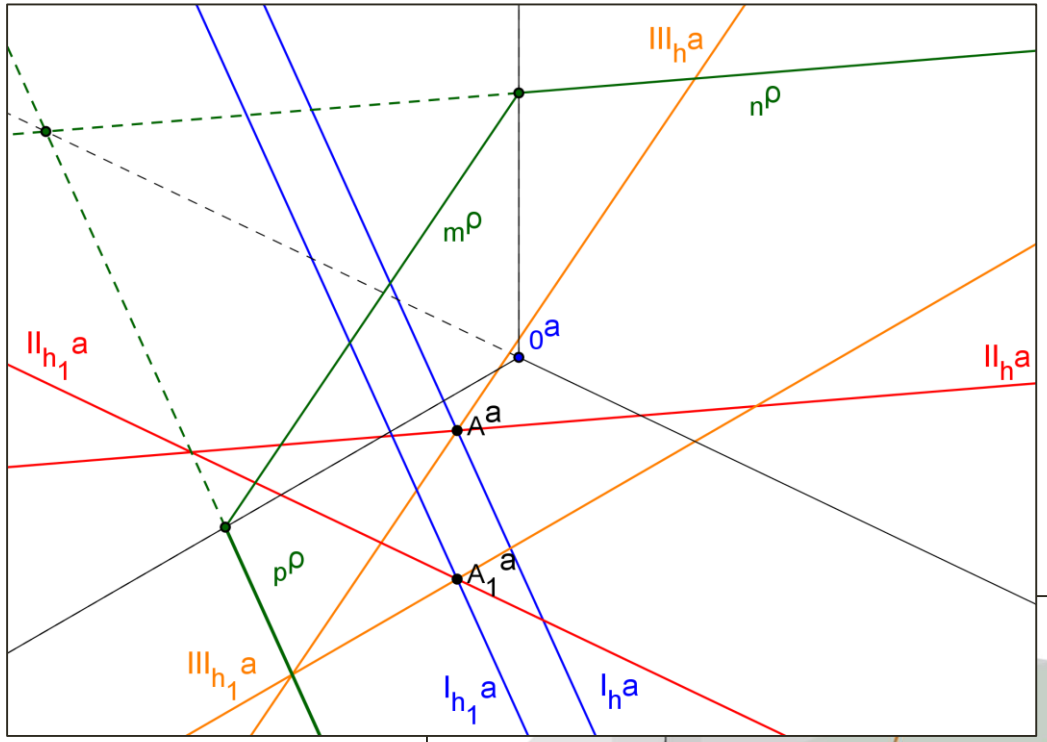


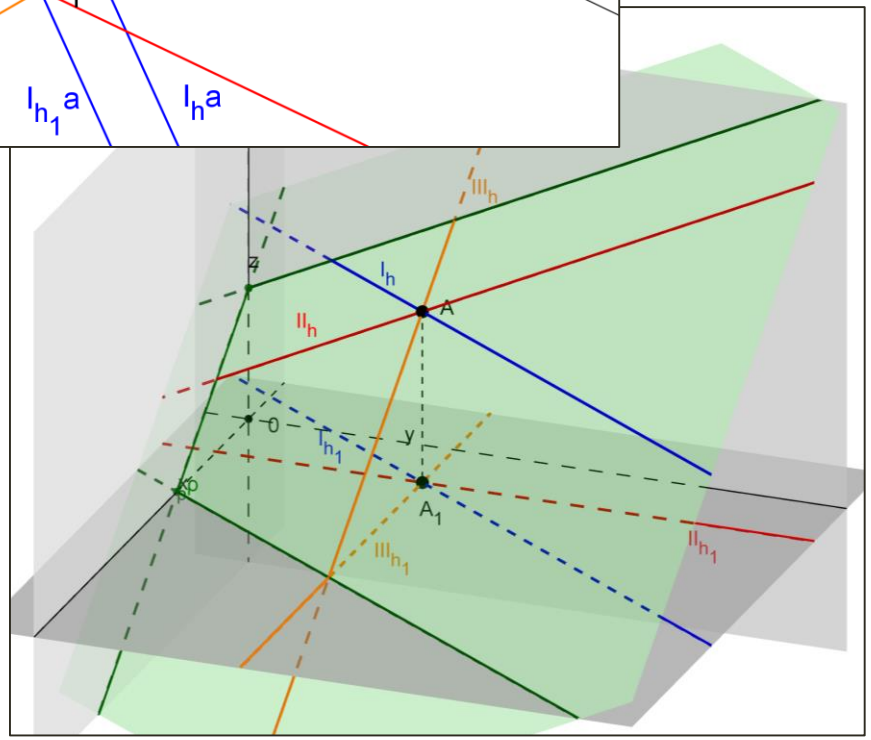
Hlavní přímky v rovině

Hlavní přímky v rovině jsou přímky, které leží v dané rovině a jsou rovnoběžné s pomocnou průmětnou.

- Hlavní přímky rovnoběžné s π se nazývají **hlavní přímky** **první osnovy** (hl. přímky prvního **řádu**) ${}^{I}h$ (${}^{I}h^{a} \parallel p^{\rho}$, ${}^{I}h_1^{a} \parallel p^{\rho}$).
- Hlavní přímky rovnoběžné s ν se nazývají **hlavní přímky** **druhé osnovy** (hl. přímky druhého **řádu**) ${}^{II}h$ (${}^{II}h^{a} \parallel n^{\rho}$, ${}^{II}h_1^{a} \parallel y$).
- Hlavní přímky rovnoběžné s μ se nazývají **hlavní přímky** **třetí osnovy** (hl. přímky třetího **řádu**) ${}^{III}h$ (${}^{III}h^{a} \parallel m^{\rho}$, ${}^{III}h_1^{a} \parallel x$).

Hlavní přímky leží v rovině, proto také jejich stopníky leží na příslušných stopách roviny.



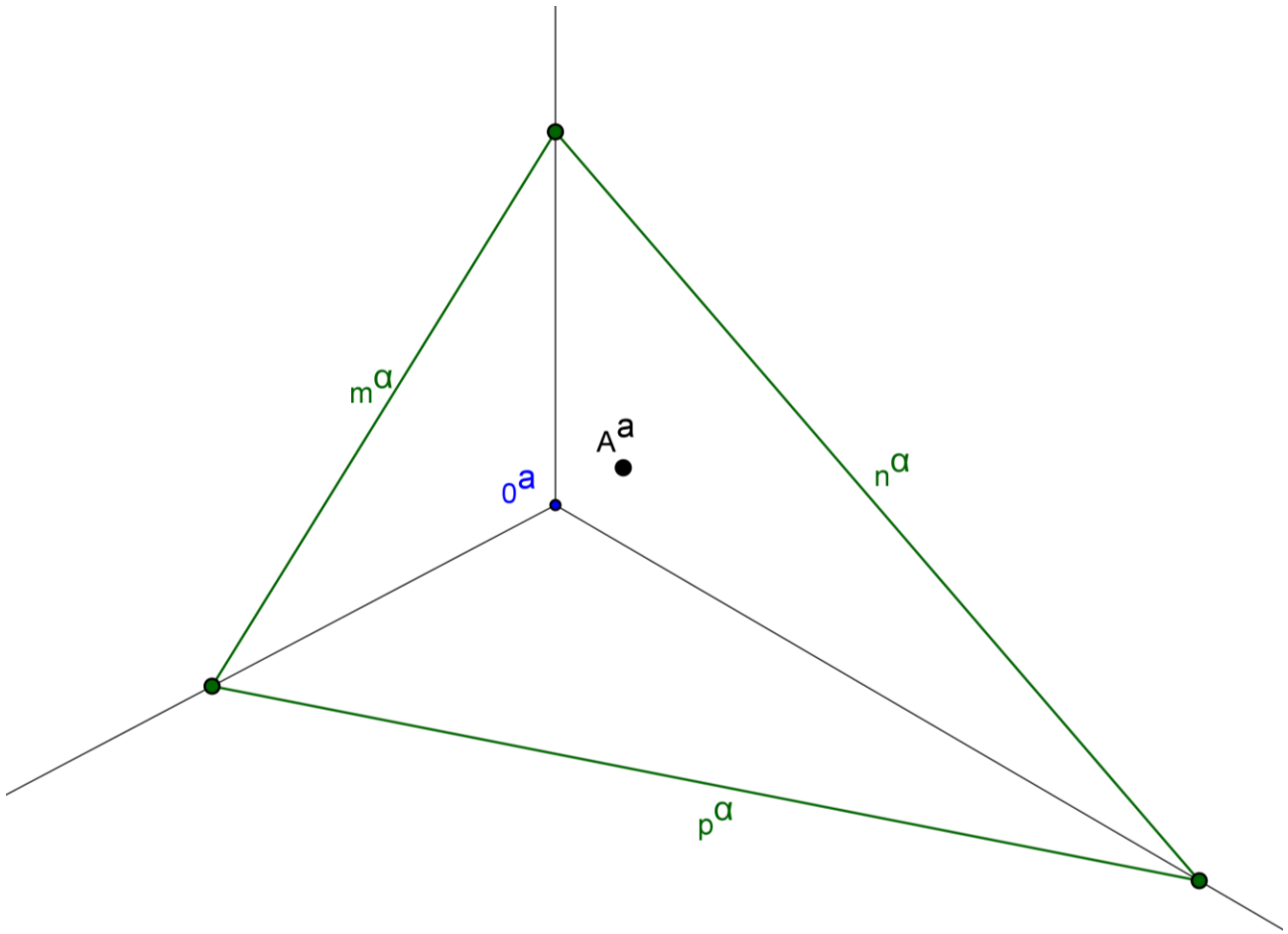


B. BOD V ROVINĚ

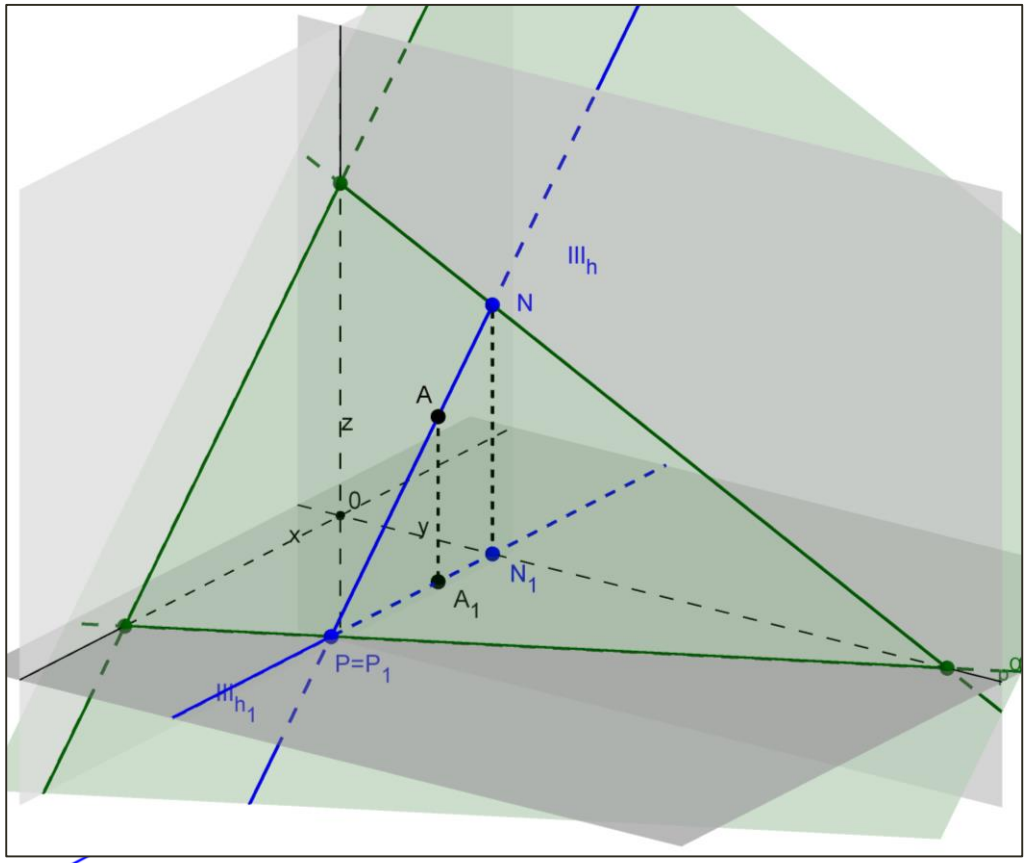
Tuto úlohu používáme pokud je třeba najít chybějící průmět bodu v rovině.

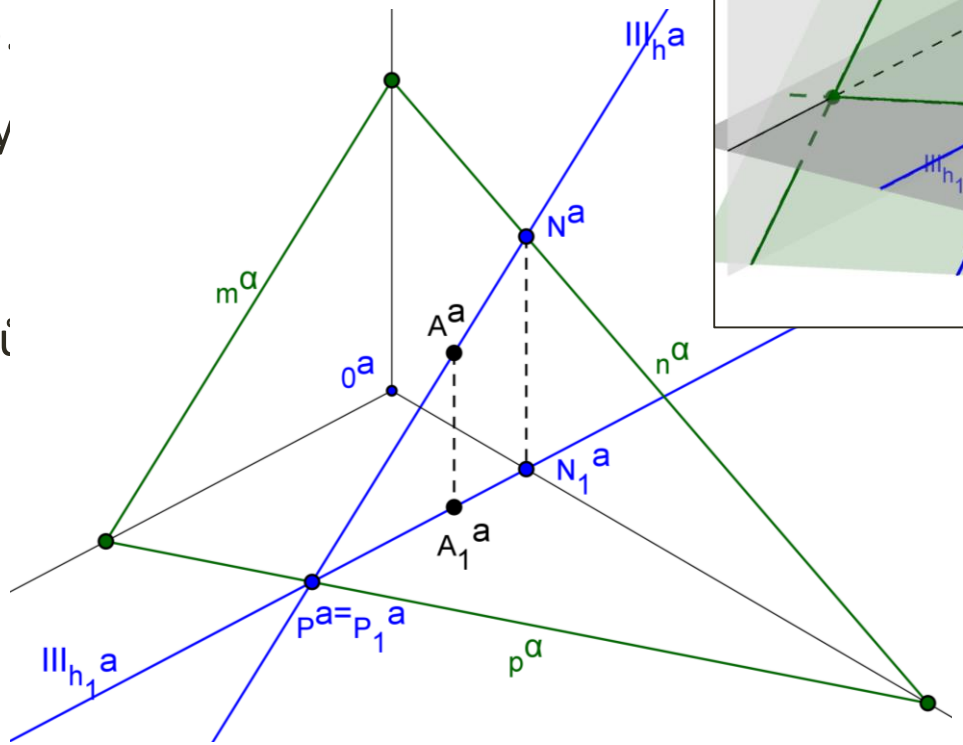
- Bodem nejdříve proložíme libovolnou přímku roviny (nejčastěji se využívají hlavní přímky roviny).
- Najdeme pomocí stopníků chybějící průmět této pomocné přímky a na tomto sestrojeném průmětu přímky musí ležet hledaný průmět bodu.

Příklad: Určete axonometrický půdorys bodu A, který leží v rovině α.



1. Bodem A proložíme libovolnou hlavní přímku např. ${}^{III}h$ $({}^{III}h^a \parallel m^\alpha, A \in {}^{III}h^a)$
2. Určíme stopníky přímky ${}^{III}h^a$ $({}^{III}h^a \cap p^\alpha = P^a, {}^{III}h^a \cap n^\alpha = N^a)$.
3. Najdeme ax. půdorysy stopníků $(P^a = P_1^a, N_1^a \in y)$
4. Spojením ax. půdorysů stopníků získáme ${}^{III}h_1^a \parallel x$.
5. $A_1^a \in {}^{III}h_1^a$





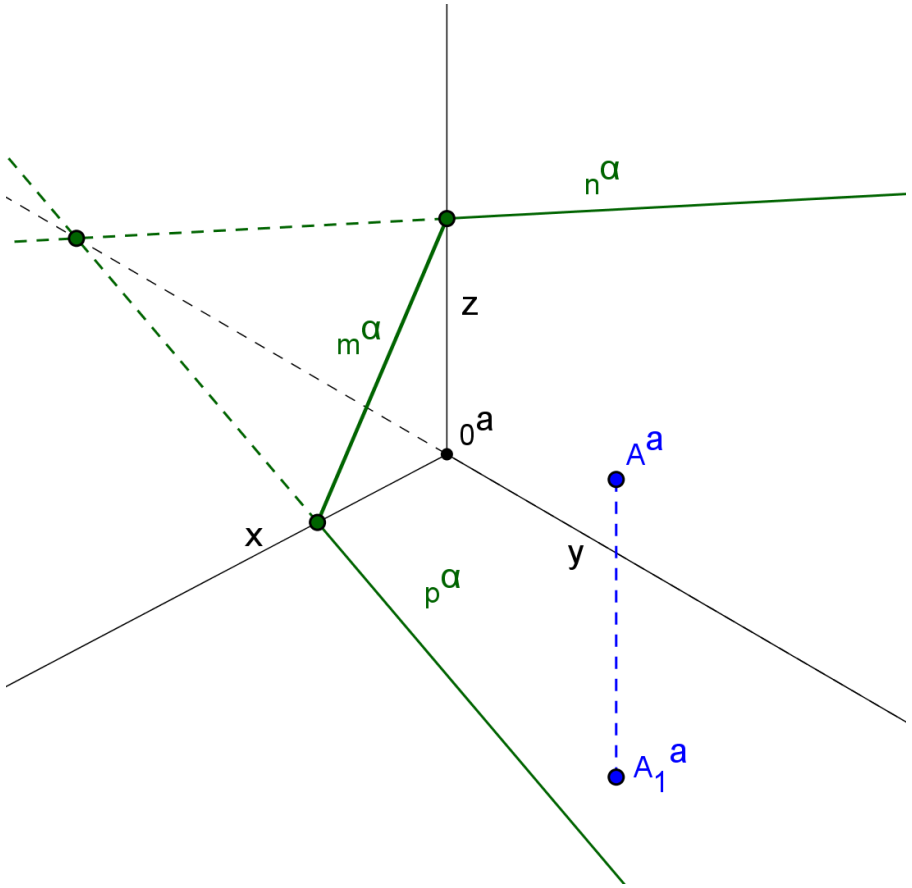
C. ROVINA ROVNOBĚŽNÁ S DANOU ROVINOU

Jsou-li roviny rovnoběžné, pak jsou rovnoběžné také jejich stopy.

Hledáme-li rovinu rovnoběžnou s danou rovinou tak, aby procházela daným bod, vedeme bodem hlavní přímky hledané roviny, protože tyto hlavní přímky jsou rovnoběžné se stopami hledané roviny a ty jsou zase rovnoběžné se stopami roviny dané.

Stopníky hlavní přímky leží na stopách hledané roviny.

Příklad: Daným bodem A veďte rovinu β rovnoběžnou s rovinou α.



1. Bodem A vedeme libovolnou hlavní přímku roviny β. V řešení je uvedena hlavní přímka 1. osnovy

$^{I}h^{a\beta} \parallel p^{\rho} \wedge A^{a} \in {}^{I}h^{a\beta}$

$^{I}h_1^{a\beta} \parallel p^{\rho} \wedge A_1^{a} \in {}^{I}h_1^{a\beta}$

2. Určíme stopníky hlavní přímky:

$^{I}h_1^{a\beta} \cap x = M_1^{a\beta} \rightarrow M^{a\beta} \in {}^{I}h^{a\beta}$

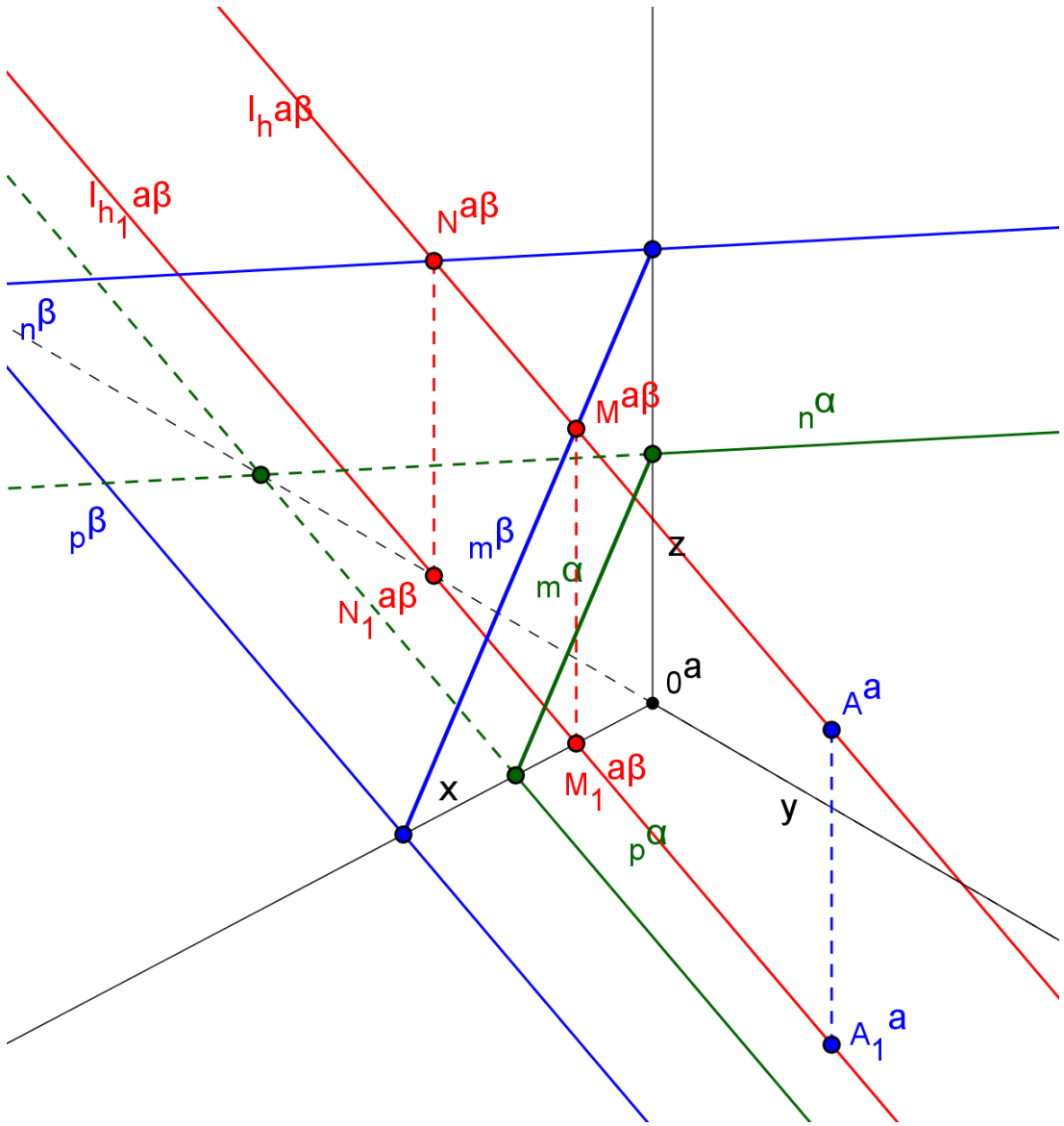
$^{I}h_1^{a\beta} \cap y = N_1^{a\beta} \rightarrow N^{a\beta} \in {}^{I}h^{a\beta}$

3. Stopníky vedeme stopy roviny β rovnoběžně se stopami roviny α.

$M^{a\beta} \in m^{\beta}, m^{\beta} \parallel m^{\alpha}$

$N^{a\beta} \in n^{\beta}, n^{\beta} \parallel n^{\alpha}$

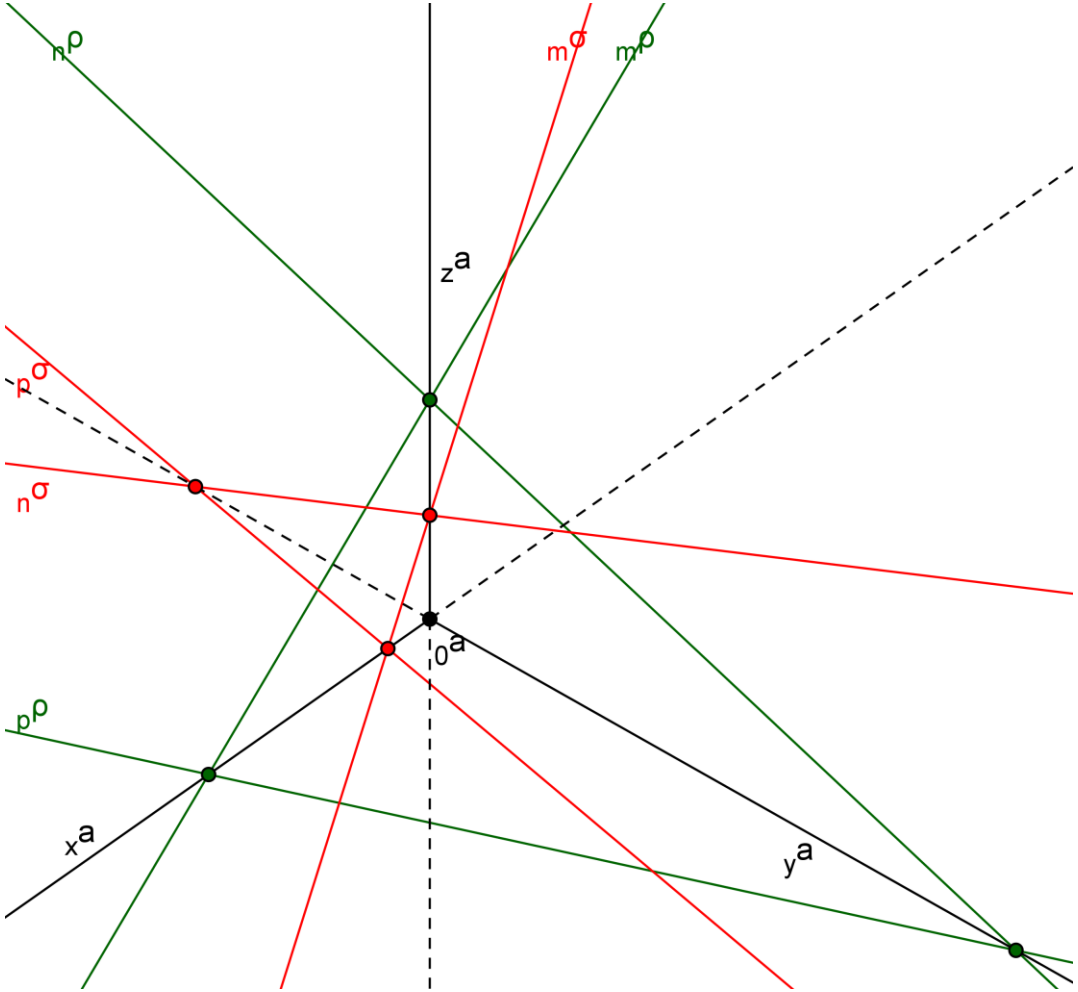
$p^{\beta} \parallel p^{\alpha}$ … prochází průsečíkem bokorysné stopy s osou *x* a průsečíkem nárysné stopy s osou *y*



D. PRŮSEČNICE DVOU ROVIN

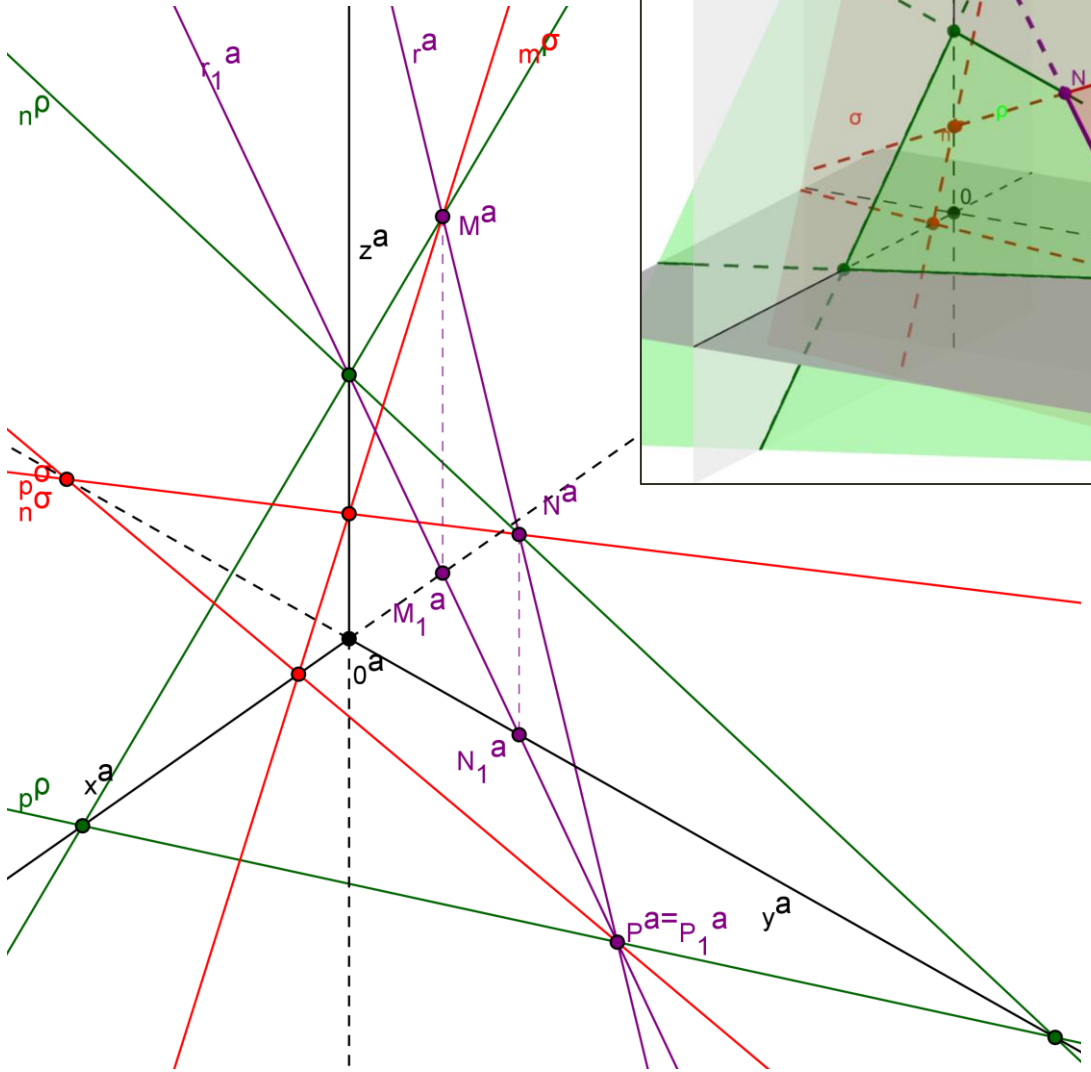
Průsečnice dvou rovin je přímka, která leží v obou rovinách, proto půdorysný stopník průsečnice je průsečík půdorysných stop rovin, nárysný stopník průsečík nárysných stop a bokorysný stopník je průsečík bokorysných stop.

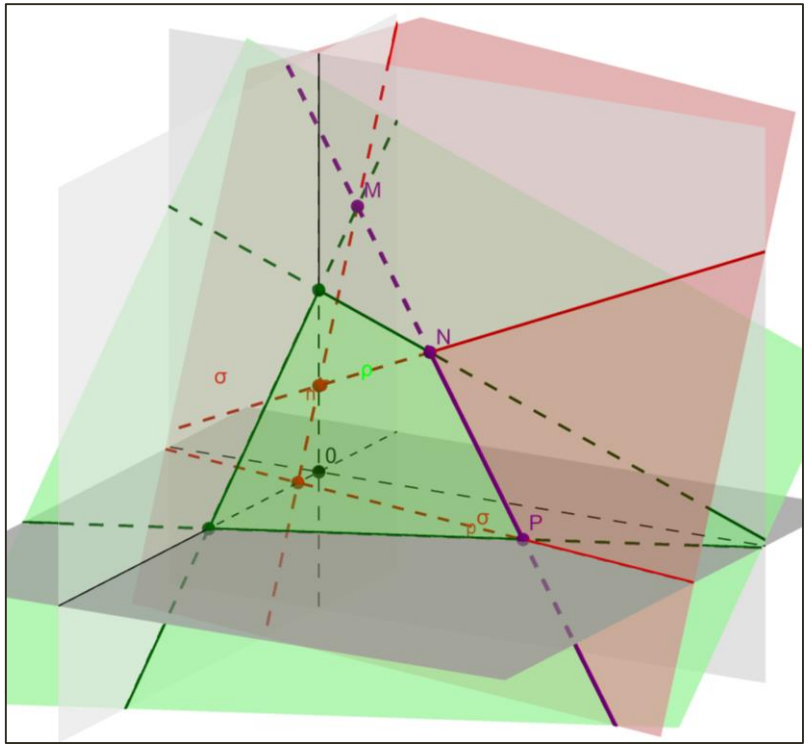
Příklad: Sestrojte průsečnici rovin ρ a σ.



1. Průsečík půdorysných stop je půdorysný stopník průsečnice.
2. Průsečík nárysných stop je ax. průmět nárysného stopníku průsečnice. Jeho ax. půdorys leží na ose y.
3. Průsečík bokorysných stop je ax. průmět bokorysného stopníku průsečnice. Jeho ax. půdorys leží na ose x.
4. Spojením ax. průmětů získáme ax. průmět průsečnice. Spojením ax. půdorysů sestrojíme ax. půdorys průsečnice.

K sestrojení průmětů průsečnice stačí průměty dvou stopníků.



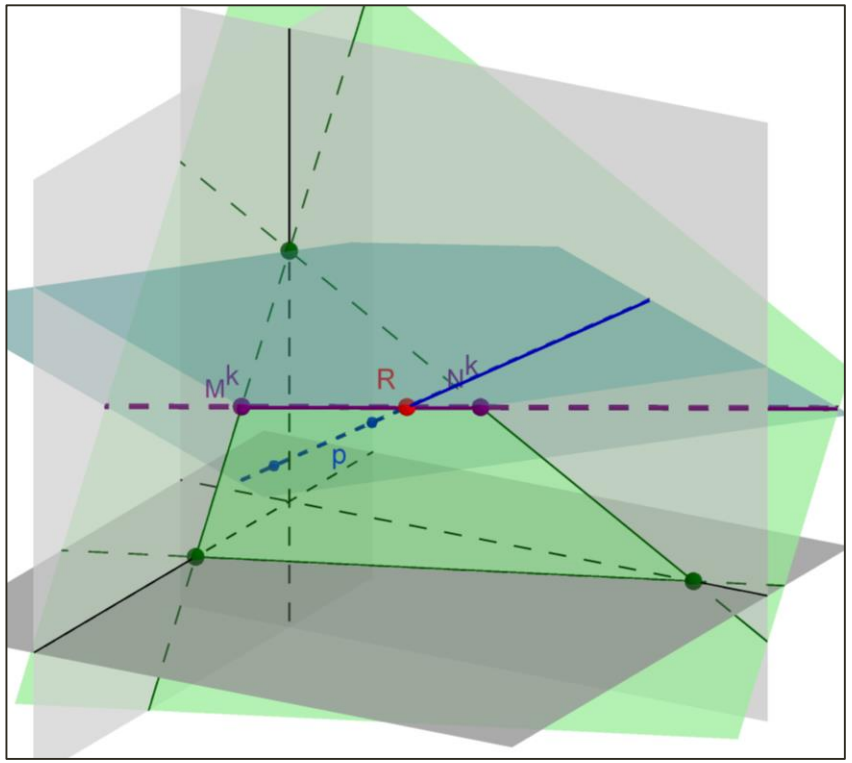


E. PRŮSEČÍK PŘÍMKY S ROVINOU

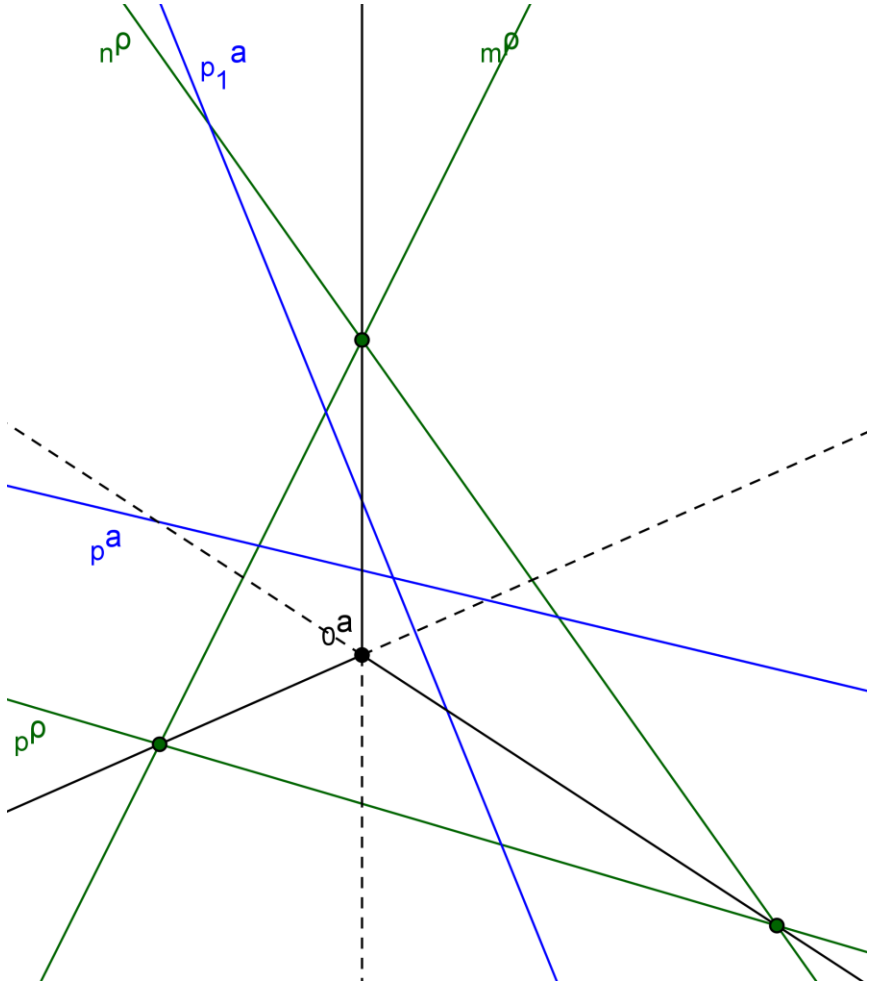
Stejně jako v Mongeově promítání používáme k určení průsečíku přímky s rovinou tzv. **krycí** přímku.

Jedem z průmětů krycí přímky se překrývá s příslušným průmětem dané přímky.

Průsečík přímky s rovinou je zároveň také průsečíkem přímky s krycí přímkou.

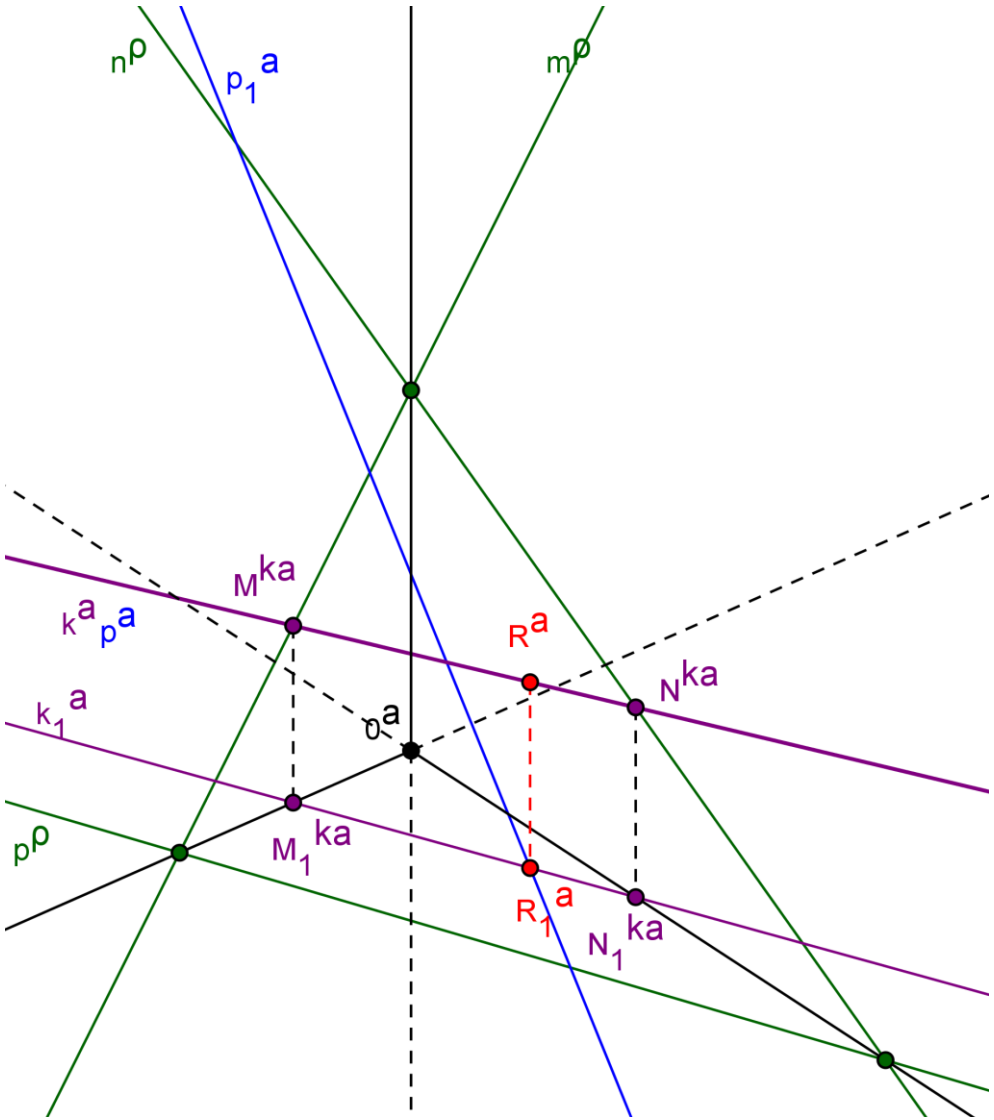


Příklad: Sestrojte průsečík přímky *p* s rovinou *ρ*.



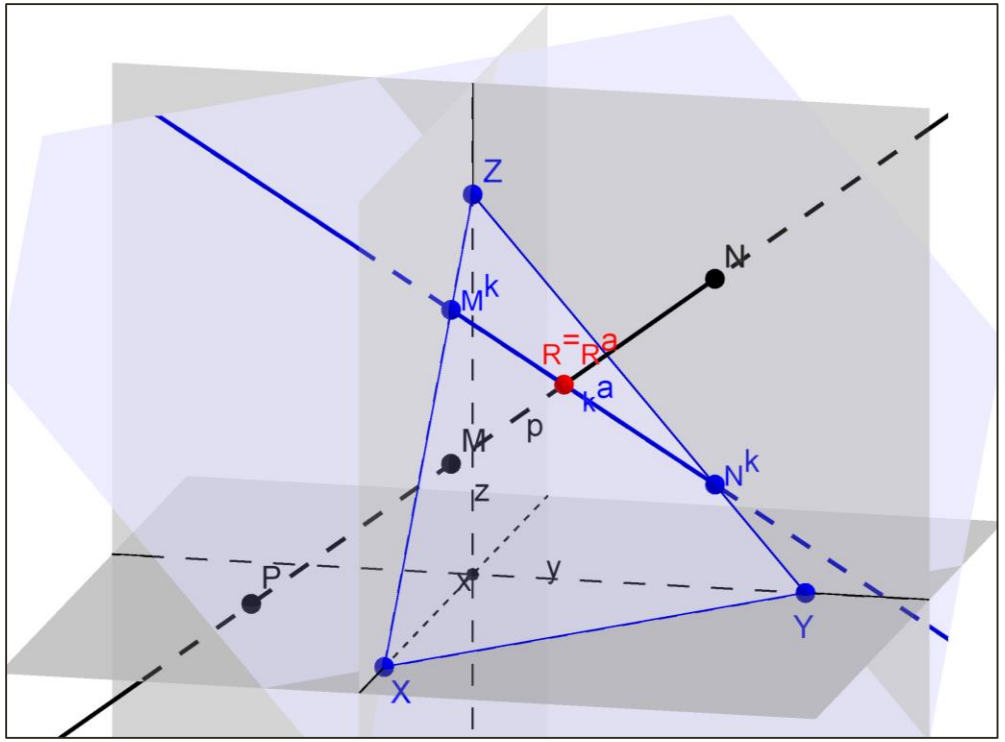
1. Zvolíme průmět krycí přímky, buď axonometrický nebo ax. půdorys tak, aby se překrýval s příslušným průmětem dané přímky.

   $k^a = p^a$… překrývají se ax. průměty přímek
2. Průsečíky ax. průmětu krycí přímky se stopami jsou ax. průměty stopníků krycí přímky: $M^{ka} = k^a \cap m^\rho, N^{ka} = k^a \cap n^\rho$, $P^{ka} = k^a \cap p^\rho$
3. Určíme ax. půdorysy stopníků: $P_1^{ka} \equiv P^{ka}, M_1^{ka} \in x, N_1^{ka} \in y$
4. Ax. půdorys krycí přímky: $\{P_1^{ka}, N_1^{ka}, M_1^{ka}\} \subset k_1^a$
5. Průsečík $R_1^a = k_1^a \cap p_1^a$ je ax. půdorys průsečíku.
6. Ax. průmět průsečíku R^a leží na $k^a = p^a$.

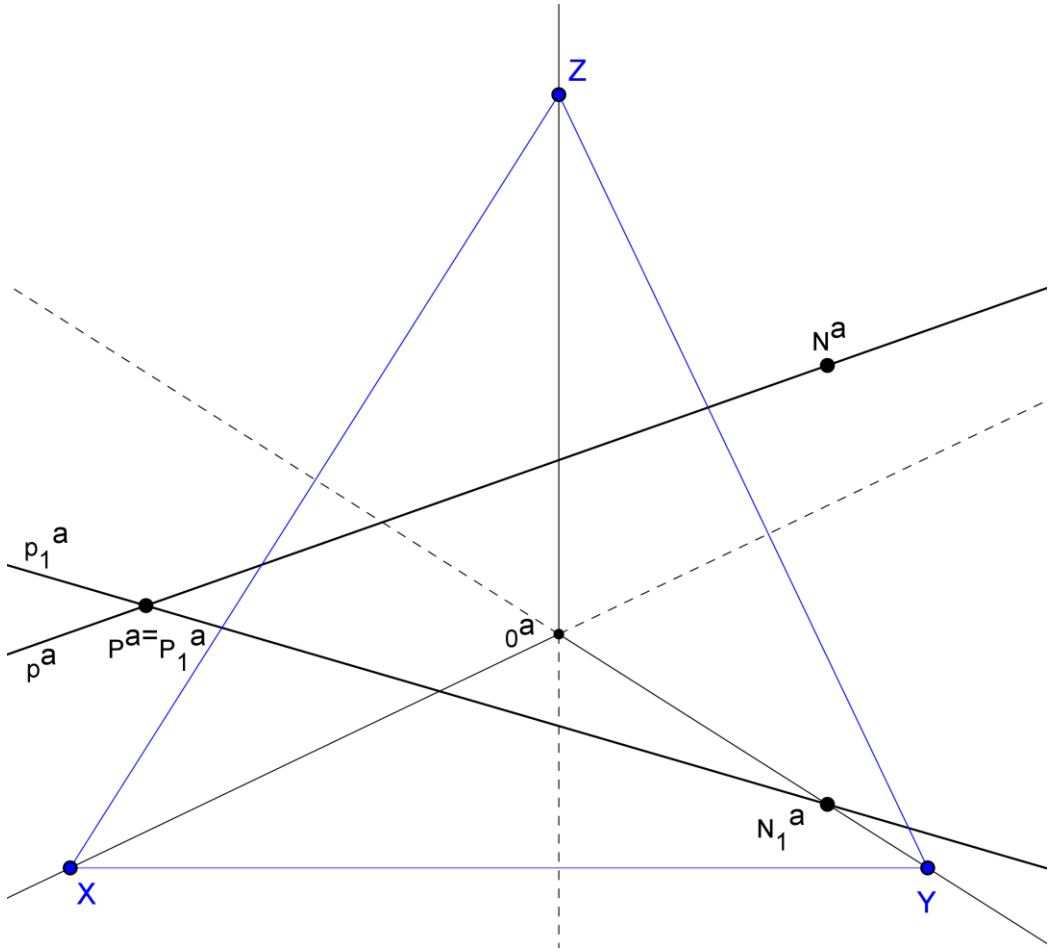


Pomocí úlohy „průsečík přímky s rovinou“ určujeme **axonometrický stopník** přímky.

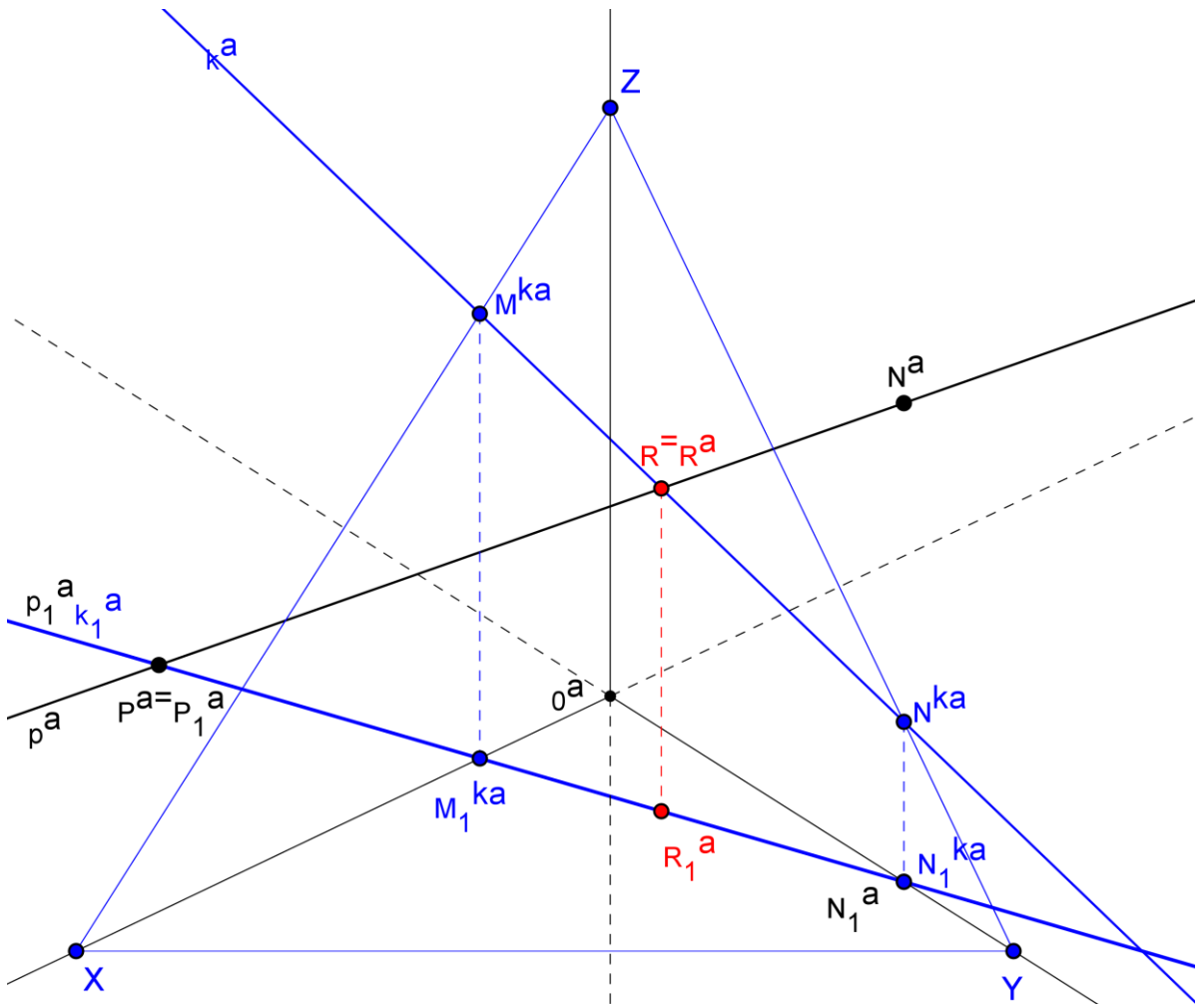
Axonometrický stopník přímky je průsečík přímky s axonometrickým trojúhelníkem, protože strany axonometrického trojúhelníku jsou v podstatě stopy axonometrické průmětny.



Příklad: Určete axonometrický stopník přímky p.



1. Zvolíme průmět krycí přímky *k*, např. axonometrický půdorys krycí přímky se překrývá s axonometrickým půdorysem přímky *p*: $k_1^a = p_1^a$
2. Ax. půdorysy krycí přímky jsou průsečíky os *x* a *y* s k_1^a: $M_1^{ka} = x \cap k_1^a$, $N_1^{ka} = y \cap k_1^a$.
3. Axonometrické průměty stopníků leží na stranách axonometrického trojúhelníku: $M^{ka} \in XZ, N^{ka} \in YZ$.
4. Ax. průmět krycí přímky $k^a = N^{ka}M^{ka}$.
5. Ax. průmět ax. stopníku: $R^a = k^a \cap p^a$.
6. Ax. půdorys R_1^a ax. stopníku leží na p_1^a.



METRICKÉ ÚLOHY V ROVINÁCH (*xy*), (*yz*), (*zx*) A ROVINÁCH ROVNOBĚŽNÝCH

Rovinné úlohy v souřadnicových rovinách řešíme **otočením** souřadnicové roviny do axonometrické průmětny.

- Osou otáčení je vždy jedna strana axonometrického trojúhelníku (XY, YZ, ZX) podle toho kterou souřadnicovou rovinu otáčíme.
- Do axonometrické průmětny vždy nejprve otočíme počátek soustavy souřadnic.
- Mezi axonometrickými půdorysy bodů a jejich otočenými průměty platí **osová afinita**. Osou afinity je strana axonometrického trojúhelníka, kolem které otáčíme souřadnicovou rovinu.
- V otočení vyřešíme rovinnou úlohu a výsledek otočíme zpět.

ZOBRAZENÍ KRUŽNICE V ROVINĚ (xy), (yz), (xz) A ROVINÁCH ROVNOBĚŽNÝCH

Obrazem kružnice v PA může být:

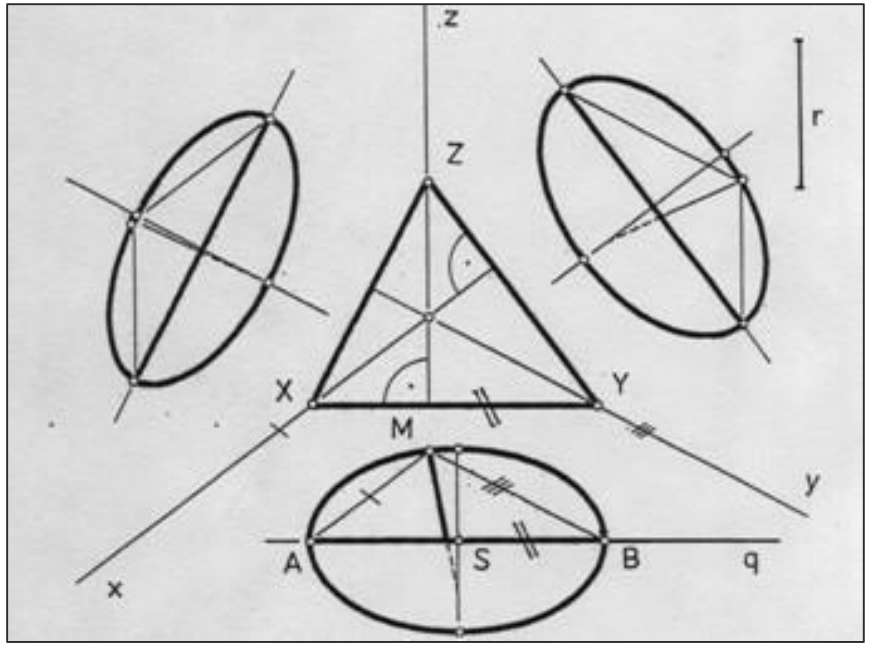
1. **Kružnice**, pokud je rovina kružnice rovnoběžná s průmětnou.
2. **Úsečka**, pokud je rovina kružnice kolmá k průmětně .
3. **Elipsa**, pokud je rovina kružnice v obecné poloze.

Průměry kružnice, které jsou **rovnoběžné** se souřadnicovými osami ležícími v rovině kružnice, se zobrazí do sdružených průměrů elipsy, protože souřadnicové osy jsou kolmé, stejně jako sdružené průměry kružnice.

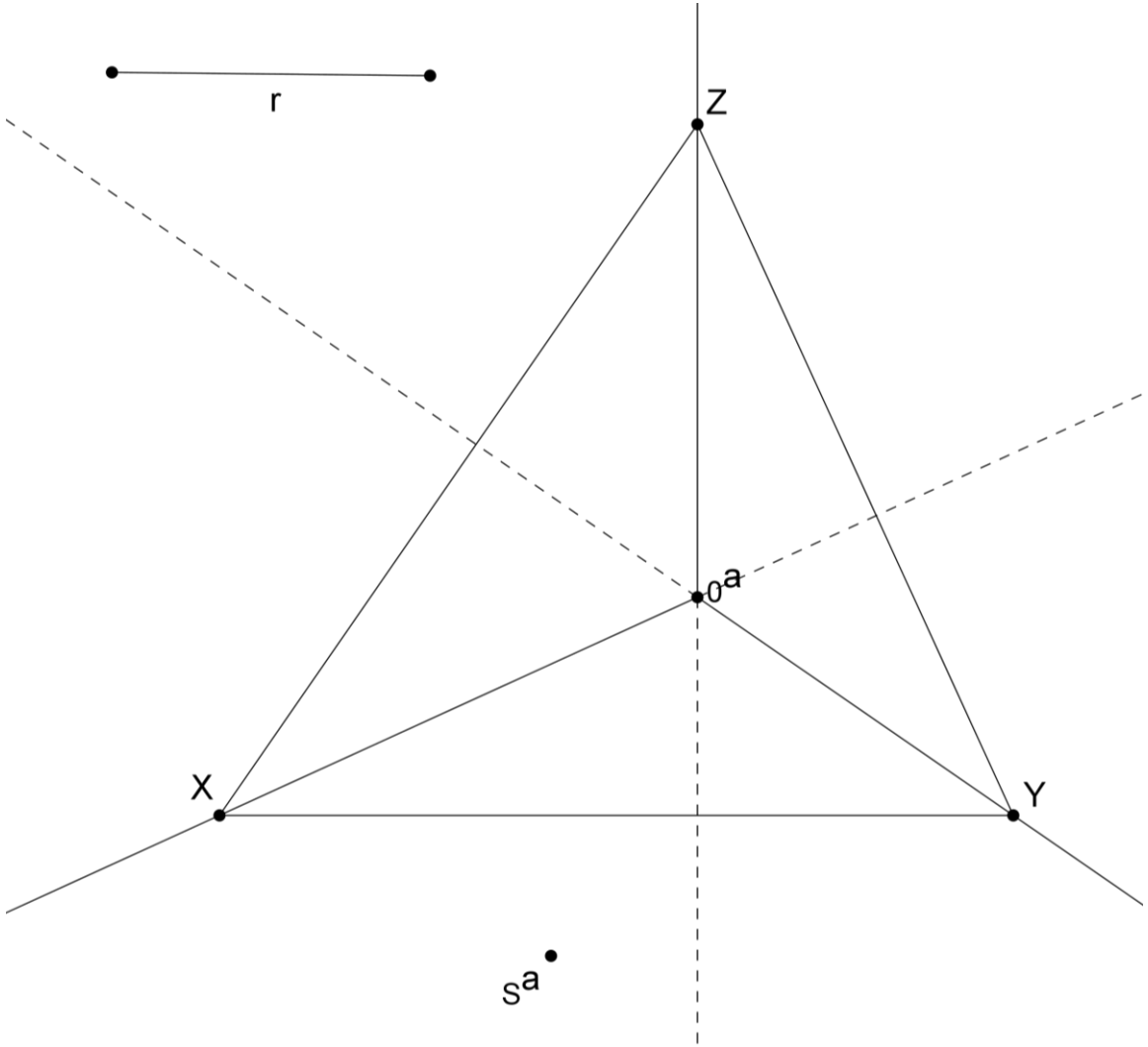
Průměr kružnice, ležící v souřadnicové rovině, rovnoběžný se stranou axonometrického trojúhelníka se promítne do hlavní osy elipsy, do které se zobrazí kružnice.

Díky zachování rovnoběžnosti, najdeme další bod kružnice na rovnoběžkách vedených hlavními vrcholy elipsy s osami ležícími v rovině kružnice (ve skutečnosti jsou osy na sebe kolmé, stejně jako spojnice bodu na Thaletově kružnici s koncovými body jejího průměru), tak získáme obecný bod elipsy.

Užitím proužkové konstrukce (známe hlavní vrcholy elipsy a obecný bod elipsy) zjistíme délku vedlejší poloosy a dorýsujeme elipsu.



Příklad: Sestrojte kružnici se středem S a poloměrem r, ležící v půdorysně.

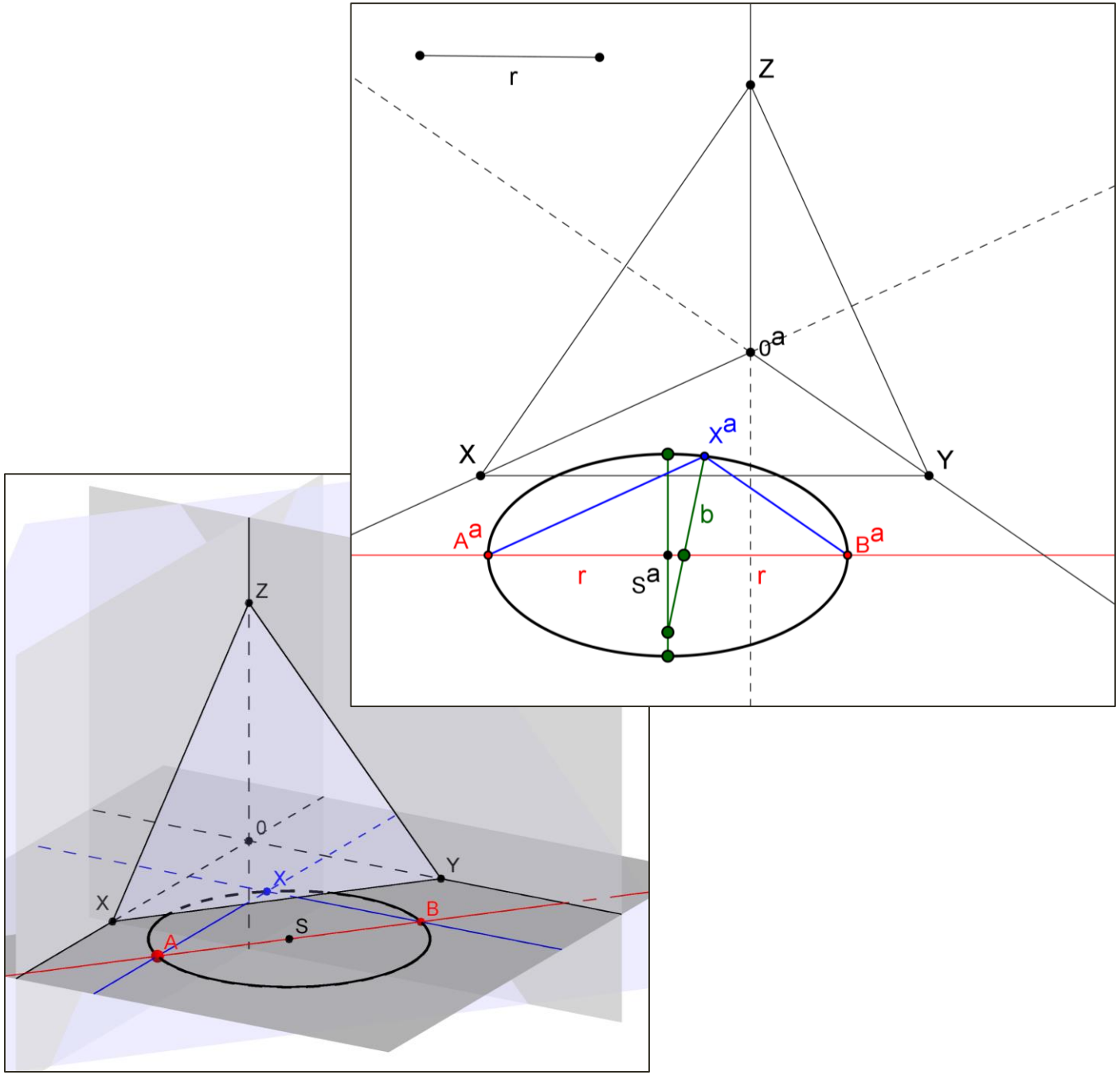


Protože kružnice leží v půdorysně bodem S^a vedeme rovnoběžku se stranou XY axonometrického trojúhelníka (průsečnice ax. průmětny s půdorysnou).

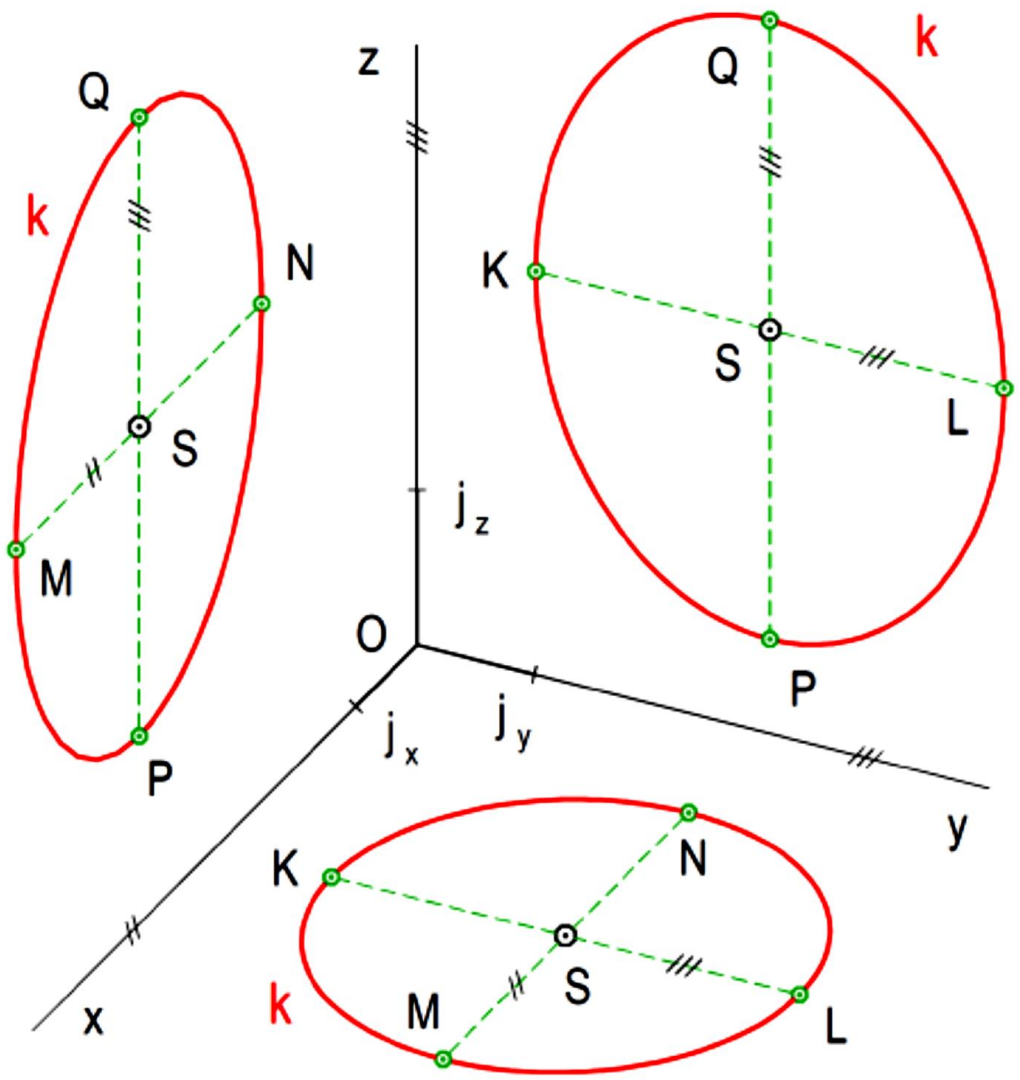
Na této rovnoběžce se zachová délka poloměru kružnice – získáme hlavní vrcholy A^a, B^a elipsy, do které se promítá kružnice.

V prostoru je úsečka *AB* průměrem elipsy a kružnice je pak Thaletovou kružnicí nad průměrem *AB*, tedy je-li bod *X* na kružnici, pak $\measuredangle AXB$ je pravý. Souřadnicové osy *x, y* tak svírají pravý úhel a proto vrcholy A^a, B^a elipsy vedeme rovnoběžky s průměty os x^a, y^a a tyto se protnou v bodě elipsy X^a.

Tím máme hlavní vrcholy A^a, B^a elipsy a obecný bod elipsy X^a a k sestrojení vedlejších vrcholů elipsy použijeme proužkovou konstrukci.



Je-li dán střed kružnice ležící v souřadnicové rovině, pak sdružené průměry elipsy leží na rovnoběžkách s axonometrickými průměty souřadnicových os.



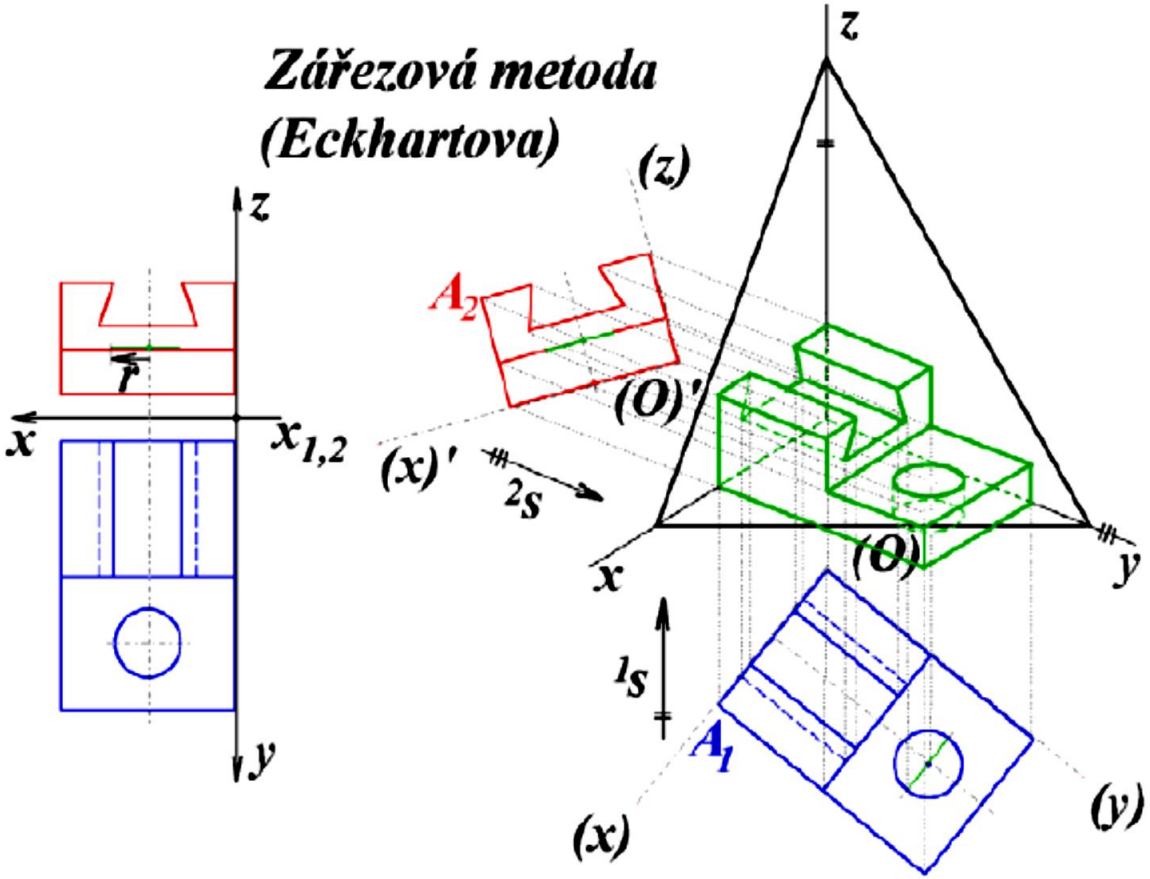
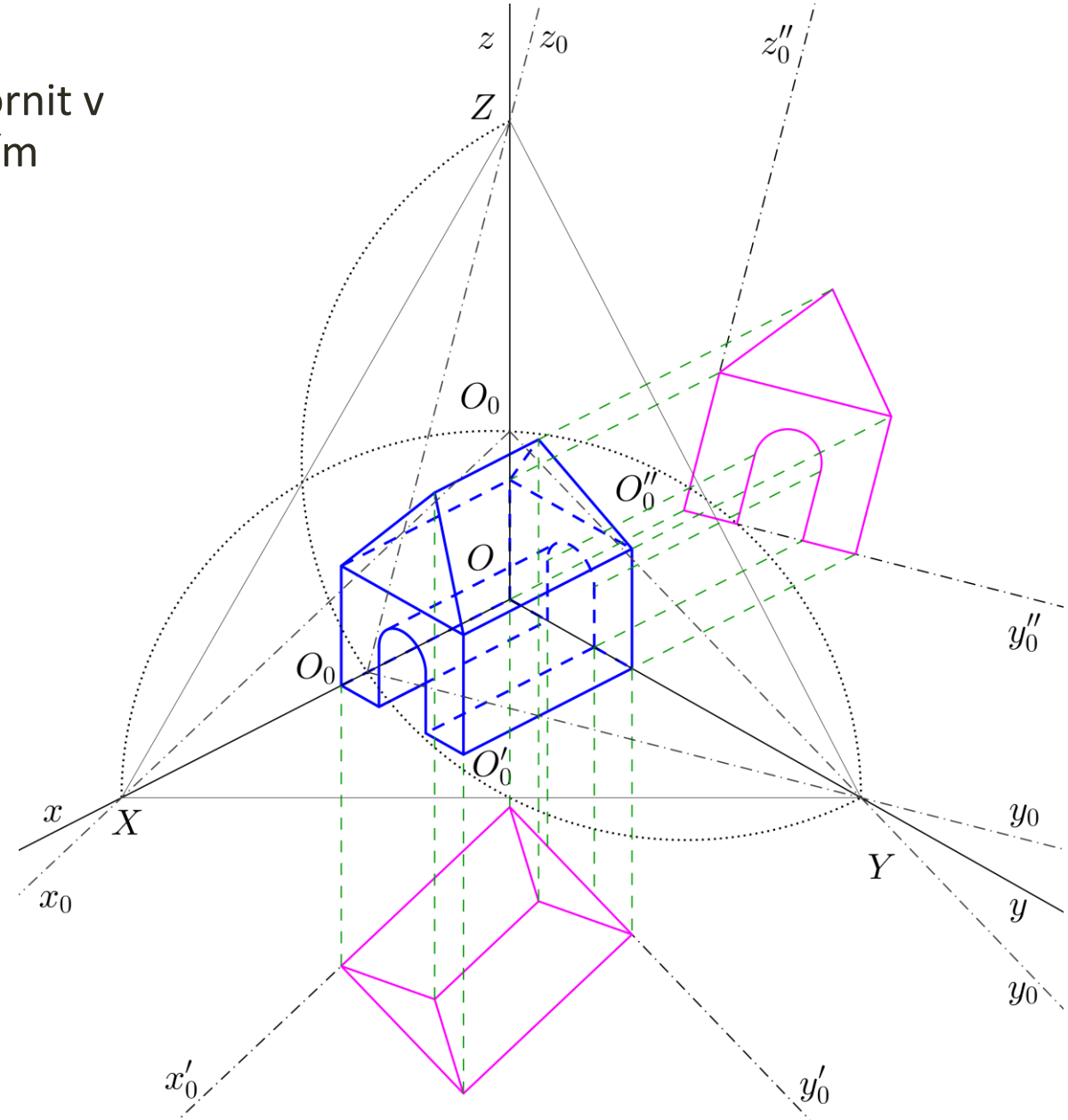
Druhý způsob nalezení průmětu kružnice:

1. Otočíme souřadnicovou rovinu, ve které kružnice leží, do axonometrické průmětny.
2. V otočení sestrojíme kružnici.
3. Na otočené kružnici zvolíme sdružené průměry a ty pak pomocí příslušné afinity otočíme zpět. Tím získáme sdružené průměry elipsy (průmět kružnice) a pomocí Rytzovy konstrukce sestrojíme vrcholy elipsy.

ZÁŘEZOVÁ METODA

Zářezová metoda umožňuje sestrojit axomonetrický průmět geometrického útvaru U, známe-li jeho půdorys a nárys.

Otočíme půdorysnu a bokorysnu do axonometrické průmětny, tentokrát ovšem tak, abychom nezměnili orientaci souřadnicové soustavy. Do otočené půdorysny (bokorysny) přeneseme zadaný půdorys (nárys). Kvůli přehlednosti je vhodné vysunout tyto průměty proti směru osy z resp. y (viz připojený obrázek). Půdorysem A_1 libovolného bodu $A \in U$ vedeme přímku $a_1 \parallel z$, nárysem A_2 téhož bodu A přímku $a_2 \parallel y$ a sestrojíme bod $A^a \in a_1 \cap a_2$. Množina všech takto sestrojených bodů je rovnoběžným a axonometrickým průmětem útvaru U.



Je možné nárys útvaru také znázornit v otočené nárysně a vysunout ho tím pádem ve směru osy x.