Technická univerzita v Liberci
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

MONGEOVO PROMÍTÁNÍ

Pomocný učební text

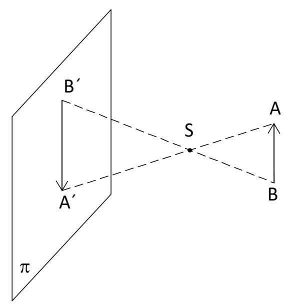
Petra Pirklová

Liberec, říjen 2016

PROMÍTÁNÍ

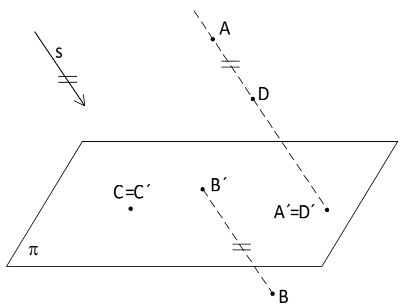
Promítání zobrazuje prostorové útvary do promítací roviny π (**průmětna**). Pokud promítáme každý bod útvaru do roviny ze středu, vznikne **středové promítání.** Vedeme-li každým bodem útvaru přímku daného směru *s* a takto promítneme útvar do roviny, máme **rovnoběžné promítání**.

Středové promítání se nejvíce blíží procesu vidění. Je velice názorné, ale jeho nevýhodou je složitost konstrukcí a měření délek. Na druhé straně v rovnoběžném promítání nejsou konstrukce tak složité, ale trpí v něm názornost.



Středové promítání

Pokud pomocí rovnoběžného promítání zobrazujeme např. bod *A*, vedeme jím přímku směru promítání (**promítací přímka**). Ta protne průmětnu v jejím rovnoběžném průmětu *A´*. Takto zadané promítání však není vzájemně jednoznačné zobrazení. Nelze zpětně zrekonstruovat podobu vzoru.



Rovnoběžné promítání

MONGEOVO PROMÍTÁNÍ

Mongeovo promítání je pravoúhlé rovnoběžné promítání na dvě k sobě kolmé průmětny. Proto je také nazýváno **pravoúhlým promítáním na dvě kolmé průmětny**. Jeho výhodou je snadné řešení úloh, nevýhodou však menší názornost.

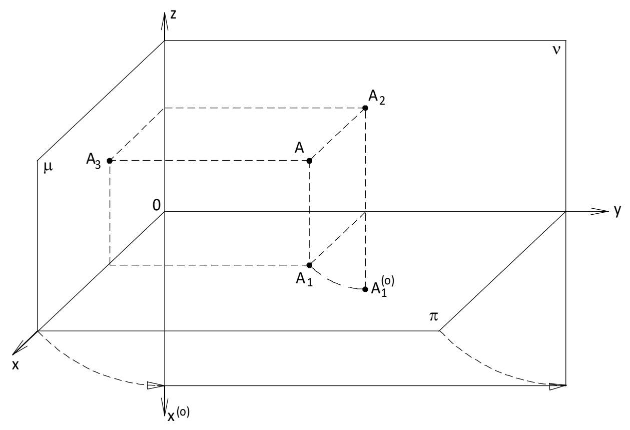
Průmětny nazýváme **půdorysna** (označení písmenem π) a **nárysna** (označení písmenem ν). Někdy se také používá třetí průmětna, která je kolmá zároveň na nárysnu i půdorysnu a nazývá se **bokorysna** (označení μ).

ZOBRAZENÍ BODU

Zobrazujeme-li bod, pak tento bod pravoúhle promítneme do půdorysny a nárysny. Pravoúhlý průmět do půdorysny se označuje dolním indexem 1 (A_1) a nazýváme ho **půdorys** bodu *A*, pravoúhlý průmět do nárysny se označuje dolním indexem 2 (A_2) a nazýváme ho **nárys** bodu *A*. Průmět do bokorysny označujeme dolním indexem 3 (A_3) a nazýváme ho **bokorys** bodu *A*.

Do tohoto systému průměten umisťujeme soustavu souřadnic tak, že průsečnici půdorysny a nárysny ztotožníme s osou ***y*** a budeme ji nazývat **základnicí**. Její kladný směr bude směřovat doprava. Půdorysna pak bude souřadnicovou rovinou **(*xy*)** a nárysna souřadnicovou rovinou **(*yz*)**.

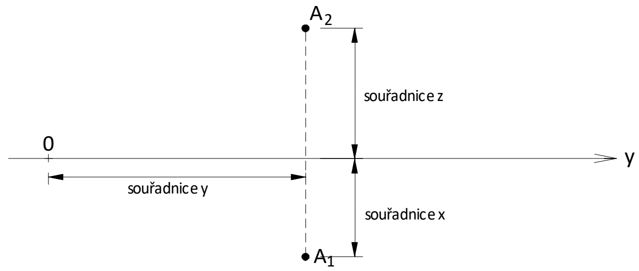
Celou tuto prostorovou situaci však potřebujeme umístit do roviny - nákresny. To zajistíme tak, že jednu z průměten otočíme kolem základnice do druhé průmětny (viz obr.). Tím se nám také otočí všechny pravoúhlé průměty všech zobrazovaných bodů (resp. útvarů) a půdorys a nárys jednoho bodu se dostanou na přímku kolmou k základnici, kterou nazýváme **ordinála**. Půdorys A_1 a nárys A_2 jednoho bodu *A* tvoří **sdružené průměty** tohoto bodu *A*. Kvádr, jehož tři stěny jsou tvořeny průmětnami a jeho čtyři vrcholy jsou body *A*, A_1, A_2, A_3, nazýváme **souřadnicový kvádr**.



Bod v prostoru

Sdružené průměty bodu *A* získáme tak, že na osu *y* naneseme souřadnici *y* daného bodu. Zde sestrojíme kolmici k ose *y* a na ní naneseme kladnou souřadnici *x* bodu dolů, zápornou souřadnici *x* nahoru, kladnou souřadnici *z* bodu nahoru a zápornou souřadnici *z* bodu dolů.

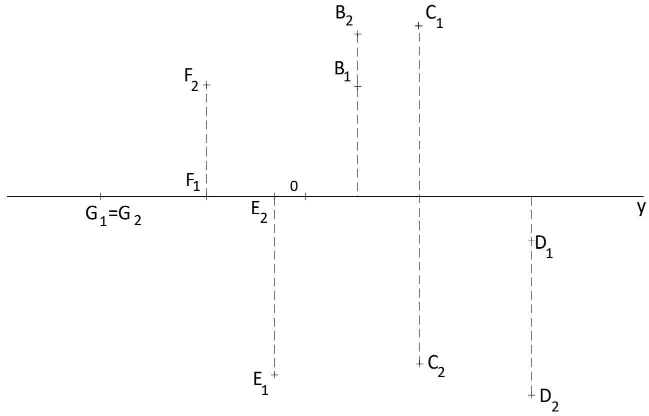
V nákresně vypadá zobrazení bodu *A*, jehož všechny souřadnice jsou kladné, následujícím způsobem.



Souřadnice bodu

Zobrazení bodů v nákresně:

B(*x*<0,*y*>0,*z*>0), *C*(*x*<0,*y*>0,*z*<0), *D*(*x*>0,*y*>0,*z*<0), *E*(*x*>0,*y*<0,*z*=0), *E* ∊ π, *F*(*x*=0,*y*<0,*z*>0), *F* ∊ ν, *G*(*x*=0,*y*<0,*z*=0), *G* ∊ *y*



Zobrazení bodů

ZOBRAZENÍ ÚSEČKY A PŘÍMKY

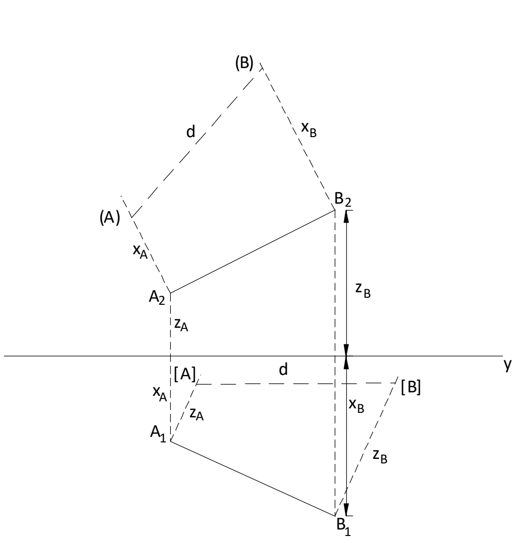
Nejdříve uvedeme některé vlastnosti Mongeova promítání, které vyplývají ze skutečnosti, že je promítáním rovnoběžným. V Mongeově promítání se zachovává **incidence**. Tedy bod, který leží na přímce, se zobrazí na bod, který leží na obrazu přímky. Dále se také zachovává **rovnoběžnost** a **dělící poměr**.

Podle výše napsaného, obraz úsečky určíme jako obraz všech bodů, které leží na dané úsečce. Samozřejmě zobrazovat všechny body není možné, postačí koncové body úsečky.

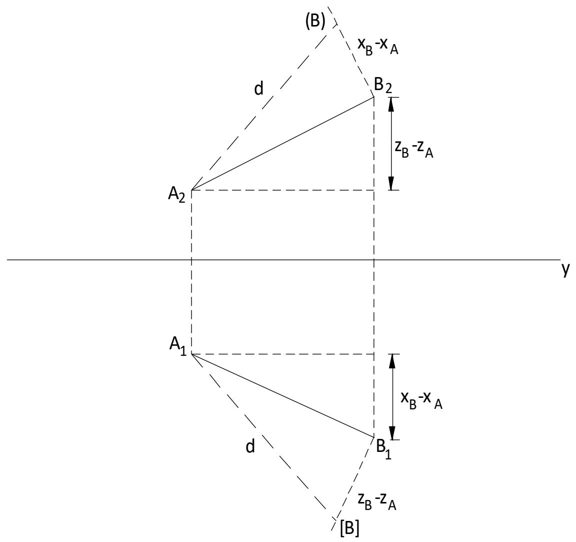
Skutečná velikost úsečky

Délky všech úseček se při zobrazování zkreslí (zkrátí). Chceme-li délku úsečky zjistit, musíme ji **sklopit**.

Sklápění úsečky můžeme provádět v půdorysu i nárysu. Nejprve sestrojíme kolmice v koncových bodech některého průmětu úsečky. Na tuto kolmici pak naneseme souřadnici druhého průmětu tohoto bodu. Tedy jestliže sklápíme v půdorysu, nanášíme *z*-ovou souřadnici, sklápíme-li v nárysu, pak nanášíme souřadnici *x*-ovou. Tím získáme sklopené body, které značíme závorkou např. (*A*). Spojíme-li sklopené koncové body úsečky, získáme skutečnou délku *d* úsečky. Sklopená úsečka se značí čárkovaně. Sklápění úsečky není nutné provádět v obou průmětech.



Sklápění úsečky

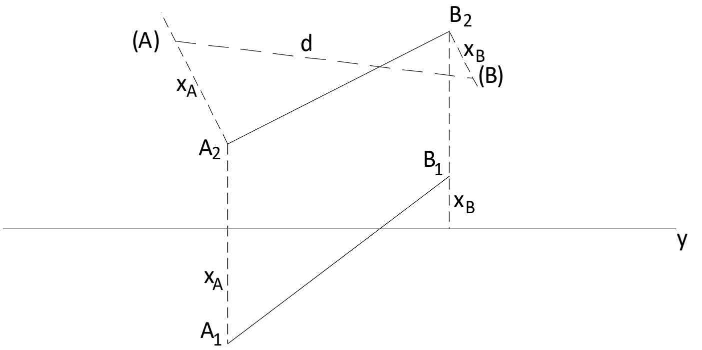


Rozdílový trojúhelník

Druhý způsob určení délky úsečky je použití tzv. **rozdílového trojúhelníku**.

Zde nejdříve, pokud zjišťujeme délku v půdorysu, určíme rozdíl *z*-ových souřadnic koncových bodů úsečky a tuto délku naneseme na kolmici v půdorysu koncového bodu úsečky. Pak tento bod na kolmici spojíme s druhým koncovým bodem úsečky a tím získáme skutečnou délku *d* úsečky. Obdobný postup je při určování délky v nárysně.

Na předchozích obrázcích jsme prováděli sklápění úseček, jejichž koncové body měly souřadnice vždy kladné, ať už *z*-ové nebo *x*-ové. Stejný postup se užívá, pokud oba body mají souřadnice záporné. Pokud však je např. *x*-ová souřadnice jednoho koncového bodu kladná a druhého koncového bodu záporná, je nutné tyto souřadnice nanášet na kolmice v opačných polorovinách, určené nárysem úsečky.



Sklápění úsečky – opačné poloroviny

Zobrazení přímky

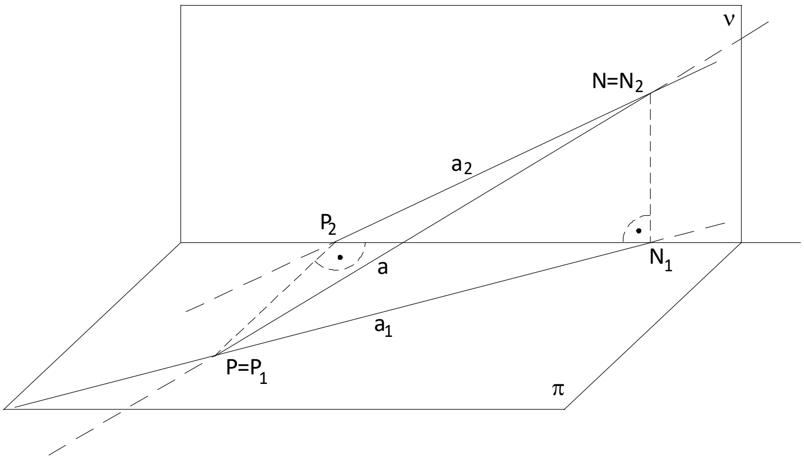
Přímka se zobrazí jako **přímka**, pokud není směru promítání, tedy kolmá k některé z průměten. Pokud náleží směru promítání jejím obrazem je **bod**.

Důležitými body na přímce jsou tzv. **stopníky.**

Definice: Stopník je bod, ve kterém přímka protíná průmětnu.

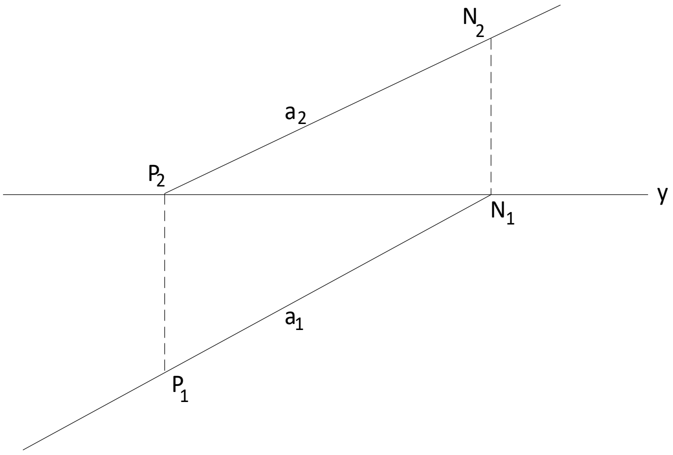
Každá přímka může mít až tři stopníky. **Půdorysný stopník *P*** je bod, ve kterém přímka protíná půdorysnu. **Nárysný stopník *N*** je bod, ve kterém přímka protíná nárysnu a **bokorysný stopník *M*** je bod, ve kterém přímka protíná bokorysnu. Tento bokorysný stopník však nebudeme užívat.

Každý z těchto stopníků má samozřejmě svůj půdorys a nárys (bokorys nebudeme užívat). Protože půdorysný stopník leží přímo v půdorysně, pak jeho půdorys P_1 je s tímto půdorysným stopníkem totožný. Obdobné je to pro nárysný stopník a jeho nárys N_2. Tím dostaneme celkem dobrou představu o poloze přímky v prostoru. Nárys půdorysného stopníku P_2 a půdorys nárysného stopníku N_1 leží vždy na základnici.



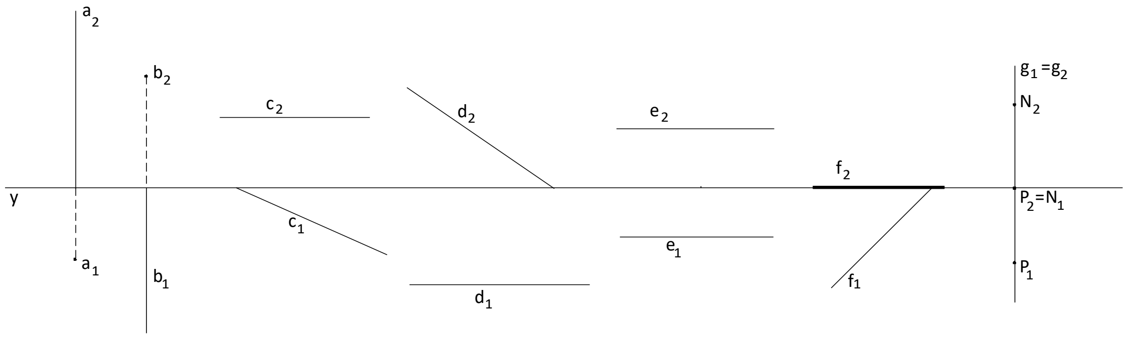
Stopníky přímky

Situace v nákresně pak vypadá takto:



Stopníky přímky - nákresna

Zvláštní polohy přímek



$a \perp \pi$ $b \perp \nu$ $c \parallel \pi$ $d \parallel \nu$ $e \parallel y$ $f \subset \pi$ $g \perp y$

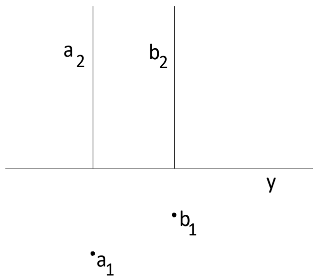
Přímka kolmá k základnici (v našem případě přímka *g*) není svými sdruženými průměty jednoznačně určena. Aby byla určena jednoznačně, je nutné na této přímce určit alespoň dva různé body a zobrazit jejich sdružené průměty.

Zobrazení dvojice přímek

1. **Rovnoběžky**

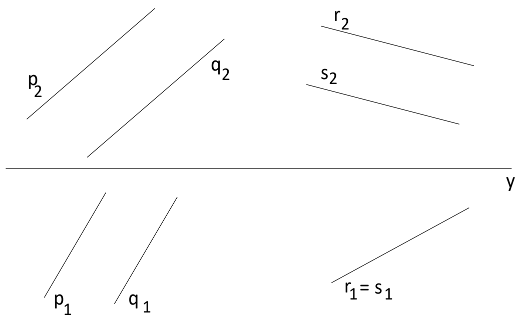
Jsou-li dvě přímky rovnoběžné (a ani jedna není kolmá k základnici), pak jejich první i druhé průměty jsou spolu rovnoběžné (a nejsou kolmé k základnici).

Pokud jsou přímky kolmé k jedné z průměten (na obrázku k půdorysně), pak se zobrazí v jednom průmětu (v půdorysu) jako dva nesplývající body a ve druhém (v nárysu) jako dvě rovnoběžky.



Rovnoběžky kolmé k půdorysně

Na níže uvedeném obrázku a) neleží přímky ve společné promítací rovině, na obrázku b) leží ve společné půdorysně promítací rovině. Obdobně také pro přímky ležící v nárysně promítací rovině.



Zobrazení rovnoběžek

a) b)

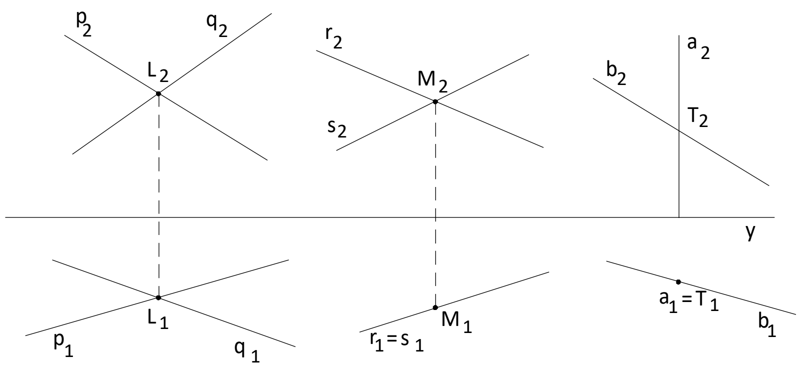
2. **Různoběžky**

Průmětem dvou různoběžek mohou být:

a) Dvě dvojice různoběžek, jejichž průsečíky leží na ordinále.

b) Jedním je jediná přímka a druhým průmětem různoběžky (leží-li v jedné promítací rovině).

c) Jedním je přímka a bod, který na ní leží a druhým různoběžky (je-li jedna přímka kolmá k jedné z průměten).



Zobrazení různoběžek

a) b) c)

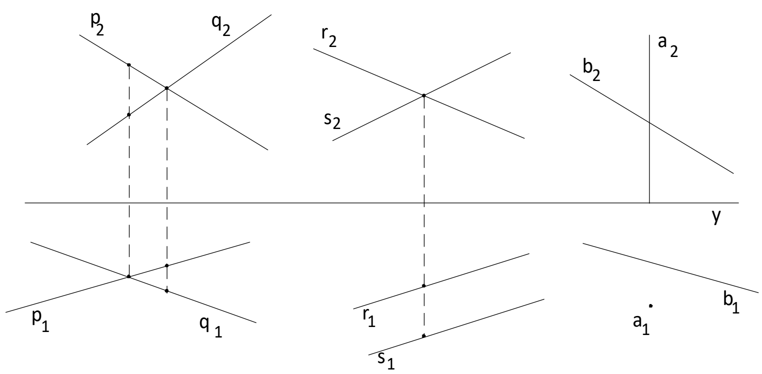
3. Mimoběžky

Průmětem dvojice mimoběžek mohou být:

a) Dvě dvojice různoběžek, jejichž průsečíky neleží na ordinále.

b) Jedním průmětem jsou různé rovnoběžné přímky a druhým dvojice různoběžek.

c) Dvojice různoběžek a druhým průmětem je přímka a bod na ní neležící (pokud je jedna přímka kolmá k jedné z průměten).



Zobrazení mimoběžek

a) b) c)

ZOBRAZENÍ ROVINY

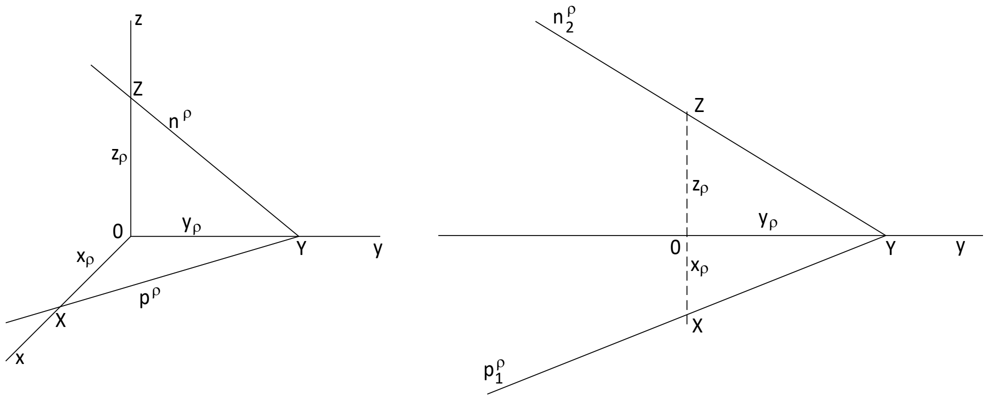
Pokud není rovina promítací, pak se zobrazí jako celá průmětna. Pokud je promítací, zobrazí se jako přímka.

Nejčastější způsob zadání roviny je pomocí **stop roviny**. Ty udávají velice dobrou představu o poloze roviny v prostoru vůči průmětnám.

Definice: Stopa rovina je průsečnice této roviny s průmětnou.

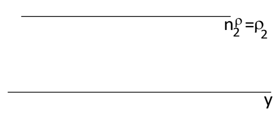
Průsečnice roviny ρ s půdorysnou se nazývá **půdorysná stopa p^ρ**, s nárysnou **nárysná stopa n^ρ**, s bokorysnou **bokorysná stopa m^ρ** (tuto stopu užívat nebudeme). Půdorysná a nárysná stopa se vždy protínají na základnici.

Pokud je rovina zadána souřadnicemi $\rho = (x_\rho, y_\rho, z_\rho)$, pak tyto souřadnice značí průsečík roviny s příslušnou souřadnicovou osou, $\rho = (XYZ)$, $X[x_\rho, 0, 0]$, $Y[0, y_\rho, 0]$, $Z[0, 0, z_\rho]$. Tedy při vynášení souřadnic roviny naneseme na základnici souřadnici y a v počátku vztyčíme kolmici, na kterou naneseme souřadnici x a z, podle stejných pravidel jako při vynášení souřadnic bodu.

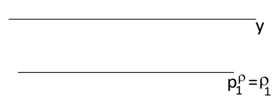


Stopy roviny v prostoru a nákresně

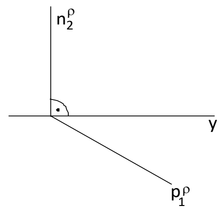
Speciální polohy roviny



$\rho \| \pi$

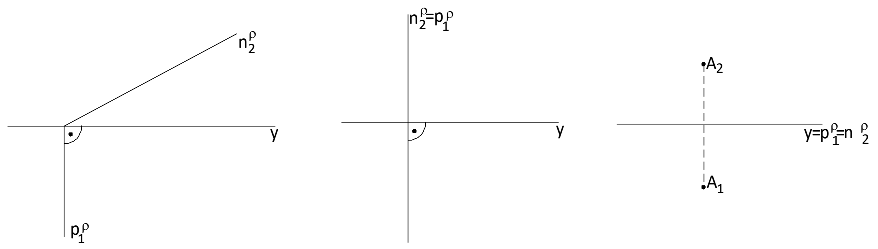


$\rho \| \nu$



$\rho \perp \pi$

$\rho \| y$



$\rho \perp \nu$ $\rho \perp y$ $y \subset \rho$

V posledním případě, kdy osa *y* leží v dané rovině, je k jednoznačnému určení této roviny nutné zobrazit alespoň jeden bod, který v této rovině leží

ZOBRAZENÍ DVOJICE ROVIN

1) **Rovnoběžné roviny** - průměty příslušných stop jsou rovnoběžné.

Každé dvě rovnoběžné roviny jsou třetí rovinou s nimi různoběžnou proťaty ve dvou rovnoběžných přímkách.

Jsou-li však roviny rovnoběžné se základnicí, jejich stopy jsou také vzájemně rovnoběžné, ale tyto roviny nemusí být rovnoběžné. Toto bychom zjistili z třetího průmětu.

2) **Různoběžné roviny** - průměty příslušných stop jsou různoběžné.

POLOHOVÉ ÚLOHY

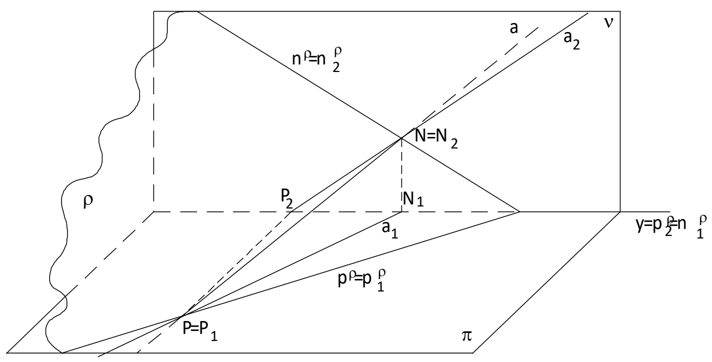
V této kapitole uvedeme základní typy polohových úloh, tedy úloh, ve kterých zkoumáme vzájemnou polohu zadaných útvarů.

PŘÍMKA V ROVINĚ

Rovina nemusí být vždy zadána stopami, ale také může být zadaná **pomocí dvou přímek (rovnoběžek či různoběžek)**, které v rovině leží. Řídíme se touto větou.

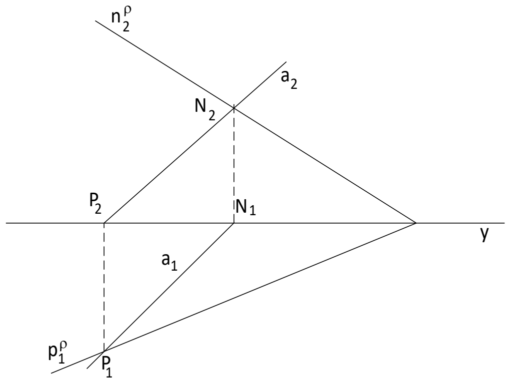
Věta: Leží-li přímka v rovině, pak její stopníky leží na stopách roviny.

Tedy nárys nárysného stopníku leží na nárysné stopě a půdorys půdorysného stopníku leží na půdorysné stopě.



Přímka v rovině

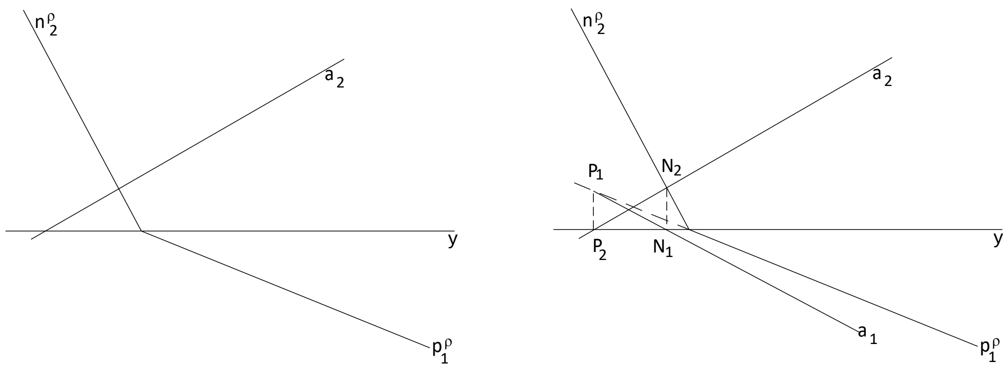
Situace v nákresně:



Přímka v rovině - nákresna

Díky výše uvedené větě můžeme snadno určit stopy roviny, ale také naopak určit např. chybějící průmět přímky ležící v rovině.

Příklad: Sestrojte půdorys přímky *a* ležící v rovině ρ dané stopami, jestliže známe její nárys.

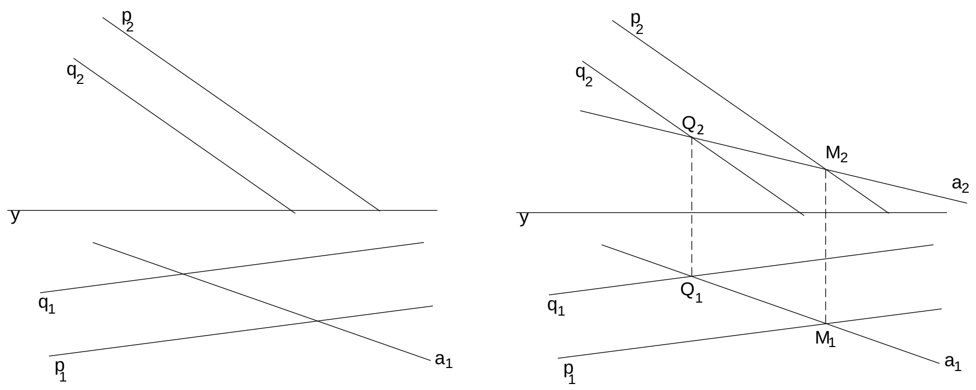


Nalezení chybějícího průmětu přímky roviny zadané stopami

Nejdříve musíme určit nárysy stopníků (N_2 leží na nárysné stopě a P_2 na základnici). Určíme jejich půdorysy N_1 (leží na základnici) a P_1 (vždy leží na půdorysné stopě, v tomto příkladě jsme ji museli prodloužit) jejichž spojením vznikne hledaný půdorys a_1.

Pokud je rovina zadána přímkami, řešíme tuto úlohu následovně.

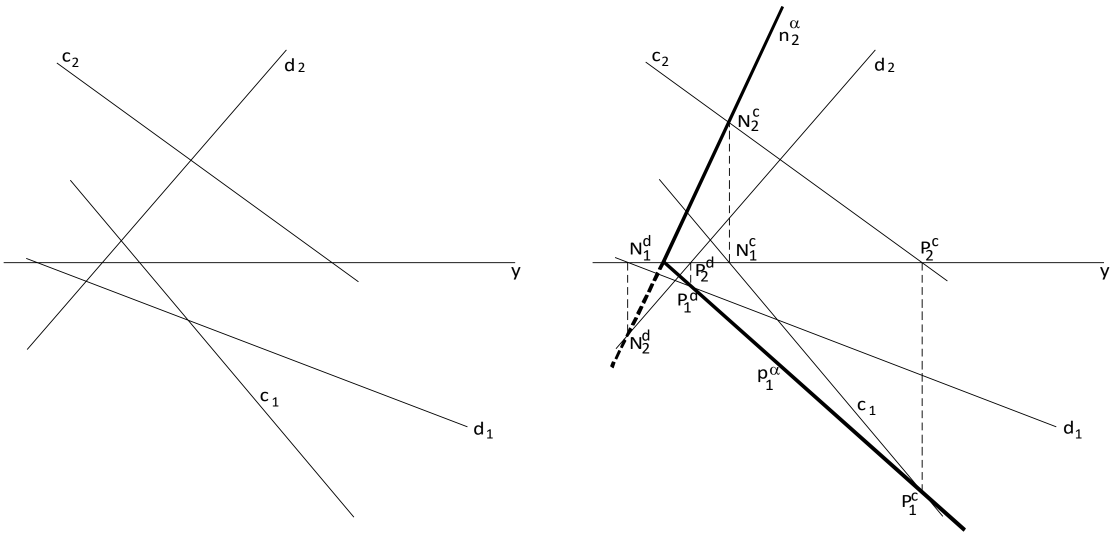
Příklad: Určete nárys přímky *a*, která leží v rovině ρ, dané dvěma rovnoběžkami *p*, *q*.



Nalezení chybějícího průmětu přímky roviny zadané přímkami

V tomto případě určíme půdorysy průsečíků Q_1, M_1 přímky a_1 s přímkami p_1, q_1, protože všechny tři leží v jedné rovině a tedy v prostoru se skutečně protínají. Pomocí ordinál najdeme jejich nárysy na nárysech přímek p_2, q_2. Jestliže je spojíme, máme hledaný nárys a_2.

Příklad: Sestrojte stopy roviny α, která je dána dvěma různoběžkami c, d.



Stopy roviny dané dvěma přímkami

Protože příslušné stopníky přímky, která leží v rovině, leží na příslušných stopách této roviny, musíme nejdříve určit stopníky daných přímek. Spojením stopníků N_2^c, N_2^d získáme nárysnou stopu n_2^α a spojením stopníků P_1^c, P_1^d získáme půdorysnou stopu p_1^α roviny α.

Speciální přímky v rovině

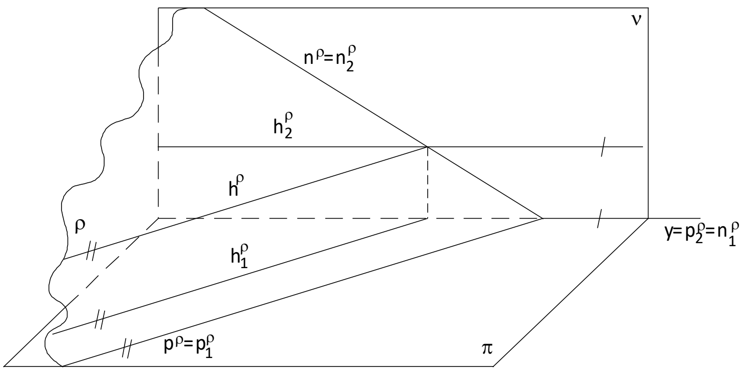
V rovinách jsou také přímky, které mají určitou vlastnost, které používáme např. ke zjednodušení některých konstrukcí.

a) **Hlavní přímky roviny**

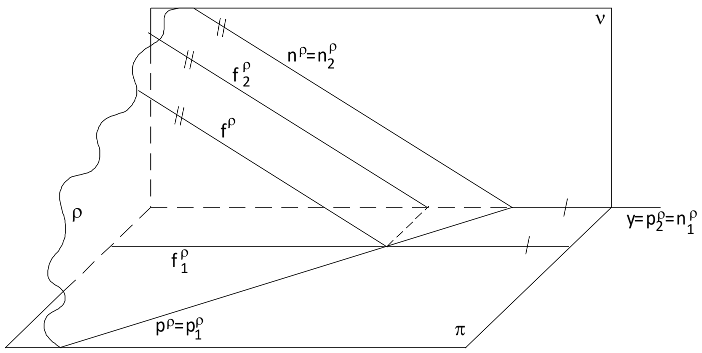
Hlavní přímky roviny jsou přímky, které leží v dané rovině a jsou rovnoběžné s průmětnou.

Protože máme dvě průmětny, máme i dva systémy hlavních přímek. **Horizontální hlavní přímky roviny** ρ (h^ρ) jsou rovnoběžné s půdorysnou a **frontální hlavní přímky roviny** ρ (f^ρ) jsou rovnoběžné s nárysnou.

Protože stopy roviny leží také v dané rovině a zároveň leží přímo v průmětně, můžeme je také považovat za hlavní přímky. Proto můžeme při určování hlavních přímek postupovat tak, že je sestrojíme jako rovnoběžky se stopou.

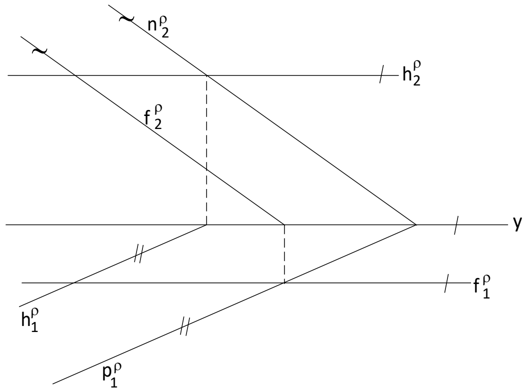


Horizontální hlavní přímky



Frontální hlavní přímky

V nákresně pak platí, že půdorys horizontální hlavní přímky (h_1^ρ) je rovnoběžný s půdorysnou stopou a nárys horizontální hlavní přímky (h_2^ρ) je rovnoběžný se základnicí. Nárys frontální hlavní přímky (f_2^ρ) je rovnoběžný s nárysnou stopou roviny a její půdorys (f_1^ρ) je rovnoběžný se základnicí.

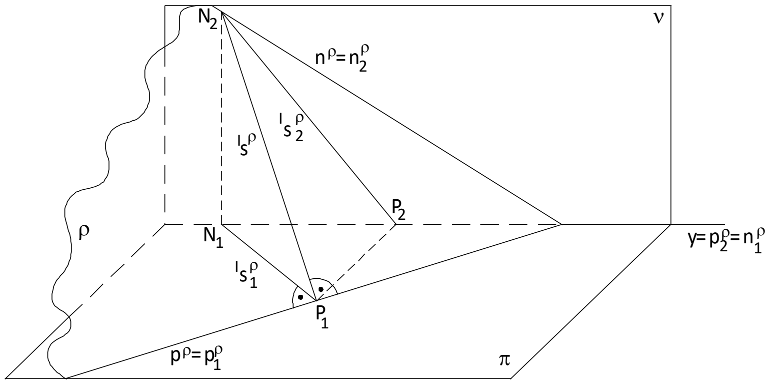


Hlavní přímky - nákresna

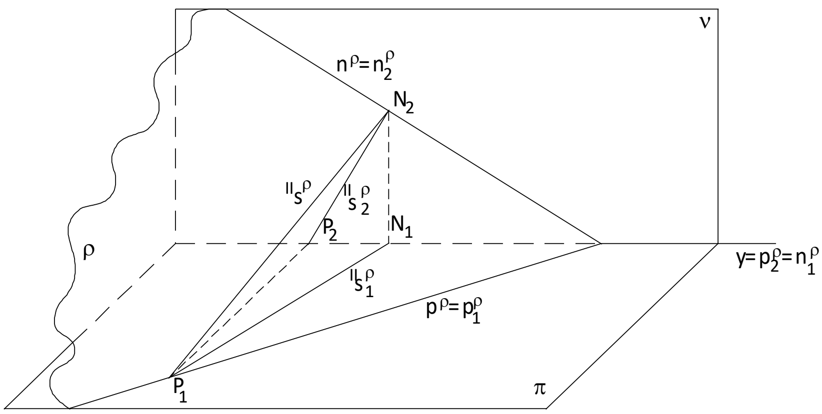
b) Spádové přímky roviny

Spádové přímky roviny jsou přímky v rovině, které jsou kolmé ke stopě.

Protože máme dvě stopy roviny, pak také máme dva systémy spádových přímek. **Spádové přímky první osnovy** (${}^{I}s^{\rho}$) jsou kolmé na půdorysnou stopu a **spádové přímky druhé osnovy** (${}^{II}s^{\rho}$) jsou kolmé na nárysnou stopu.



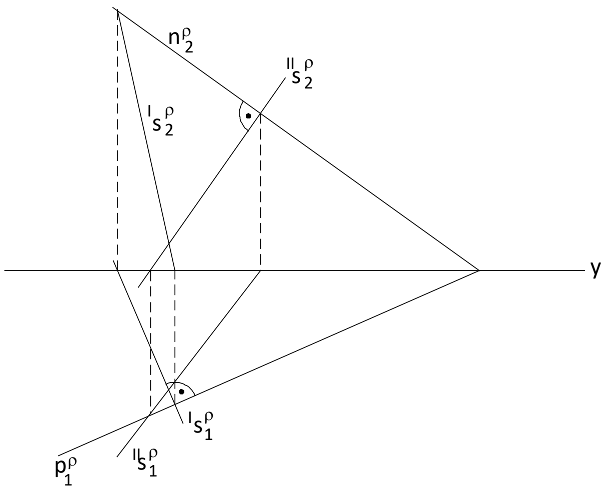
Spádové přímky první osnovy



Spádové přímky druhé osnovy

Tedy v nákresně je půdorys spádové přímky první osnovy (${}^{I}s_1^{\rho}$) kolmý k půdorysné stopě, ale nárys této spádové přímky první osnovy (${}^{I}s_2^{\rho}$) již na nárysnou stopu kolmý **není**. Tento nárys sestrojujeme jako u běžné přímky v rovině pomocí stopníků.

Obdobné je to pak pro spádové přímky druhé osnovy, zde je však nárys spádové přímky druhé osnovy (${}^{II}s_2^{\rho}$) kolmý na nárysnou stopu.



Spádové přímky – nákresna

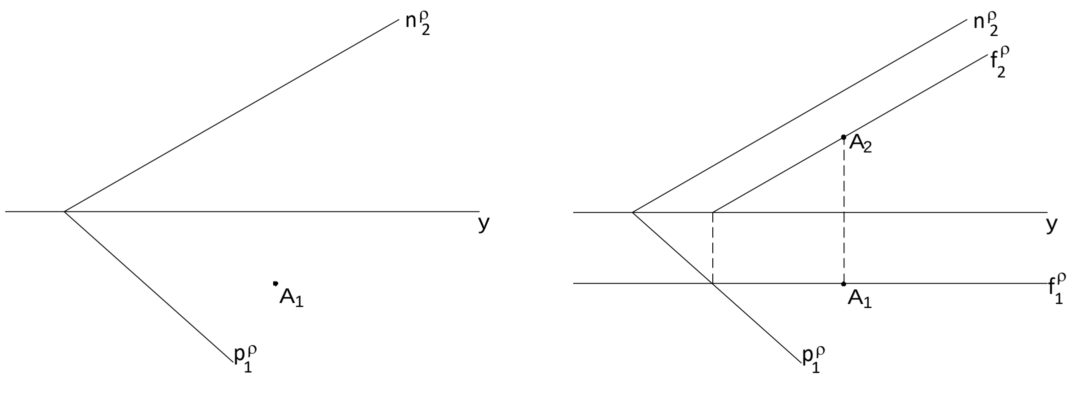
Spádové přímky také používáme ke zjištění odchylky roviny od průmětny. Odchylka roviny, která není promítací, od průmětny je rovna odchylce její spádové přímky od průmětny.

Tedy sklopíme-li půdorys spádové přímky 1. osnovy do půdorysny, pak odchylky sklopeného půdorysu a půdorysu spádové přímky 1. osnovy je **odchylka roviny od půdorysny**. Sklopením nárysu spádové přímky 2. osnovy do nárysny získáme **odchylku roviny od nárysny** jako odchylku sklopeného nárysu a nárysu spádové přímky 2. osnovy.

BOD V ROVINĚ

Přímky v rovině také používáme k další polohové úloze, nalézt chybějící průmět bodu, který leží v dané rovině.

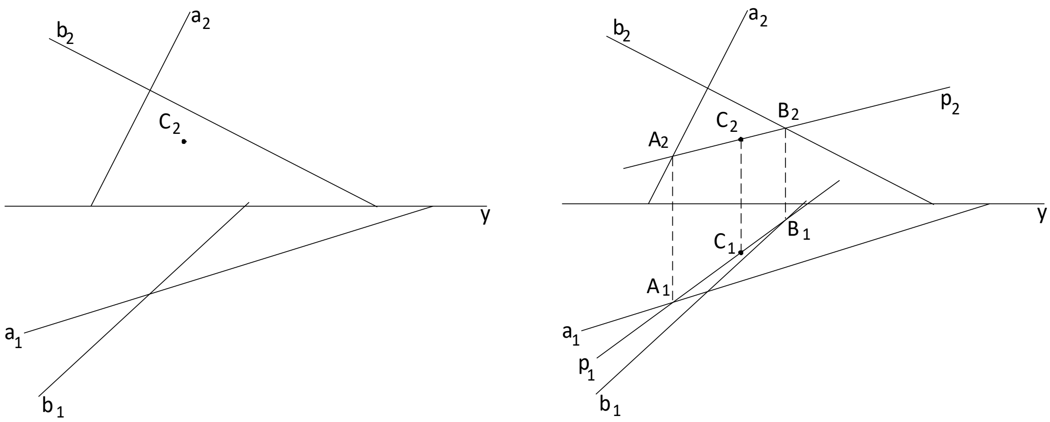
Příklad: V dané rovině ρ, dané stopami, je dán půdorys bodu A_1, určete jeho nárys.



Nalezení chybějícího průmětu bodu v rovině zadané stopami

Nejdříve bodem A_1 vedeme půdorys libovolné přímky roviny (v našem případě jsme použili frontální hlavní přímku). Určíme pomocí stopníků její nárys, na kterém pomocí ordinály nalezneme hledaný nárys bodu A_2.

Příklad: Určete půdorys bodu *C*, který leží v rovině dané dvěma různoběžkami *a*, *b*.



Nalezení chybějícího průmětu bodu v rovině zadané přímkami

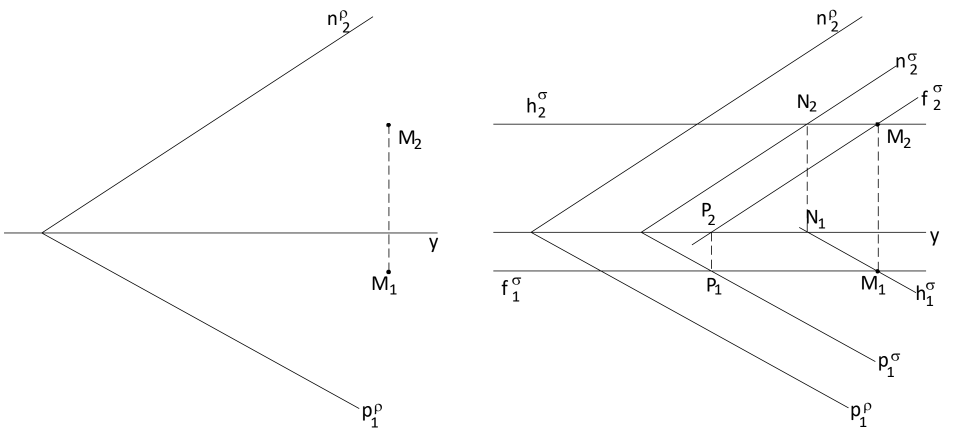
Pokud je rovina daná dvěma přímkami, vedeme bodem *C* jakoukoliv přímku *p*, která leží v rovině. Určíme průsečíky A_2, B_2 přímky p_2 s přímkami a_2, b_2. Narýsujeme jejich půdorysy pomocí ordinál, kterými prochází přímka p_1, na které leží půdorys bodu C_1.

Místo obecné přímky *p* v rovině, můžeme také použít hlavní přímku roviny, která daným bodem prochází. Musíme však vždy začít tím průmětem příslušné hlavní přímky, který je rovnoběžný se základnicí.

ROVINA ROVNOBĚŽNÁ S DANOU ROVINOU

Nejdříve si musíme uvědomit, že stopy rovnoběžných rovin jsou rovnoběžné, znalosti o hlavních přímkách a pokud bod leží v rovině, obecně neleží jeho průměty na stopách roviny.

Příklad: Bodem *M*, který neleží v rovině ρ, veďte rovinu σ rovnoběžnou s danou rovinou.



Rovina rovnoběžná s danou rovinou

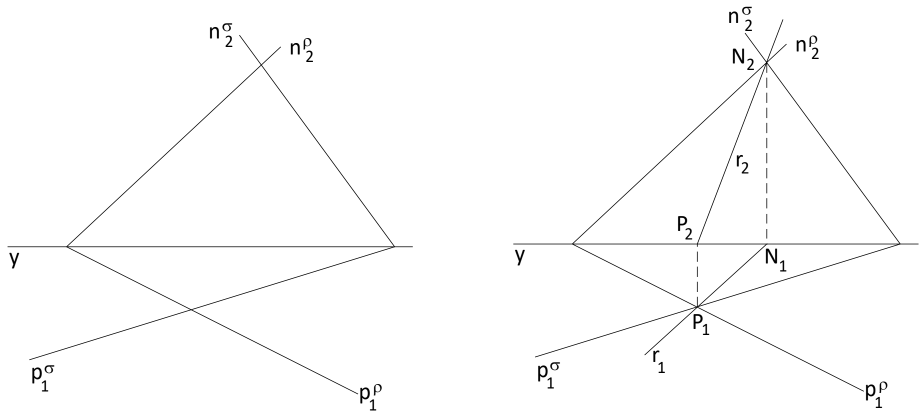
Protože stopy rovnoběžných rovin jsou rovnoběžné a se stopami jsou rovnoběžné také příslušné hlavní přímky, pak daným bodem vedeme hlavní přímku **hledané** roviny a určíme její stopníky, které již leží na hledaných stopách.

Na obrázku jsou sestrojené obě hlavní přímky, není to však vždy nutné, protože stopy roviny se protínají na základnici.

PRŮSEČNICE DVOU ROVIN

Průsečnice dvou rovin leží v obou rovinách, tedy její stopník musí ležet na stopách obou rovin.

Příklad: Sestrojte průsečnici *r* dvou rovin ρ a σ, jenž jsou zadané stopami.

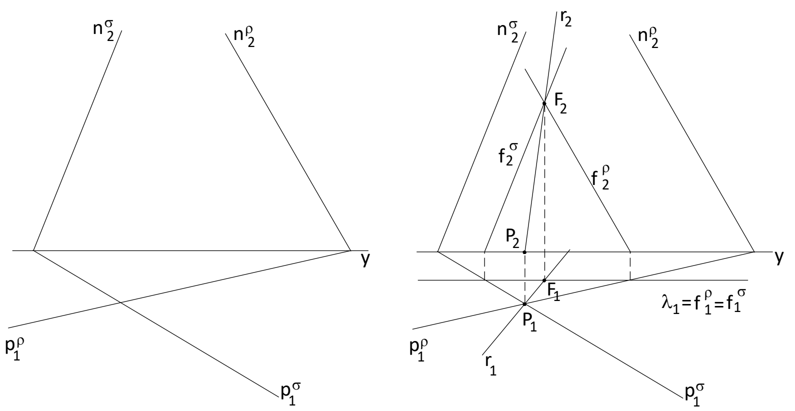


Průsečnice dvou rovin

Půdorysný stopník průsečnice leží na průsečíku půdorysných stop rovin a nárysný stopník podobně leží na průsečíku nárysných stop zadaných rovin.

Někdy se však může stát, že průsečík některých stop je na nákresně nedostupný. V tom případě zvolíme třetí rovinu, nejlépe rovnoběžnou s jednou z průměten. Určíme její průsečnici se zadanými rovinami, což jsou vlastně jejich hlavní přímky. Průsečík těchto hlavních přímek je bod na průsečnici těchto rovin.

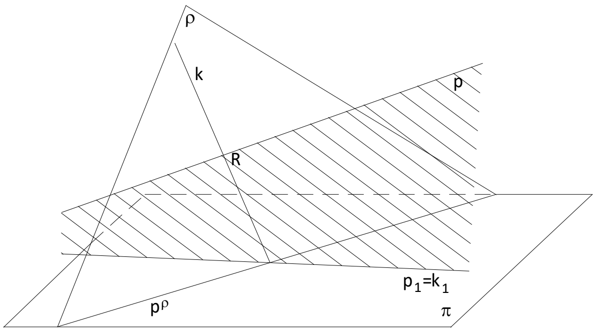
Potřebujeme-li získat průsečík hlavních přímek v nárysně, zvolíme si rovinu rovnoběžnou s nárysnou a získáme tím frontální hlavní přímky (viz. obrázek). Pro průsečík v půdorysně zvolíme rovinu rovnoběžnou s půdorysnou a tím horizontální hlavní přímky.



Průsečnice dvou rovin – nedostupný průsečík

PRŮSEČÍK PŘÍMKY S ROVINOU

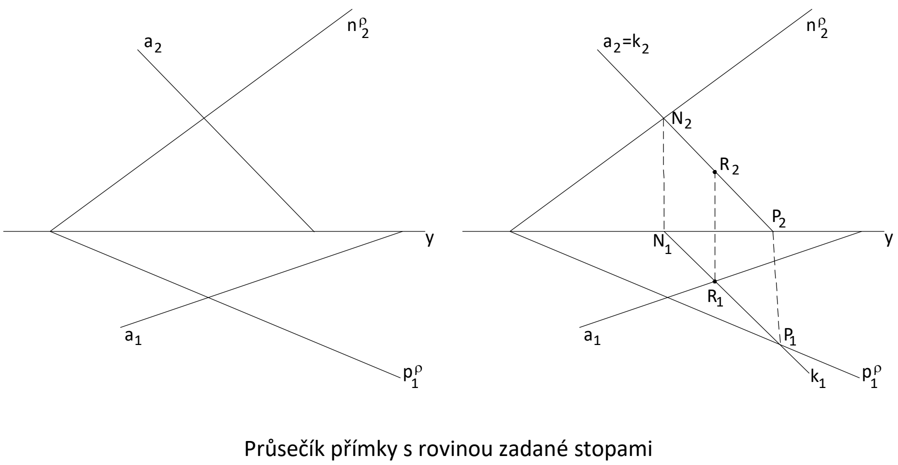
Pro sestrojení průsečíku přímky s rovinou používáme tzv. **krycí přímku**. Krycí přímka je přímka ležící v dané rovině, jejíž jeden průmět splývá s průmětem přímky dané (tzn., že mají společnou promítací rovinu). Poté sestrojíme chybějící průmět krycí přímky. Ten se protne s danou přímkou v průsečíku této přímky s danou rovinou.



Krycí přímka

Je-li přímka zadaná stopami, používáme ke zjištění chybějícího průmětu krycí přímky jejích stopníků.

Příklad: Sestrojte průsečík přímky *a* s rovinou ρ, je-li zadána stopami.



Průsečík přímky s rovinou zadané stopami

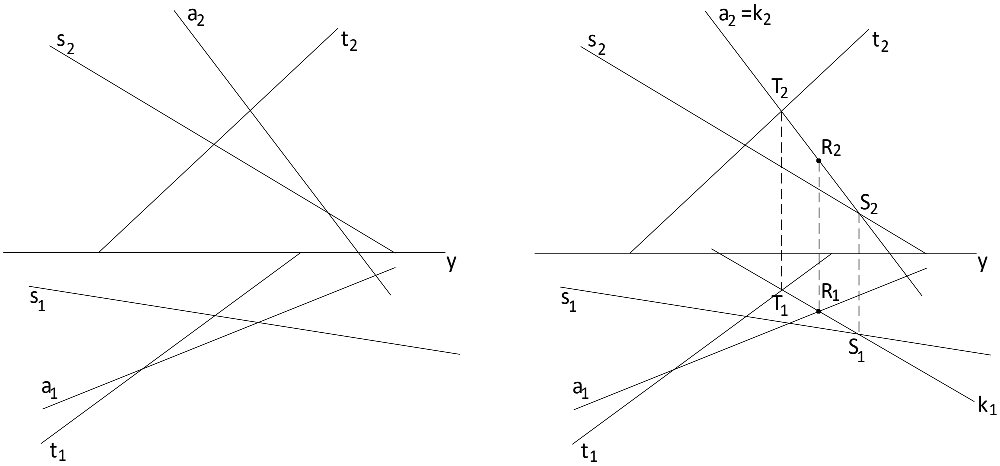
Zde jsme zvolili krycí přímku v nárysu, sestrojili půdorys této přímky v půdorysu a získali tak půdorys průsečíku *R* přímek *a* a *k*. Nárys průsečíku určíme přenesením po ordinále. Pokud bychom zvolili krycí přímku v půdorysu, výsledek musí být totožný.

Rovina může být zadána také různoběžnými, nebo rovnoběžnými přímkami. Pak použijeme průsečíky krycí přímky s těmito přímkami.

Příklad: Sestrojte průsečík přímky *a* s rovinou, která je zadaná přímkami *s* a *t*.

Nejdříve si v nárysu zvolíme krycí přímku. Její průsečíky s přímkami zadávajícími rovinu, přeneseme do půdorysu. Tím získáme půdorys krycí přímky, který se protne s půdorysem přímky a v bodě R_1. Pomocí ordinály pak určíme nárys průsečíku R_2.

Stejně jako v předchozím příkladě můžeme krycí přímku zvolit v půdorysu a řešení se nezmění.



Průsečík přímky s rovinou zadané přímkami

S touto naposledy jmenovanou polohovou úlohou úzce souvisí následující kapitola.

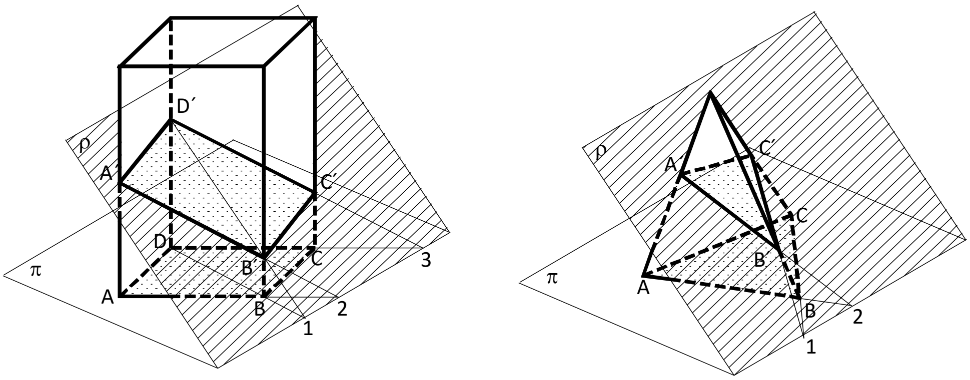
ROVINNÝ ŘEZ HRANOLŮ A JEHLANŮ

Rovinný řez hranolu rovinou, která není rovnoběžná s žádnou hranou, je *n*-úhelník, jehož jednotlivé strany jsou průsečnice stěn hranolu s rovinou řezu.

Rovinný řez jehlanu rovinou, která neprochází vrcholem jehlanu, ani není rovnoběžná s rovinou řídicího *n*-úhelníku jehlanu, je *m*-úhelník, jehož jednotlivé vrcholy jsou průsečíky hran daného jehlanu s rovinou řezu.

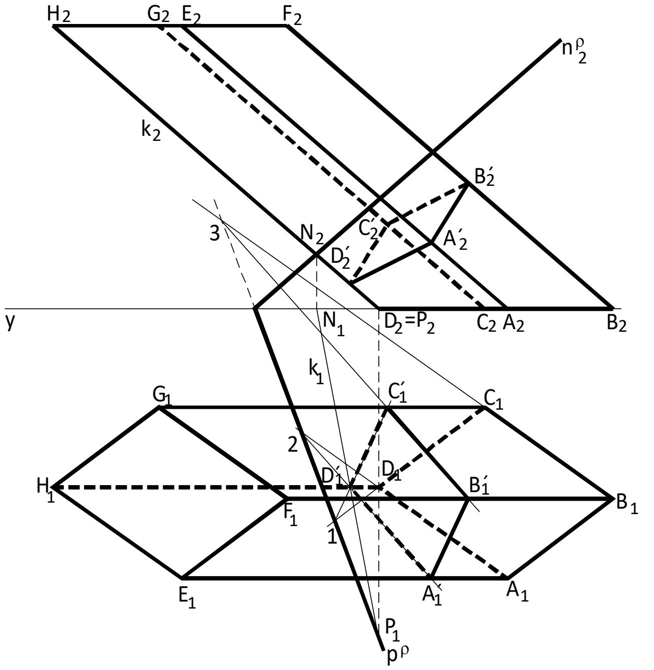
Nejdříve musíme najít jeden bod řezu jako průsečík jedné (vhodné) hrany tělesa s rovinou řezu použitím krycí přímky. Další body řezu určíme pomocí **osové afinity** u hranolů nebo **středové kolineace** u jehlanů. Osa afinity (kolineace) je půdorysná stopa roviny řezu (pokud podstava tělesa leží v půdorysně) a pár odpovídajících si bodů je bod na podstavě a první bod řezu.

Do druhého průmětu převedeme body řezu po ordinálách. Nakonec určíme viditelnost řezu tak, že strana řezu, která leží v neviditelné stěně hranolu, je neviditelná.



Řez hranolu a jehlanu

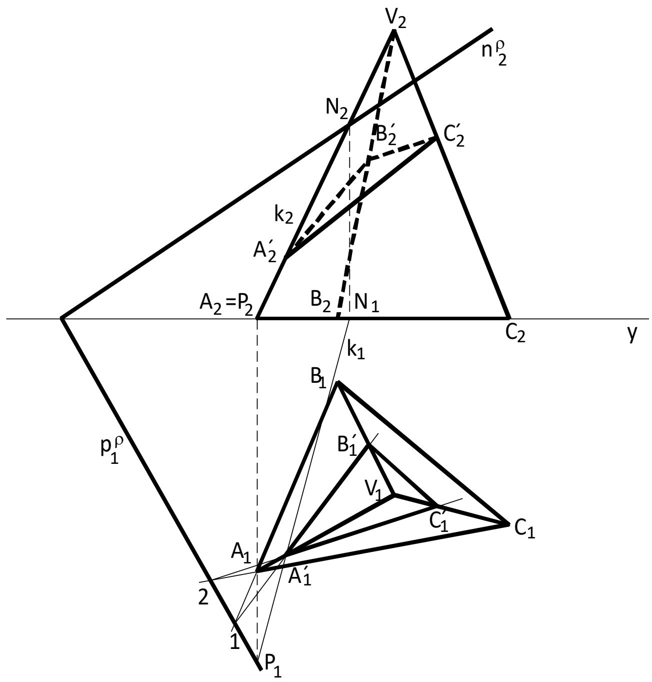
Příklad: Zobrazte řez kosého čtyřbokého hranolu *ABCDEFGH* s podstavou *ABCD* v půdorysně rovinou ρ.



Řez hranolu

Nejdříve určíme průsečík *D´* hrany *DH* s rovinou řez. Zvolili jsme krycí přímku v nárysu. Pomocí osové afinity, jejíž osa afinity je půdorysná stopa a párem odpovídajících bodů jsou *D* a *D´* (směr afinity je totožný se směrem hran hranolu), určíme ostatní body řezu *A´, B´, C´* v půdorysu. Po ordinálách je poté převedeme do nárysu a nakonec určíme viditelnost řezu.

Příklad: Určete řez trojbokého jehlanu *ABCV* s podstavou v půdorysně rovinou ρ.



Řez jehlanu

Určíme průsečík *A´* hrany *AV* s rovinou řezu. Zvolili jsme krycí přímku v nárysu. Pomocí středové kolineace, jejíž osa kolineace je půdorysná stopa a střed kolineace vrchol jehlanu, určíme ostatní body řezu *B´, C´* v půdorysu. Po ordinálách je následně převedeme do nárysu a určíme viditelnost řezu.

METRICKÉ ÚLOHY

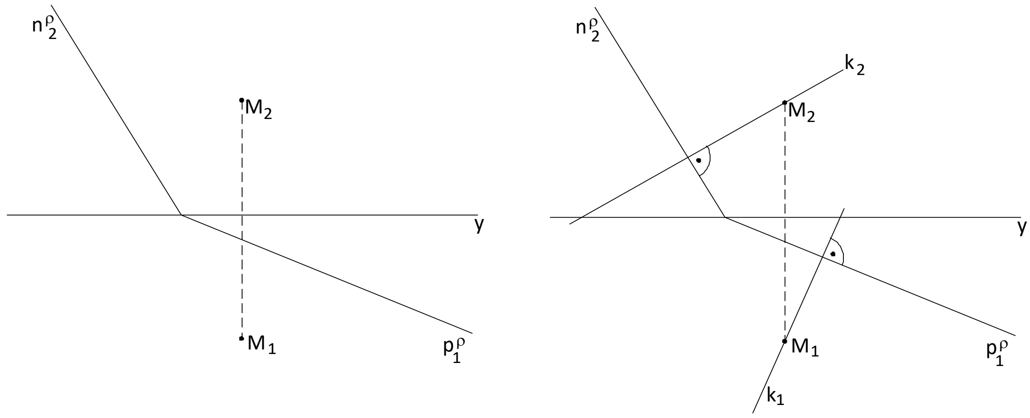
V této kapitole se budeme věnovat několika základním úlohám, které se zabývají metrickými vztahy mezi útvary v prostoru.

PŘÍMKA KOLMÁ K ROVINĚ

Nejdříve si musíme připomenout kritérium kolmosti přímky a roviny a větu o průmětu pravého úhlu. Potom $k_1 \perp h_1$, protože $h \parallel \pi$ a $k_2 \perp f_2$ protože $f \parallel \nu$.

Věta: Přímka je kolmá k rovině (která není rovnoběžná se základnicí) právě tehdy, když její první průmět je kolmý na první průmět její horizontální hlavní přímky a zároveň, když její druhý průmět je kolmý na druhý průmět její frontální hlavní přímky.

Příklad: Sestrojte kolmici *k* k rovině ρ daným bodem *M*.



Kolmice k rovině

ROVINA KOLMÁ K PŘÍMCE

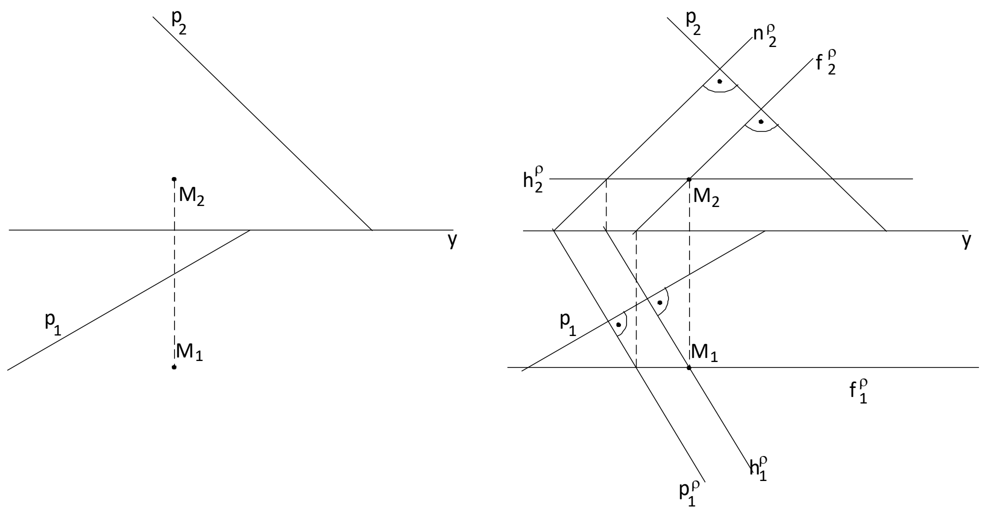
Tato úloha je opačná k úloze předchozí. I zde využijeme kritérium kolmosti přímky a roviny a znalosti o hlavních přímkách.

Uvědomme si, že půdorys horizontální hlavní přímky je kolmý na zadanou přímku a její nárys je rovnoběžný se základnicí, půdorys frontální hlavní přímky je také rovnoběžný se základnicí a nárys je kolmý na nárys dané přímky ($h_1 \perp p_1$ a $h_2 \parallel y$ a $f_2 \perp p_2$ a $f_1 \parallel y$).

Příklad: Daným bodem *M* veďte rovinu kolmou k přímce p.

Bodem *M* sestrojíme horizontální hlavní přímku a frontální hlavní přímku podle popisu výše a poté určíme jejich stopníky, kterými prochází stopy hledané roviny.

Není nutné vždy sestrojovat obě hlavní přímky. Stačí sestrojit jednu stopu a druhou dorýsovat kolmo k danému průmětu přímky průsečíkem již nalezené stopy se základnicí.



Rovina kolmá k přímce

VZDÁLENOST BODU OD ROVINY

Tato úloha je složena ze tří jednodušších úloh, které jsme již řešili v předchozím textu. Jsou to:

1) kolmice z daného bodu k rovině
2) průsečík této kolmice s danou rovinou
3) určení skutečné vzdálenosti průsečíku a daného bodu.

Pokud tyto úlohy sestrojíme, získáme požadovanou délku.

VZDÁLENOST BODU OD PŘÍMKY

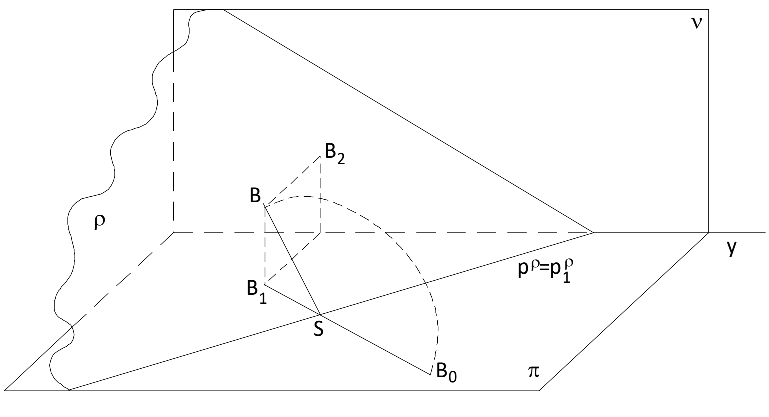
Naším úkolem v této úloze je určit vzdálenost daného bodu od dané přímky. Jako předchozí úloha, také tato je složena ze tří podúloh:

1) sestrojení roviny kolmé daným bodem k dané přímce
2) určení průsečíku této kolmé roviny a dané přímky
3) určení skutečné vzdálenosti průsečíku a daného bodu.

OTÁČENÍ ROVINY KOLEM STOPY

Často je součástí nějaké úlohy konstrukce v rovině, která není rovnoběžná s průmětnou. Útvary v takto položených rovinách jsou zkreslené, proto je nutné před konstrukcí celou rovinu **otočit do průmětny**, příp. roviny rovnoběžné s průmětnou, provést konstrukci a rovinu otočit zpět. V našem případě budeme otáčet rovinu kolem stopy roviny, ať už půdorysné nebo nárysné.

Otáčení celé roviny budeme provádět pomocí otáčení libovolného bodu v rovině. Osou otáčení je tedy stopa roviny, středem otáčení pak průsečík S spádové přímky procházející otáčeným bodem a stopou. Poloměr otáčení r pak vzdálenost středu otáčení S a otáčeného bodu B. Tato vzdálenost r je však zkreslená, tedy nejdříve musíme úsečku BS sklopit.



Otáčení roviny kolem stopy

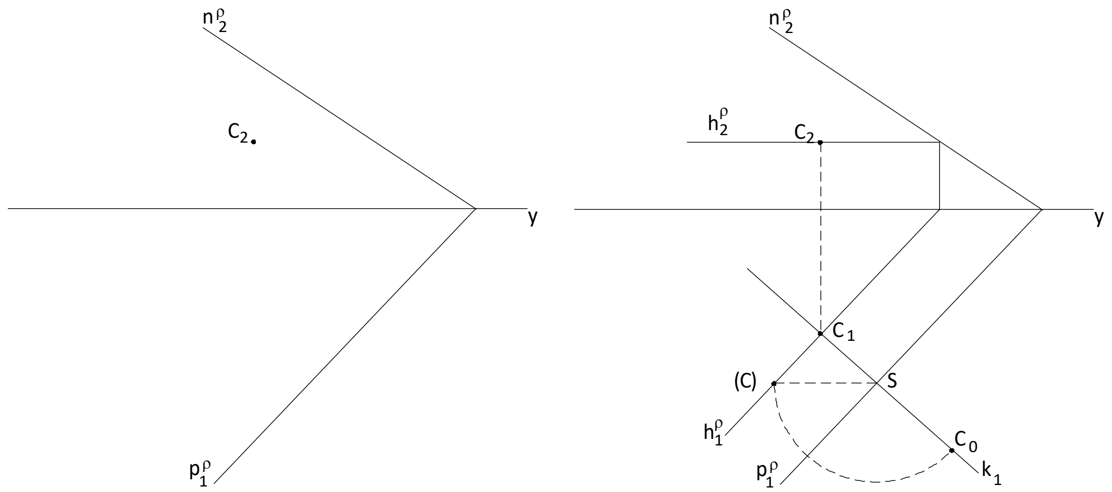
Mezi body v rovině a body otočené roviny existuje prostorová geometrická příbuznost - **osová afinita v prostoru**. Jejím rovnoběžným průmětem do roviny průmětny získáme **osovou afinitu v rovině**, kterou používáme pro zjednodušení otáčení. Osou afinity je stopa, kolem které otáčíme a párem odpovídajících si bodů je průmět bodu B_1 a jeho otočený obraz B_0.

Postup řešení rovinné úlohy:

1. Zvolíme osu otáčení - stopa roviny.
2. Sestrojíme střed a poloměr otáčení.
3. Otočíme jeden bod.
4. Další otočené body získáme pomocí osové afinity.
5. Provedeme rovinnou konstrukci.
6. S využitím afinity otočíme výsledek zpět.
7. Body výsledného útvaru odvodíme do druhého průmětu.

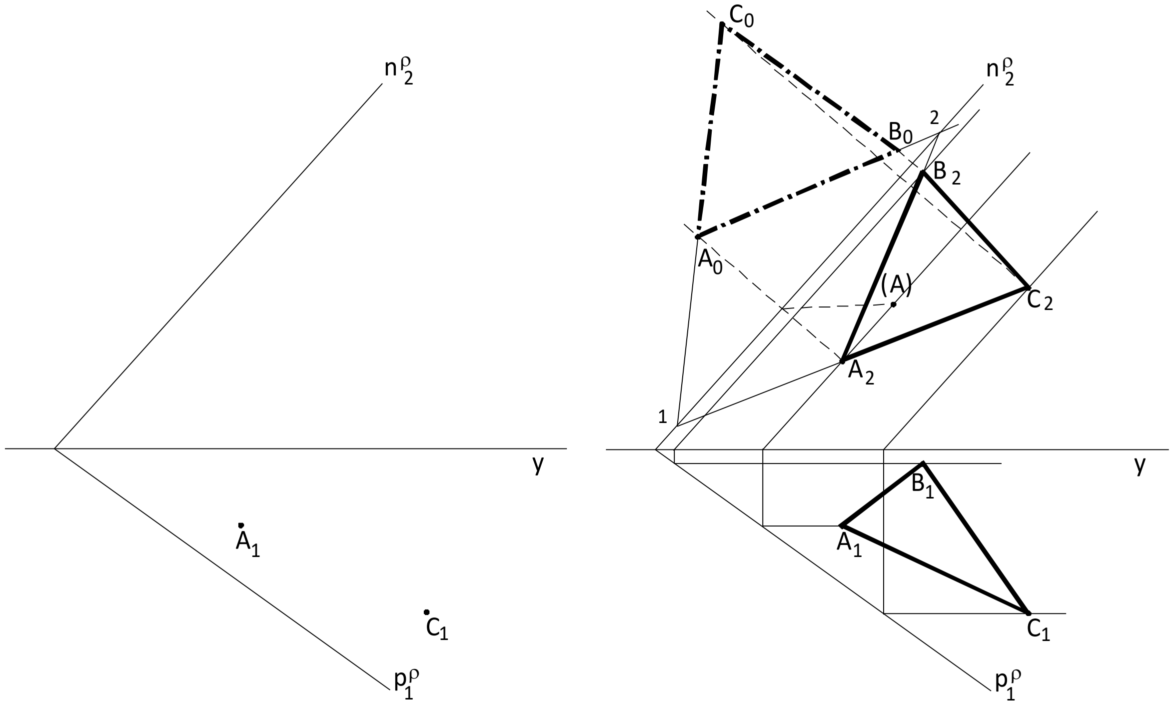
Příklad: Otočte rovinu ρ kolem stopy do roviny.

Nejdříve musíme určit půdorys bodu C_1 pomocí horizontální hlavní přímky. Poté sestrojíme v bodě C_1 kolmici k_1 k půdorysné stopě, její průsečík se stopou je střed otáčení S. Úsečku SC_1 sklopíme v půdorysu a tím získáme skutečnou délku poloměru otáčení $(C)S$. Skutečnou délku poloměru naneseme na kolmici k_1 od středu S, tím získáme otočený bod C_0 a také celou otočenou rovinu.



Otáčení roviny

Příklad: Sestrojte rovnostranný trojúhelník *ABC*, který leží v dané rovině ρ a je určen body *A, C*.



Sestrojení trojúhelníku v rovině

Jako první sestrojíme nárysy bodů A_2, C_2 pomocí frontálních hlavních přímek. Pak otočíme bod A_2: sestrojíme kolmici z A_2 na nárysnou stopu, sklopíme poloměr otáčení a ten naneseme na kolmici, tím získáme bod A_0.

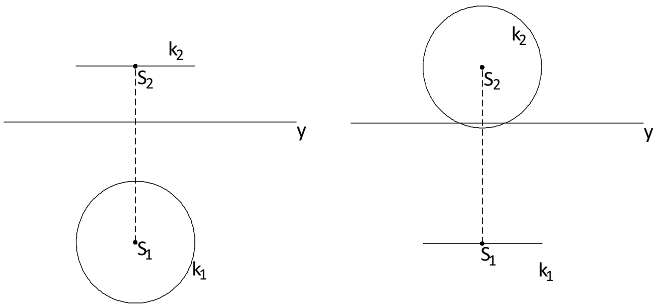
Pomocí osové afinity určíme otočený bod C_2: nalezneme průsečík 1 přímky A_2C_2 s nárysnou stopou, ten spojíme s otočeným bodem A_0, na této přímce a na kolmici z bodu C_2 na nárysnou stopu leží bod C_0. Nyní sestrojíme známou konstrukcí rovnostranný trojúhelník $A_0B_0C_0$.

Pomocí afinity otočíme bod B_0 zpět: průsečík 2 např. A_0B_0 se stopou spojíme s bodem A_2, na této přímce a na kolmici z B_0 ke stopě leží bod B_2. Určíme půdorys bodu B_1 pomocí hlavní přímky.

OBRAZ KRUŽNICE

1. Jestliže kružnice leží v rovině rovnoběžné s průmětnou, pak je jejím obrazem shodná **kružnice**.

Je-li, rovina kružnice $k(S, r)$ rovnoběžná s půdorysnou (nárysnou), pak jejím prvním (druhým) průmětem je kružnice $k_1(S_1, r)$ ($k_2(S_2, r)$) a druhým (prvním) průmětem k_2 (k_1) je úsečka délky $2r$ rovnoběžná se základnicí.



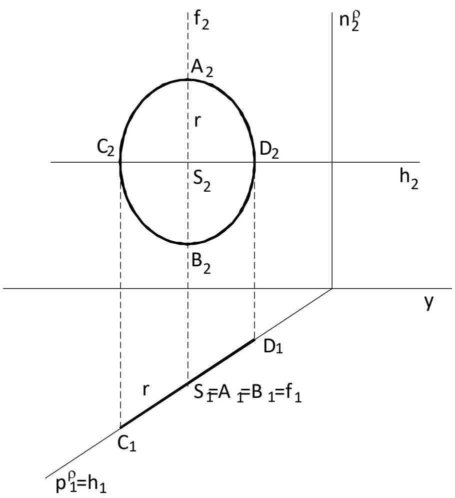
Kružnice v rovině rovnoběžné s průmětnou

2. Leží-li kružnice v rovině kolmé na průmětnu, obrazem je **úsečka**, jejíž délka je rovna průměru kružnice.

Je-li rovina kružnice *k* kolmá např. k půdorysně, pak jejím prvním průmětem k_1 je úsečka C_1D_1 délky 2*r*, která leží na půdorysné stopě p_1^ρ roviny ρ kružnice. Střed kružnice *k* se zobrazí do středu S_1 úsečky C_1D_1.

Druhým průmětem k_2 kružnice *k* je elipsa se středem v bodě S_2, hlavní poloosou A_2S_2 rovnoběžnou s nárysnou stopou n_2^ρ (jejíž délka je *r*) a s vedlejší poloosou C_2S_2 rovnoběžnou se základnicí.

Obdobné řešení má situace, pokud je kružnice v rovině kolmé k nárysně.



Kružnice v rovině kolmé k půdorysně

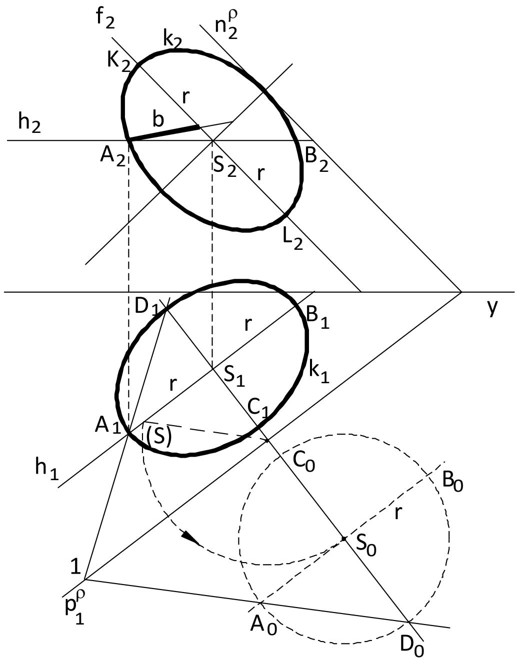
3. V obecném případě je obrazem **elipsa**.

Sdruženými průměty kružnice jsou **různé elipsy**. Velikost průměru kružnice, který leží na hlavní přímce procházející středem kružnice, se při pravoúhlém promítání zachovává, ostatní průměry se v pravoúhlém promítání zkracují. Průměr na hlavní přímce bude tedy hlavní osou elipsy, do které se kružnice zobrazí.

V prvním průmětu k_1 kružnice *k* se skutečná délka poloměru *r* kružnice promítá do hlavní poloosy A_1S_1 elipsy ležící na prvním průmětu h_1 hlavní přímky roviny. Na vedlejší poloose C_1S_1

elipsy se poloměr kružnice zkracuje na velikost vedlejší poloosy elipsy. Tu sestrojíme pomocí např. pomocí otočení roviny kružnice do půdorysny a pomocí osové afinity.

Analogická situace platí i pro druhý průmět k_2 kružnice *k*. *P*oloměr *r* kružnice se nezkrácený promítá do hlavní poloosy K_2S_2 elipsy, ležící na druhém průmětu f_2 hlavní přímky roviny procházející středem S_2 elipsy. Na vedlejší poloose elipsy se poloměr kružnice zkracuje na velikost vedlejší poloosy elipsy. Tu můžeme sestrojit pomocí rozdílové proužkové konstrukce (viz text „ohniskové vlastnosti kuželoseček“), známe-li hlavní vrcholy elipsy K_2, L_2 a obecný bod elipsy např. A_2.

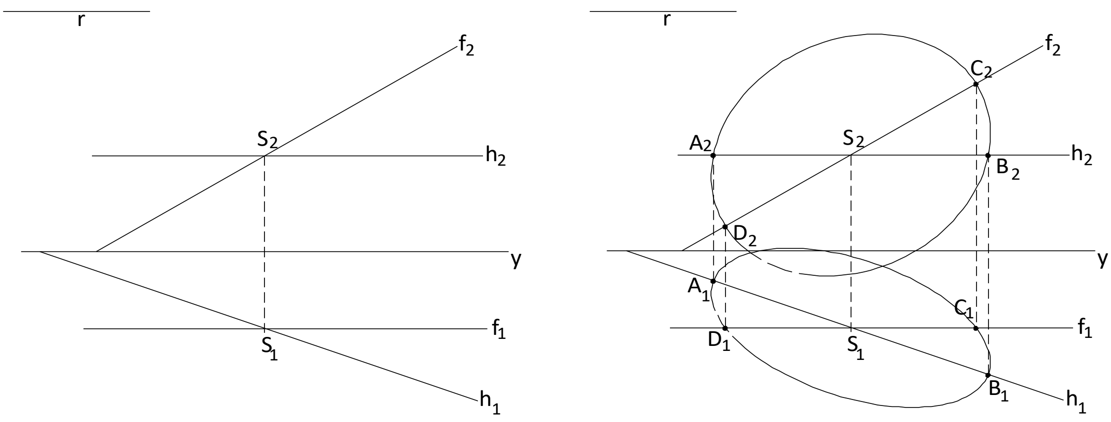


Kružnice v obecné rovině

Příklad: V rovině ρ, která je zadaná dvěma různoběžkami, hlavními přímkami *h*, *f*, sestrojte kružnici *k*(*S*, *r*).

Na horizontální hlavní přímku *h* naneseme v půdorysu od bodu S_1 na obě strany skutečnou velikost poloměru *r* - body označíme A_1, B_1 a odvodíme je po ordinále do nárysu. Na frontální hlavní přímku *f* naneseme v nárysu od bodu S_2 na obě strany skutečnou velikost poloměru *r* - body označíme C_2, D_2 a odvodíme je po ordinále do půdorysu. Obrazem kružnice v půdorysu je elipsa s hlavní osou A_1B_1, body C_1, D_1 leží na elipse. Pomocí proužkové konstrukce získáme délku vedlejší osy.

Obrazem kružnice v nárysu je elipsa s hlavní osou C_2D_2, body A_2, B_2 leží na elipse. Pomocí proužkové konstrukce získáme vedlejší osu.



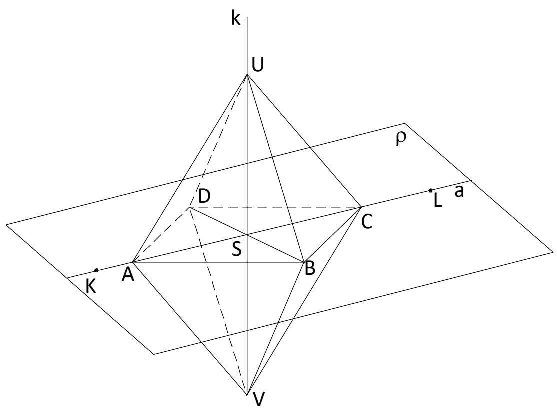
Zobrazení kružnice

ZOBRAZENÍ TĚLES A PLOCH

Užitím uvedených polohových a metrických úloh jsme nyní schopni sestrojit jakékoliv těleso a vyřešit na něm jakékoliv úlohy.

Příklad: Zobrazte pravidelný osmistěn *ABCDUV*, jehož tělesová úhlopříčka je na přímce *a* = *KL* (*K*[4; -4; 1], *L*[6; 4; 10]) a je dán jeho vrchol *D*[7; -3; 8], který na úhlopříčce neleží.

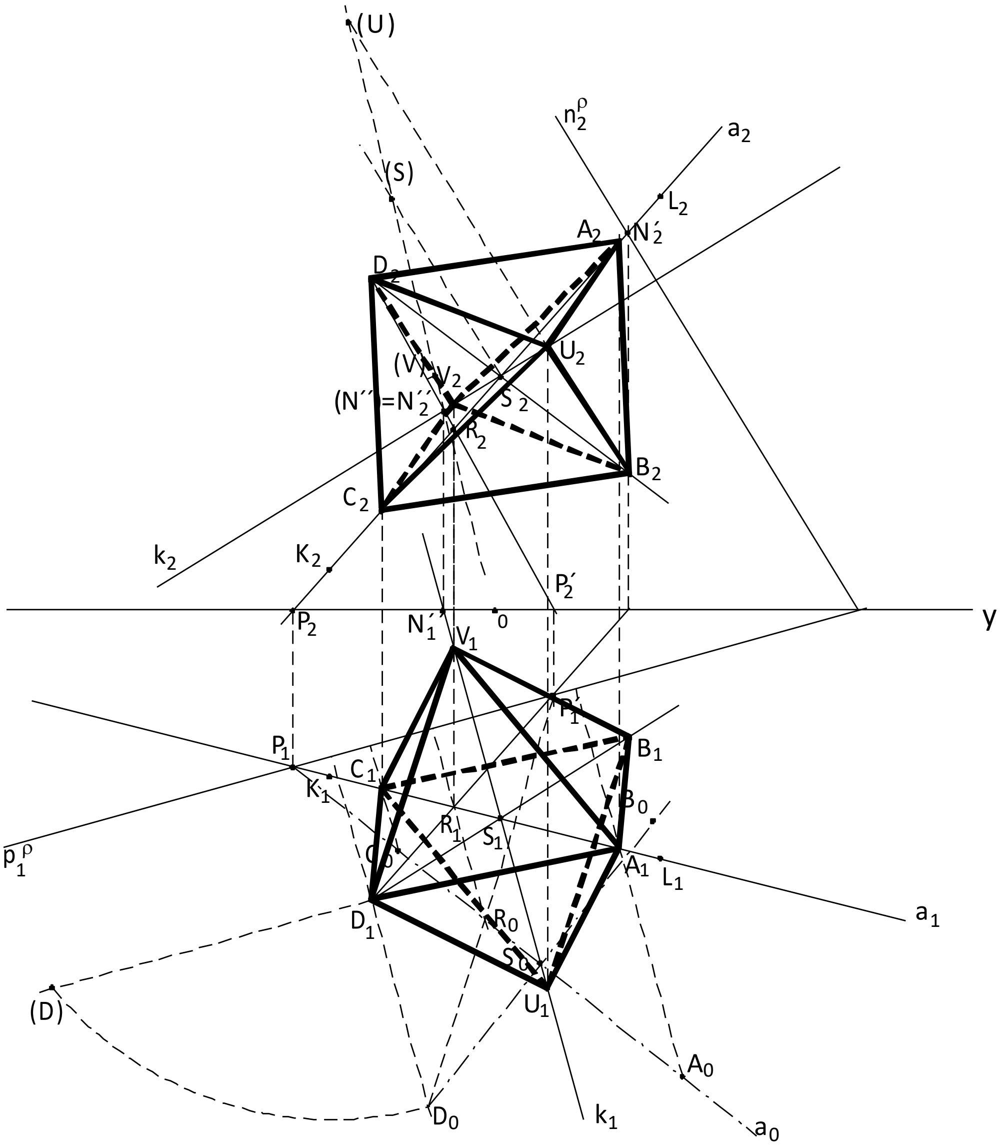
Nejdříve musíme určit prostorové řešení úlohy. Poté jednotlivé dílčí konstrukce sestrojíme v používané zobrazovací metodě.



Rozbor úlohy – zobrazení osmistěnu

Postup konstrukce:

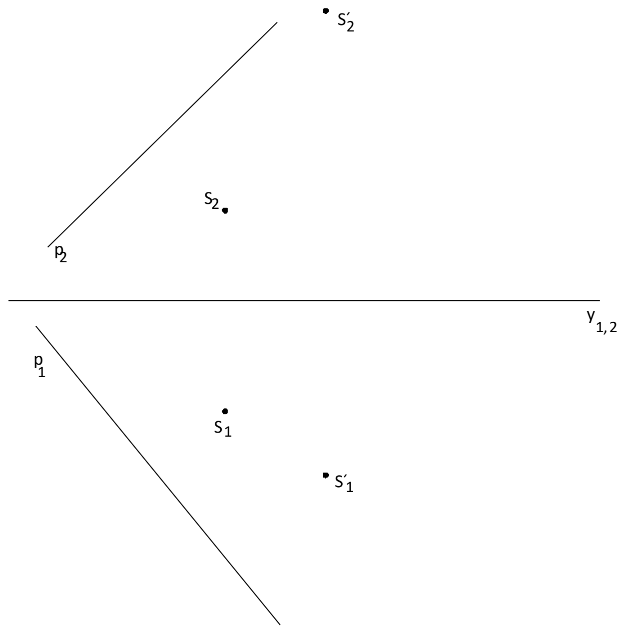
1. $\rho;\ \rho = (Da)$
2. $\check{c}tverec\ ABCD; \check{c}tverec\ ABCD \subset \rho, \{A, C\} \subset a, S - st\check{r}ed\ \check{c}tverce$
3. $k; k \perp \rho \wedge S \in k$
4. $U, V;\ \{U, V\} \subset k, |SU| = |SV| = |AS|$.
5. $osmist\check{e}n\ ABCDUV$



Zobrazení osmistěnu

Příklad: Sestrojte průměty pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV* s podstavou *ABCD* ležící v nárysně promítací rovině $\alpha = (\infty; -69; 48)$, je-li dáno $A[24; -29; ?]$, střed $S[47; 0; ?]$ podstavy *ABCD* a výška jehlanu *v* = 94.

Příklad: Sestrojte pravidelný čtyřboký hranol, jsou-li dány středy *S, S´* jeho podstav a přímka *p*, na níž leží jeho vrchol



Zadání – pravidelný čtyřboký hranol

ROVINNÝ ŘEZ ROTAČNÍHO VÁLCE A KUŽELE

ŘEZ VÁLCOVÉ PLOCHY

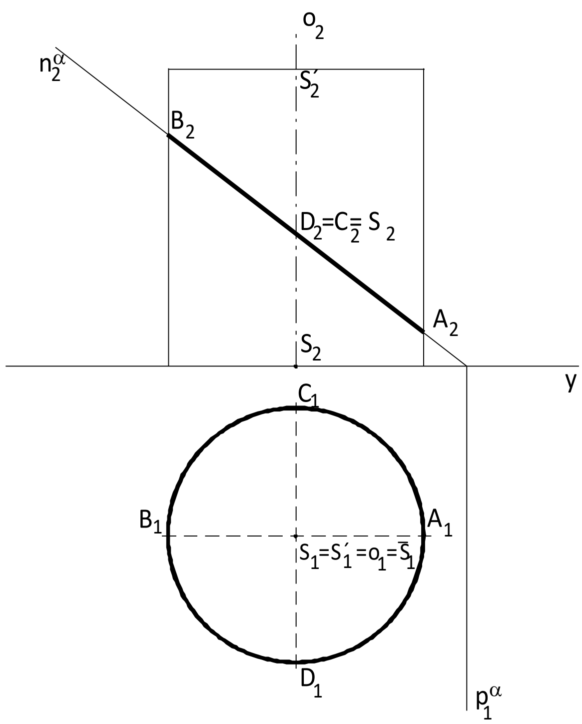
Řez rotační válcové plochy podle odchylky roviny řezu a osy válcové plochy:

1. Rovina je **kolmá** k ose válcové plochy – řezem plochy je kružnice.
   Rotační válec taková rovina protíná v kruhu, nebo nemá s válcem žádný společný bod.
2. Rovina je **rovnoběžná** s osou válcové plochy (směrová rovina) – řezem jsou dvě povrchové přímky, nebo se jí dotýká v jedné povrchové přímce, nebo s ní nemá žádný společný bod.
   Rotační válec pak protíná v obdélníku, nebo se ho dotýká v úsečce, nebo nemají žádný společný bod.
3. Rovina je **kosá** k ose válcové plochy – řezem je elipsa. Přičemž mezi rovinou povrchové kružnice a roviny řezu platí **afinita**.

Věta Quételetova-Dandelinova: Řezem rotační válcové plochy rovinou, která je kosá k ose plochy, je elipsa. Jejími ohnisky jsou dotykové body kulových ploch vepsaných válcové ploše tak, že se dotýkají roviny řezu. Střed elipsy leží na ose válcové plochy, délka její vedlejší poloosy je rovna poloměru válcové plochy.

Příklad: Zobrazte řez rotačního válce s podstavou v půdorysně rovinou α kolmou k nárysně.

Protože rovina řezu je kosá k ose válce, je řezem elipsa. Rovina řezu nemá s podstavou válce žádný společný bod, elipsa proto tvoří celou hranici řezu. Kdyby rovina řezu protínala podstavy válce, byl by řez ohraničen oblouky elipsy a tětivami, které na podstavných hranách vytínají průsečnice roviny řezu s rovinami podstavy. Protože rovina α je kolmá k nárysně, je nárysem řezu úsečka A_2B_2 a půdorys řezu splývá s půdorysem válce.



Řez válce rovinou kolmou k nárysně

Příklad: Zobrazte řez rotačního válce s podstavou v půdorysně obecně danou rovinou α.

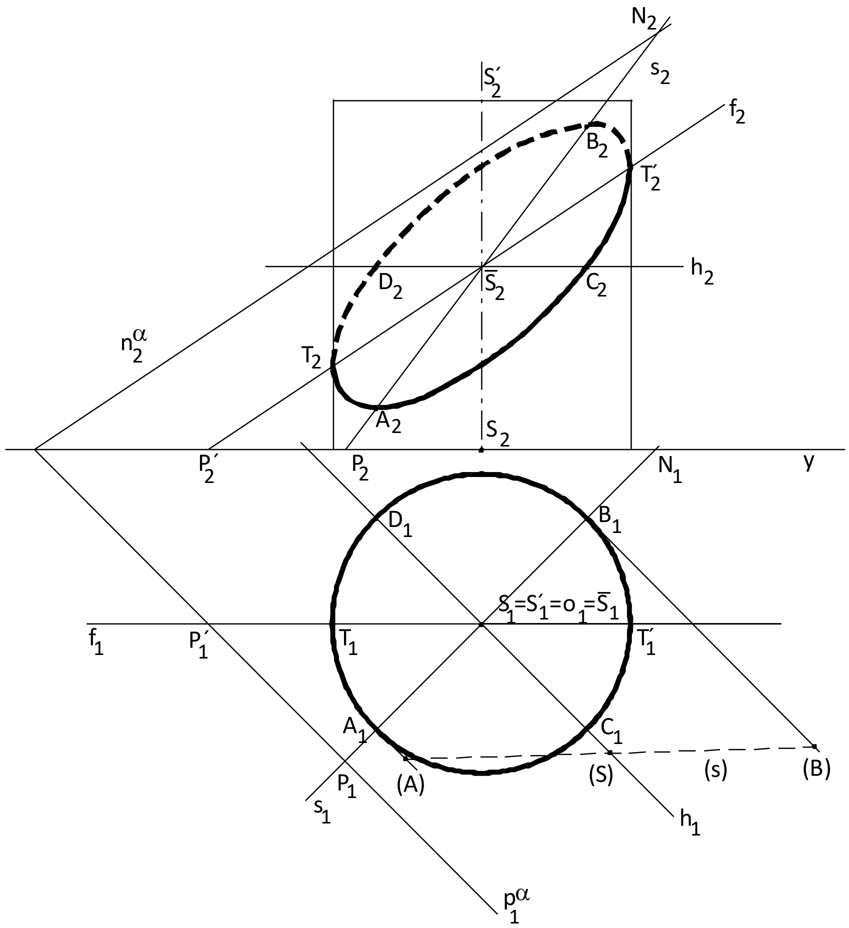
Rovina řezu je kosá k ose válce, proto je hranicí řezu elipsa. Opět má válec podstavu v půdorysně, proto půdorys řezu splývá s půdorysem válce.

K určení nárysu řezu proložíme osou rovinu λ kolmou k rovině α. Protože je osa kolmá k půdorysně, je také rovina λ kolmá k půdorysně ($o_1 \in p_1^\lambda \perp p_1^\alpha$, $n_2^\lambda \perp y_{1,2}$). Průsečnice s rovin α a λ, která je spádovou přímkou roviny řezu, je také hlavní osou elipsy řezu. Přímka s protíná osu válce ve středu $\bar{S}$ elipsy řezu a plášť válce v hlavních vrcholech elipsy A, B. Vedlejší osa elipsy leží v rovině řezu na horizontální hlavní přímce h procházející středem elipsy kolmo k přímce s ($\overline{S_1} \in h_1 \perp s_1, \overline{S_2} \in h_2 \| y$). Přímka h protíná plášť válce ve vedlejších vrcholech C, D elipsy.

Úsečky A_2B_2, C_2D_2 jsou pro nárys elipsy jejími sdruženými průměry, z nichž pomocí Rytzovy konstrukce sestrojíme elipsu.

Body T_2, T'_2 v nárysu řezu zjistíme pomocí frontální hlavní přímky f. Tyto body určují viditelnost nárysu řezu. Viditelný v nárysu je oblouk elipsy na přední polovině válce, tedy oblouk TT' obsahující body A a C.

Délku hlavní osy *AB* pro elipsu ve skutečné velikosti určíme sklopením např. půdorysu této úsečky do půdorysny. Délka vedlejší osy *CD* je 2*r*.



Řez válce rovinou obecnou

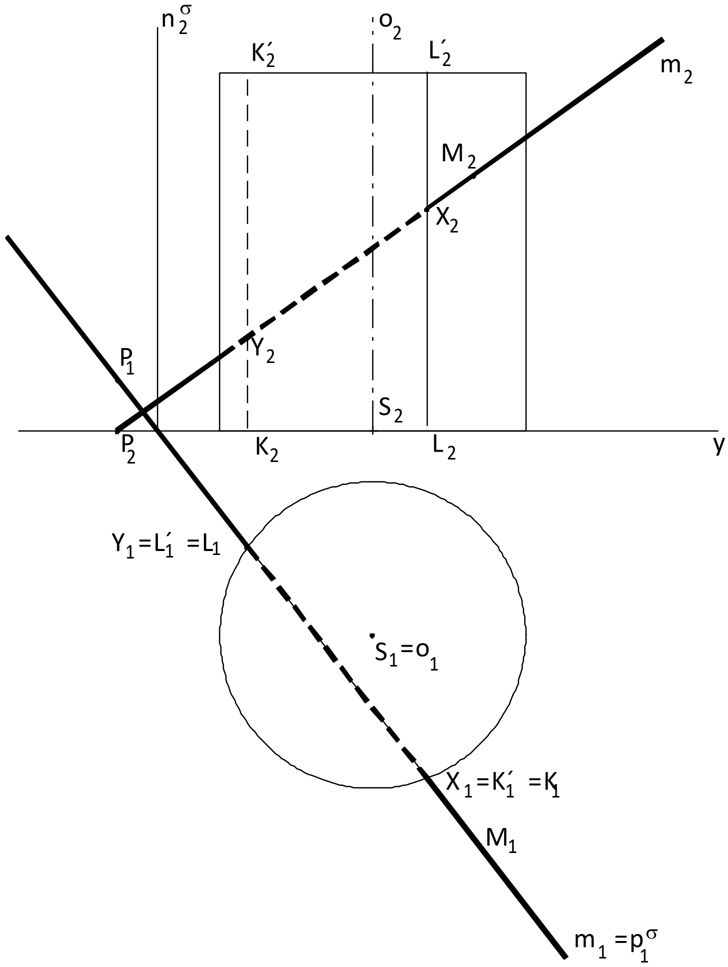
PRŮSEČÍK PŘÍMKY S VÁLCOVOU PLOCHOU (S POVRCHEM ROTAČNÍHO VÁLCE)

Danou přímkou proložíme směrovou rovinu a sestrojíme řez válcové plochy touto rovinou. Průsečíky jsou společné body dané přímky a řezu.

Příklad: Zobrazte průsečíky přímky *m* = *PM* s povrchem rotačního válce s podstavou v půdorysně.

Přímkou *m* proložíme směrovou rovinu, která je kolmá k půdorysně ($p_1^\sigma = \sigma_1 = m_1$, $n_2^\sigma \perp y_{1,2}$). Řezem rovinou σ je obdélník *KLL´K´*, jehož půdorysem je úsečka K_1L_1 a nárysem obdélník $K_2L_2L'_2K'_2$. Průsečíky přímky *m* s obvodem řezu jsou průsečíky *X, Y* ($X_1 = K_1 = K'_1$, $Y_1 = L_1 = L'_1$, $X_2 \in m_2 \cap K_2K'_2$, $Y_2 \in m_2 \cap L_2L'_2$).

Viditelnost řešíme tak, že předpokládáme neprůhlednost tělesa. V nárysu tedy vidíme bod *X*, který je na viditelné straně válce a naopak nevidíme bod *Y*.



Průsečík válce s přímkou

ŘEZ ROTAČNÍHO KUŽELE

Pokud je rovina řezu vrcholová, tedy prochází vrcholem kuželové plochy, pak jsou řezem buď **dvě povrchové přímky**, nebo **jedna povrchová přímka**, nebo jeden **bod** (vrchol kuželové plochy).

Řez vrcholovou rovinou uplatníme při úloze nalézt průsečíky přímky s kuželovou plochou, resp. povrchem kužele.

Není-li rovina řezu vrcholová, pak je řezem **kuželosečka**. Podle porovnání odchylky α roviny řezu a odchylky β povrchových přímek od roviny povrchové kružnice určíme typ této kuželosečky.

- $\alpha < \beta$ – řezem je **elipsa**; vrcholová rovina rovnoběžná s rovinou řezu má s kuželovou plochou společný její vrchol. Pokud je rovina řezu kolmá k ose, je řezem kružnice.
- $\alpha = \beta$ – řezem je **parabola**; vrcholová rovina rovnoběžná s rovinou řezu má s kuželovou plochou společnou jednu přímku (je tečnou rovinou).
- $\alpha > \beta$ – řezem je **hyperbola**; vrcholová rovina rovnoběžná s rovinou řezu protíná kuželovou plochu ve dvou přímkách.

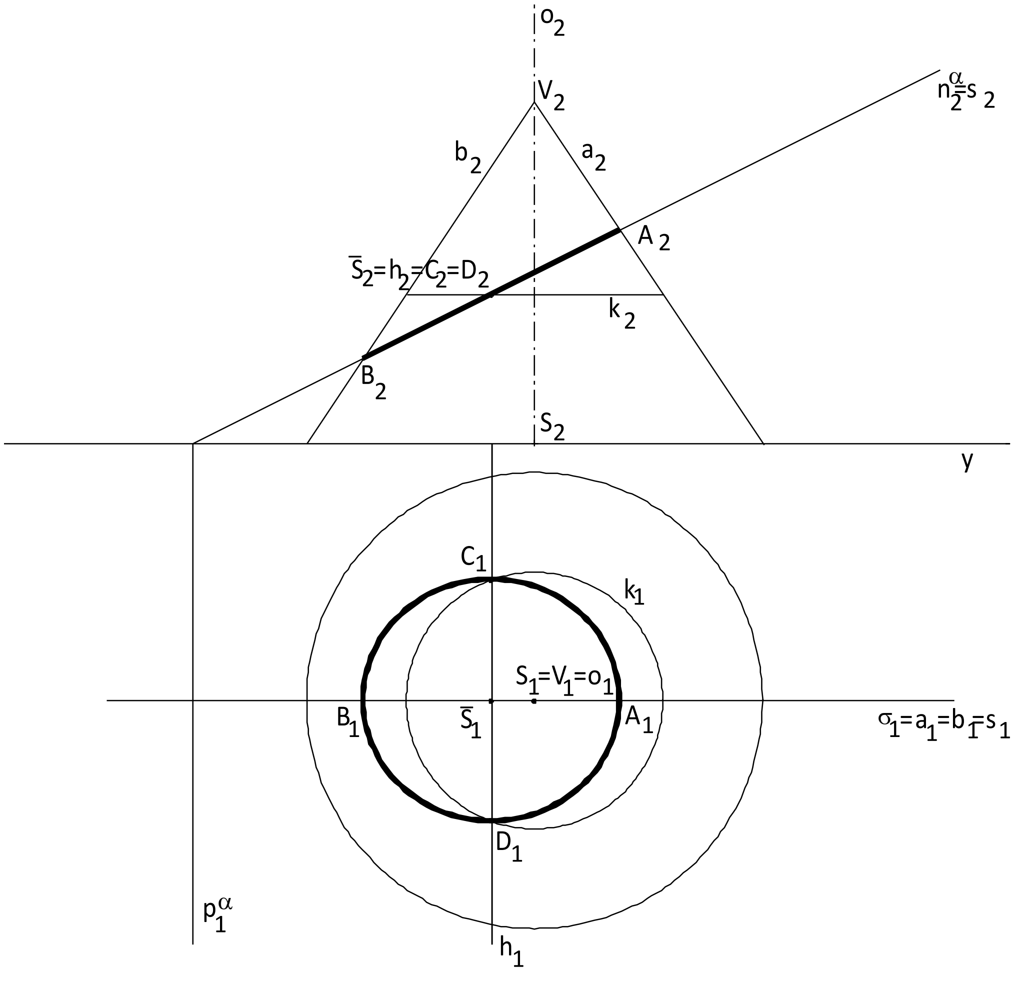
Věta Quételetova – Dandelinova: Řezy rotační kuželové plochy rovinami, které nejsou vrcholové, jsou kuželosečky s ohnisky v dotykových bodech kulových ploch vepsaných kuželové ploše a dotýkajících se roviny řezu.

V následujících příkladech se omezíme na jednoduché případy, ve kterých podstavu kužele umístíme do půdorysny. Složitější případy, kdy kuželová plochy nemá podstavu v průmětně na jednodušší typy převádíme.

Příklad: Zobrazte řez rotačního kužele s podstavou v půdorysně rovinou kolmou k nárysně.

Podle nárysu je zřejmé, že řezem je elipsa. Osou kužele vedeme rovinu σ kolmo k rovině řezu ($o_1 \in \sigma_1 \perp p_1^{\alpha}$). Rovina σ protne kuželovou plochu v přímkách *a, b* a rovinu α v její spádové přímce *s*. Přímka *s* je hlavní osou elipsy, průsečíky *A, B* přímek *a, b* s přímkou *s* jsou hlavními vrcholy elipsy, střed $\bar{S}$ úsečky *AB* je středem elipsy. Vedlejší vrcholy elipsy *C, D* jsou průsečíky kuželové plochy s hlavní horizontální přímkou *h* roviny řezu procházející středem elipsy $\bar{S}$.

Řezem v náryse je úsečka A_2B_2, protože rovina řezu je kolmá k nárysně. Půdorysem řezu je elipsa s hlavní osou A_1B_1 a vedlejší osou C_1D_1. Body C_1, D_1 odvodíme z nárysu pomocí povrchových přímek nebo povrchové kružnice, na které tyto body leží.



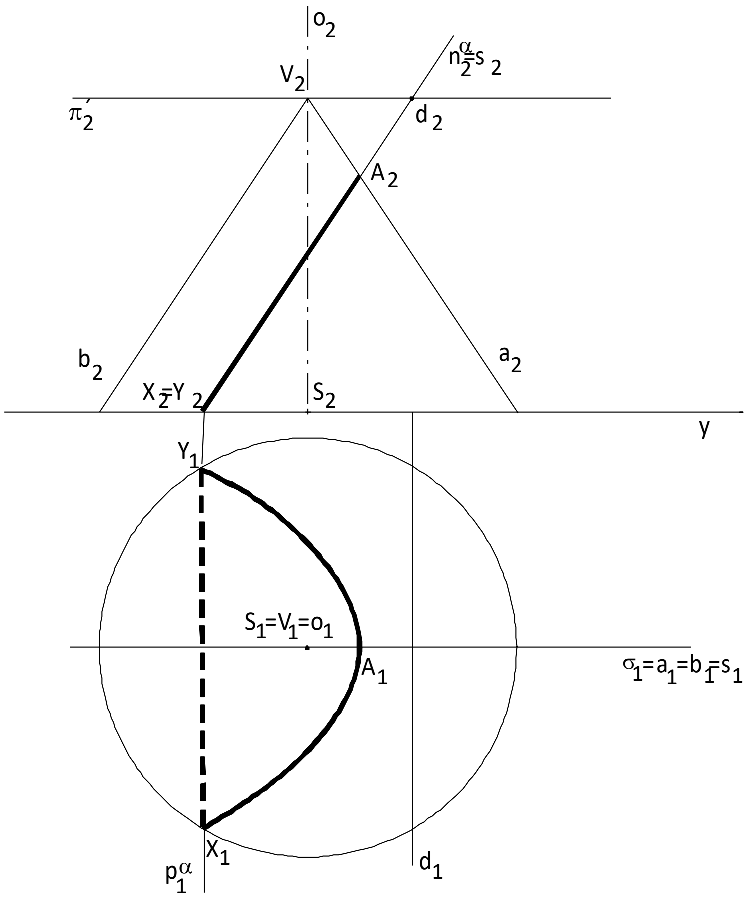
Řez kužele – elipsa

Příklad: Zobrazte řez rotačního kužele s podstavou v půdorysně rovinou α kolmou k nárysně.

Osou kužele vedeme rovinu σ kolmo k rovině řezu ($o_1 \in \sigma_1 \perp p_1^{\alpha}$). Rovina σ protne kuželovou plochu v přímkách *a, b* a rovinu α v její spádové přímce *s*. V nárysu vidíme, že rovina α je rovnoběžná s přímkou *b*, tedy řezem kuželové plochy bude parabola. Přímka *s* je osou paraboly a průsečík *A* přímek *s* a *a* je vrcholem paraboly.

Nárysem řezu je polopřímka A_2X_2. Půdorysem řezu je parabola s ohniskem V_1 a řídící přímkou d_1. Bod V_1 je půdorysem vrcholu *V* kuželové plochy a přímka d_1 je průsečnice *d* roviny α s rovinou $\pi' \| \pi$ procházející vrcholem *V* ($V_2 \in \pi'_2 \| y$, $d_2 \in \pi'_2 \cap \rho_2$, $d_1 \perp y$).

Půdorysná stopa roviny řezu protíná podstavnou hranu kužele v bodech *X, Y*. Řezem kužele je tak část roviny ohraničená obloukem paraboly a tětivou *XY*.



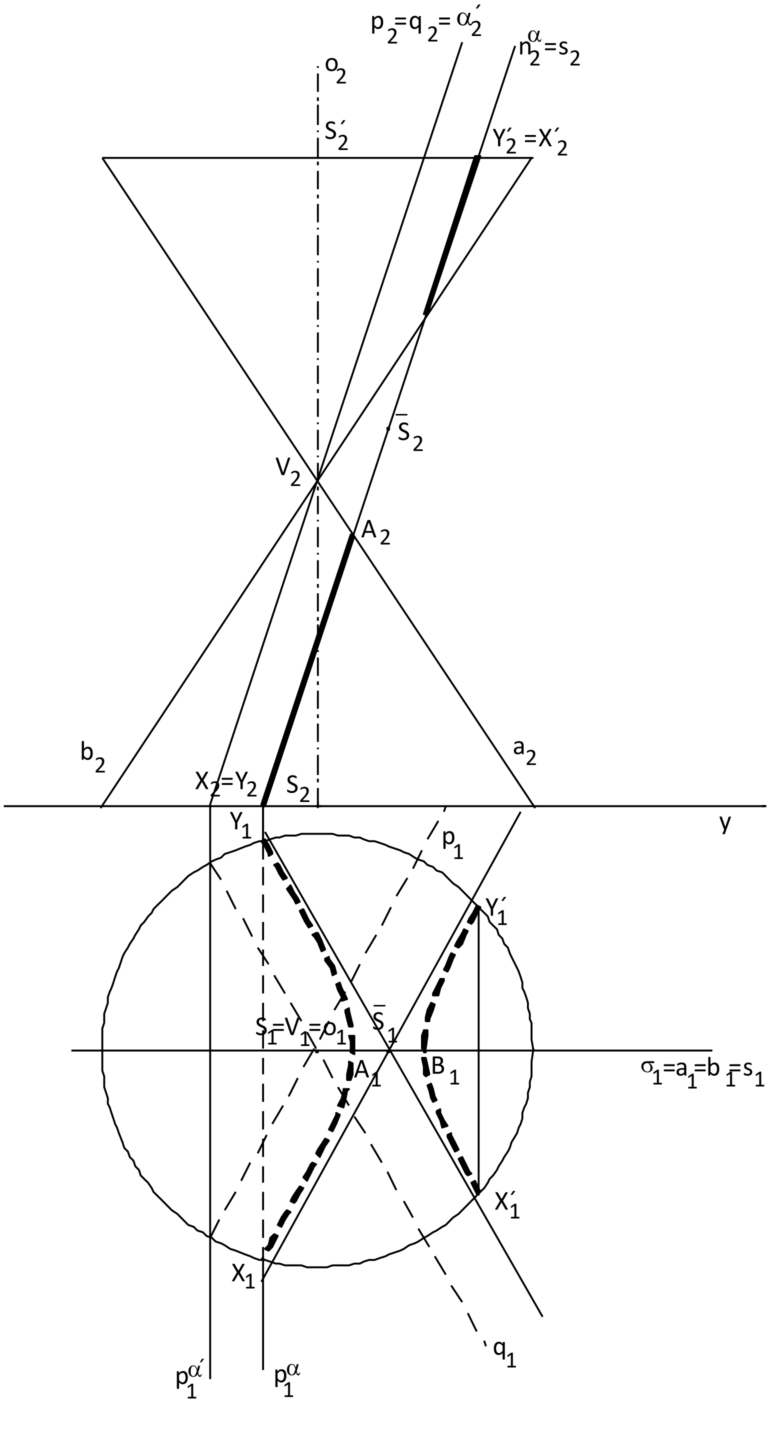
Řez kužele – parabola

Příklad: Zobrazte řez rotačního dvojkužele s dvěma podstavami o středech *S, S´* rovinou α kolmou k nárysně.

V tomto případě je řezem hyperbola. Rovina σ protne kuželovou plochu v přímkách *a, b* a rovinu α v její spádové přímce *s*. Přímka *s* je hlavní osou hyperboly a průsečíky *A, B* přímky *s* s přímkami *a, b* jsou vrcholy hyperboly.

Směry asymptot určují povrchové přímky *p, q*, s nimiž je rovina řezu rovnoběžná, tedy povrchové přímky, ve kterých kuželovou plochu protne vrcholová rovina $\alpha' \| \alpha$.

Nárysem řezu jsou dvě polopřímky A_2X_2 a $B_2X'_2$. Půdorysem řezu je hyperbola s osou v přímce s_1, vrcholy v bodech A_1, B_1 a jedním ohniskem v bodě V_1. Asymptoty hyperboly procházejí bodem $\bar{S}_1$ a jsou rovnoběžné s přímkami p_1, q_1. Řezem jsou dvě části roviny řezu ohraničené oblouky hyperboly a tětivami *XY*, *X´Y´*.



Řez kužele – hyperbola

Příklad: Zobrazte řez rotačního kužele s podstavou v půdorysně obecnou rovinou α.

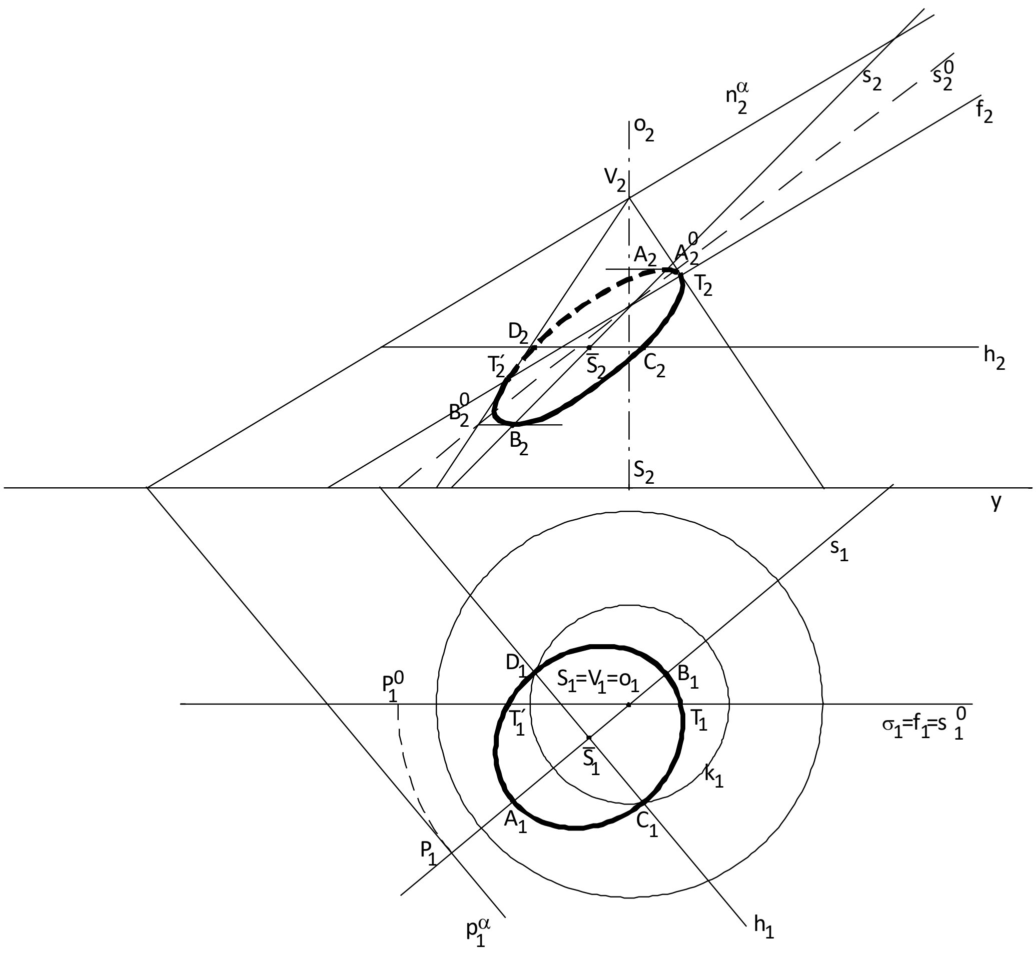
Řezem touto rovinou je elipsa. Spádová přímka *s* roviny řezu je také hlavní osou elipsy a průsečíky *A, B* přímky *s* s kuželem jsou vrcholy elipsy. Tyto body získáme pomocí otočení přímky *s* do roviny σ rovnoběžné s nárysnou kolem osy rotačního kužele. Toto otočení provedeme pomocí půdorysného stopníku *P* přímky *s* a průsečíku přímky *s* s osou kužele *o*. Půdorysný stopník se dostane do polohy P^0 a průsečík přímky *s* s osou *o* zůstane při otáčení na místě.

Body, ve kterých přímka s_2^0 protne nárys kužele, jsou otočené hlavní vrcholy elipsy A_2^0 , B_2^0. Tyto body poté otočíme zpět po povrchových kružnicích, které se zobrazí v náryse jako úsečky. Průsečíky těchto kružnic s s_2 jsou vrcholy A_2 , B_2. Tyto body jsou také nejvyšší body řezu elipsy v nárysu. Střed úsečky A_2B_2 je středem elipsy řezu.

Na horizontální hlavní přímce *h* procházející středem elipsy řezu leží vedlejší vrcholy *C, D* elipsy řezu. Zároveň leží na povrchové kružnici, jejíž nárys se překrývá s nárysem h_2.

Body *T, T´* v nichž se mění viditelnost řezu v nárysu, leží na frontální hlavní přímce roviny řezu procházející průsečíkem spádové přímky *s* a osy kužele *o*. V náryse jsou to body, ve kterých tato frontální hlavní přímka protíná nárys kužele.

Půdorys řezu se zobrazí jako elipsa, která má hlavní vrcholy v bodech A_1, B_1 a vedlejší vrcholy v bodech C_1, D_1. Nárysem řezu je elipsa, která má sdružené průměry A_2B_2, C_2D_2.



Řez kužele obecnou rovinou

PRŮSEČÍK PŘÍMKY S KUŽELOVOU PLOCHOU (S POVRCHEM ROTAČNÍHO KUŽELE)

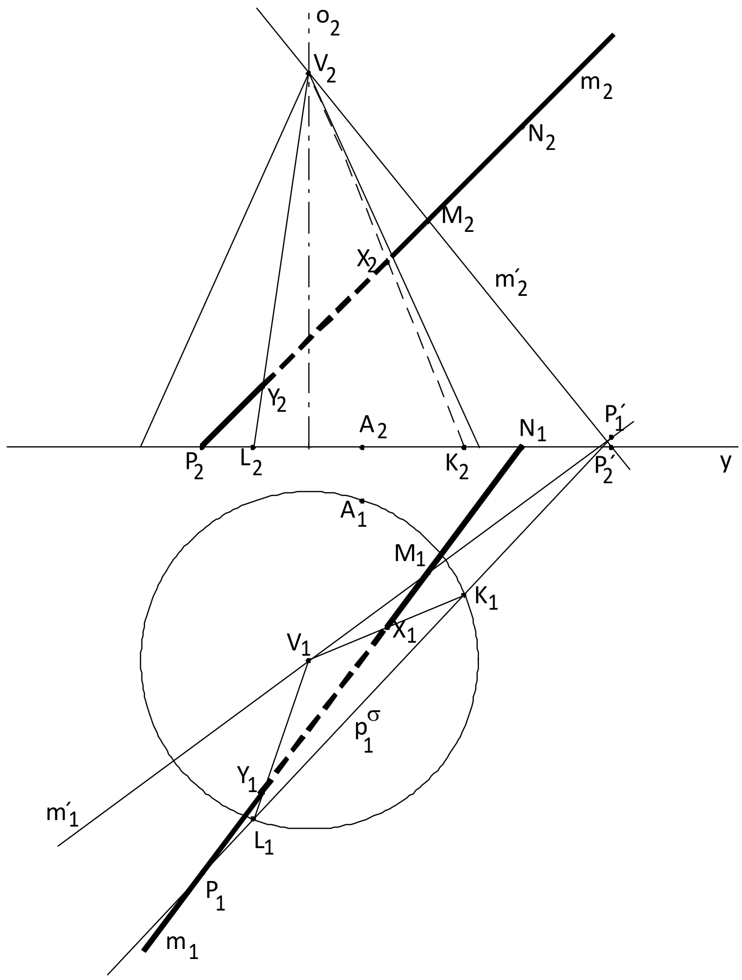
Danou přímkou proložíme vrcholovou rovinu a sestrojíme řez kuželové plochy touto rovinou. Průsečíky jsou společné body přímky a řezu.

Příklad: Zobrazte průsečíky přímky $m = PM$ s povrchem rotačního kužele s podstavou v půdorysně. Bod A je bodem podstavné hrany kužele a bod V je jeho vrcholem.

Půdorysná stopa p^{σ} vrcholové roviny σ, která obsahuje přímku m je určena půdorysným stopníkem P přímky m a půdorysným stopníkem P' další přímky m', která prochází vrcholem V a je různoběžná s přímkou m.

Řezem rotačního kužele touto vrcholovou rovinou je trojúhelník KLV. Jeho půdorysem je trojúhelník $K_1L_1V_1$, stejně tak nárysem je trojúhelník $K_2L_2V_2$. Průsečíky přímky m s obvodem řezu jsou průsečíky X, Y ($X_1 \in m_1 \cap K_1V_1$, $Y_1 \in m_1 \cap L_1V_1$, $X_2 \in m_2 \cap K_2V_2$, $Y_2 \in m_2 \cap L_2V_2$).

Pokud předpokládáme, že kužel je neprůhledný, je v půdorysu přímka m viditelná až k průsečíkům X, Y. V nárysu je bod X na neviditelné části pláště a bod Y na viditelné části.



Průsečík kužele s přímkou